

УДК 550.834

ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ АПРИОРНОЙ ГЕОЛОГИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ ПРИ ИНВЕРСИИ СЕЙСМИЧЕСКИХ ДАННЫХ

© 2019 г. К. А. Эпов

АО Руснедро, г. Москва, Россия

E-mail: epovk@yandex.ru

Поступила в редакцию 25.01.2018 г.

Принята в печать 25.03.2019 г.

В работе предлагается подход к параметризации априорных геологических представлений об изменениях условий осадконакопления в пространстве и геологическом времени для использования их в процессе инверсии геофизических данных на количественном уровне. Идея метода заключается в описании наблюдаемого или предполагаемого фациального разнообразия при помощи небольшого количества статистически независимых факторов («обобщенных геологических переменных»). Топология и метрика модели определяются набором базисных обстановок осадконакопления и статистиками фациальных переходов. Введенные параметры позволяют оценить вероятности появления различных фаций в каждой точке модели. Предлагаемая методика может быть применена к районам с различной степенью изученности скважинными методами и детальностью существующих геологических представлений.

Ключевые слова: сейсмическая инверсия, обстановки осадконакопления, фации, условная вероятность, априорная информация, теорема Байеса.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0002-333720196107-129>

ВВЕДЕНИЕ

Современные технологии построения объемных геологических моделей основываются на комплексном анализе скважинных данных и результатов интерпретации материалов дистанционных геофизических наблюдений. Решение задачи восстановления физических свойств внутренних точек среды по геофизическим данным, полученным на дневной поверхности или в скважинах, во многих случаях позволяет уменьшить неопределенность прогноза различных характеристик геологической среды в межскважинном пространстве. С другой стороны, хорошо известно, что обратные задачи геофизики являются некорректными. Для их решения применяются различные ограничения, позволяющие сузить класс возможных моделей, удовлетворяющих наблюдаемым данным [Тихонов, Арсенин, 1979; Tarantola, 2005; Scales, Tenorio, 2001]. Подобные ограничения базируются на априорной информации, не содержащейся в инвертируемых данных. Основным источником такой информации являются геологические представления об условиях формирования и истории

геологического развития изучаемых интервалов разреза.

Большую практическую значимость с точки зрения изучения строения месторождений нефти и газа на сегодняшний день получил метод инверсии сейсмических данных, позволяющий перейти от амплитудных характеристик отраженных волн к упругим свойствам среды [Sen, 2006; Russell, 1998; Sen, Stoffa, 1991; Гогоненков, 1987; Кабанихин, Исаков, 2007]. Поскольку амплитуды отражений содержат информацию лишь об относительных изменениях значений упругих параметров, корректное решение данной задачи возможно лишь при условии включения в модель среды постоянной составляющей и других компонент, находящихся вне сейсмического диапазона частот. В самом простом случае регуляризация задачи сейсмической инверсии сводится к построению низкочастотной фоновой модели упругих параметров и наложении ряда ограничений на допустимые отклонения решения от этого начального приближения.

Фоновая модель является главным фактором, контролирующим уровень значений упругих параметров, получающихся в результате инверсии

сейсмических данных (см., например, [Ball et al., 2015]). В процессе дальнейшей количественной интерпретации они используются для оценки таких свойств пород, как пористость, глинистость и др. При этом параметры зависимостей, на которых базируется такой прогноз, во многом определяются предполагаемой фациальной принадлежностью отложений. Поэтому очевидно, что корректная оценка петрофизических свойств по результатам инверсии сейсмических данных может быть выполнена только при условии использования фоновой модели упругих параметров, согласованной с априорными геологическими и петрофизическими представлениями.

С этих позиций сейсмическая инверсия должна рассматриваться не как формализованная процедура пересчета амплитуд отражений в разрез упругих параметров при уже заданной «извне» фоновой модели, а как процесс геологического моделирования, обусловленный сейсмическими и скважинными данными [Haas, Dubrule, 1994; Grana, 2013; Bosch et al., 2010; Яковлев и др., 2011]. Вместе с тем, на сегодняшний день использование геологической информации при количественной интерпретации сейсмических данных весьма ограничено на практике. Технология построения начальных моделей инверсии во многих случаях по-прежнему сводится к проведению интерполяции данных акустического и плотностного каротажа в межскважинное пространство, а последующий количественный прогноз свойств может выполняться с привлечением геологических представлений, не использовавшихся при построении фоновой модели. Такой подход характеризуется рядом серьезных недостатков, способных привести к получению необоснованных с геологической точки зрения результатов, что неоднократно отмечалось во многих публикациях [Sams, Saussus, 2013; Kemper, Gunning, 2014; Мясоедов, 2015].

Одним из препятствий на пути интегрирования геологических представлений в процесс интерпретации геофизических данных является качественный характер первых. Для решения данной задачи необходимо выполнить описание геологических знаний некоторым набором количественных показателей. Публикуемые в последнее время результаты работ показывают, что наиболее перспективным с этой точки зрения, по-видимому, является подход, основанный на байесовском формализме [Duijndam, 1998; Bulland et al., 2008; Bosch et al., 2010; Ulvmoen, Omre, 2010]. В рамках данного подхода разнообразие типов пород кодируется дискретным

набором фаций, а описание априорной геологической модели выполняется путем оценки значений вероятностей появления этих фаций для каждой точки исследуемого объема. Комплексование геофизических и геологических данных осуществляется с опорой на теорему Байеса. При последующей интерпретации результатов сейсмической инверсии, например, оценка вероятности появления фаций (F_i), обусловленных значениями упругих свойств среды (m_{elas}), выполняется следующим образом:

$$P(F_i | m_{elas}) = \frac{p(m_{elas} | F_i) \cdot P(F_i)}{p_{prior}(m_{elas})}. \quad (1)$$

Прогноз коллекторских свойств (m_{res}) может быть осуществлен путем оценки их функции плотности вероятности, обусловленной значениями упругих параметров:

$$p(m_{res} | m_{elas}) = \sum_i p(m_{res} | m_{elas}, F_i) \cdot P(F_i | m_{elas}). \quad (2)$$

Использование подобных выражений позволяет не только получить пространственные модели таких характеристик среды, как вероятности литотипов, пористость и глинистость, но и оценить неопределенность выполненного прогноза. Однако при глубокой проработке алгоритмов сейсмического моделирования и инверсии, обеспечивающих переход от сейсмических данных к упругим параметрам $\{m_{elas}\}$, и технологий петроупругого моделирования, позволяющих оценить вероятностные распределения $p(m_{elas} | F_i)$ и $p(m_{res} | m_{elas}, F_i)$, участвующие в выражениях (1) и (2) [Mukerji et al., 2001; Avseth et al., 2005; Mavko et al., 2009; Grana et al., 2012; Dvorkin et al., 2014], особенностям оценки априорных вероятностей $P(F_i)$ в сегодняшней производственной практике уделяется незначительное внимание. Пожалуй, один из самых распространенных подходов к их заданию основан на анализе пропорций литотипов в разрезах скважин в ограниченных стратиграфических интервалах и применении этих пропорций на всей площади исследований в предположении об отсутствии латеральной изменчивости данных вероятностей. В подавляющем большинстве случаев такая методика оценки не выдерживает никакой критики как с точки зрения статистики, так и с геологических позиций. Более обоснованные подходы базируются на попытках явного учета фациальной зональности в начальной модели с последующей настройкой вероятностных распределений индивидуально для каждой из выделенных зон [Gonzalez et al., 2016]. Это требует

картирования границ таких зон до выполнения инверсии сейсмических данных.

Для выполнения обоснованного построения моделей пространственных распределений величин $P(F_i)$ необходимо привлекать такие разнородные и разномасштабные данные, как результаты макро- и микроскопических исследований керна, седиментационного моделирования, циклофациального анализа, петрофизической и геологической интерпретации данных ГИС, кинематической интерпретации сейсмических данных, а также региональные геологические представления. Оценка априорных вероятностей, основанная на подобных материалах, подразумевает переход к количественному описанию последних. В связи с этим большое значение начинает играть выбор удачной параметризации имеющихся знаний о геологическом строении изучаемого объема пород. В настоящей работе рассматривается методика такой параметризации при помощи небольшого набора переменных, связанных с факторами, контролирующими фациальное (в седиментологическом смысле) разнообразие исследуемого объекта. При выполнении ряда условий эти «обобщенные геологические координаты» играют роль латентных переменных априорной геолого-геофизической модели среды, определяющих (с некоторым уровнем погрешности) остальные ее свойства: вероятности появления седиментологических фаций и петрофизически значимых типов пород, упругие характеристики, значения инженерных параметров и другие.

ФАЦИАЛЬНОЕ МНОГООБРАЗИЕ

Современный подход к построению геологических моделей осадочных комплексов основан на реконструкции обстановок осадконакопления, установлении связей литологического состава пород с процессами седиментации через систему генетически связанных фаций и последующем моделировании распределения фаций в пространстве. Фациальная принадлежность пород наиболее уверенно диагностируется вдоль стволов скважин на основе изучения данных керна и ГИС. Поэтому основной задачей при построении пространственных априорных геологических моделей является оценка вероятностей $P(F_i)$ в межскважинном пространстве.

Важно подчеркнуть, что закладываемый современными геологами смысл в понятие «фация» напрямую связан с информацией об условиях формирования и истории геологического развития изучаемых пластов [Крашенинников, 1971;

Reading, 2001]. Диагностика обстановок осадконакопления осадочных отложений выполняется, как правило, по набору структурно-текстурных признаков пород. Однако использование литологических критериев самих по себе, без привязки к генезису, редко когда позволяет удачно параметризовать фациальную модель с точки зрения решения рассмотренной выше задачи. Это связано, например, с тем, что сходный литологический состав пород может формироваться в принципиально различных обстановках осадконакопления. Поэтому важную роль при фациальной диагностике играет также анализ парагенетических ассоциаций фаций, позволяющий учитывать закономерности переходов от одного типа пород к другому.

Направленность геологических процессов во времени и наличие определенных трендов в пространственной смене обстановок осадконакопления во многих случаях приводит к уменьшению возможных вариаций фациального облика пород при перемещении от одной точки пространства к другой. Это приводит к появлению корреляционных связей между различными фациями, накладывая ряд дополнительных ограничений на возможные значения априорных вероятностей фаций в (1). Поэтому данные вероятности не могут задаваться в модели независимо друг от друга.

Основная идея настоящей работы состоит в том, чтобы описать наблюдаемое или предполагаемое разнообразие обстановок осадконакопления, представленное набором из N фаций $\{F_i\}$, небольшим числом независимых факторов, количество которых существенно меньше N . При этом близкие по генезису фации должны характеризоваться близкими значениями этих параметров. Рассмотрим кратко принципы, лежащие в основе предлагаемого подхода.

Осадочный материал в приемном бассейне накапливается под действием различных физических процессов, в условиях конкуренции последних за аккомодационное пространство. При изменении внешних условий меняется и относительный вклад этих процессов, что приводит к вариациям литологического состава и структурно-текстурных признаков пород, в итоге выражающихся в закономерной смене фаций. Таким образом, разнообразие возможных направлений фациальных переходов (то есть разнообразие фациальных рядов) напрямую определяется числом и изменчивостью нескольких факторов, отражающих вариации относительных вкладов процессов, контролирующих осадконакопление.

Задача параметризации принципиальной фациальной модели может быть сведена к количественному описанию этих факторов. Следует отметить, что идея многофакторной параметризации условий седиментации достаточно давно и успешно применяется в геологии. Так, в рамках подходов стратиграфии секвенций разнообразие прибрежно-морских обстановок определяется положением относительного уровня моря и аккомодационным пространством, связанным со скоростью тектонического погружения и количеством привносимого осадочного материала [Catuneanu et al., 2011; The Sedimentary..., 2003]. Разнообразие фаций глубоководья хорошо описывается трехфакторной моделью [Zavala et al., 2008]. Для континентальных условий широко применяется принципиальная модель, объясняющая разнообразие фаций речных и озерно-болотных обстановок взаимодействием следующих двух факторов: увеличением аккомодационного пространства и суммарным влиянием твердого и жидкого стока [Vochas, Suter, 1997; Carroll, Vochas, 1999]. Однако до сих пор подобные модели были лишены метрики, хорошо описывая наблюдаемое фациальное разнообразие лишь на качественном уровне.

Рассмотрим множество возможных состояний некоторого элементарного участка земной поверхности, на котором в разные моменты геологического времени реализуются различные обстановки осадконакопления. История этих изменений может быть описана как параметрическая кривая в некотором многомерном пространстве, определяемом разнообразием возможных механизмов осадконакопления. Наличие корреляционных связей между фациями приводит к тому, что на множество возможных фазовых траекторий, описывающих эволюцию обстановок осадконакопления, могут накладываться дополнительные ограничения. Это позволяет выделить в рассматриваемом пространстве многообразие реализуемых состояний геологической среды. Количественное описание фациальной модели может быть сведено к параметризации данного фациального многообразия набором «карт» отдельных его областей, на каждой из которых можно ввести некоторую систему координат. Задание правила перехода между этими системами координат позволяет объединить «карты» многообразия в «атлас». Такая абстрактная геометризация фациальной модели позволяет провести аналогию с теорией дифференциальных уравнений [Арнольд, 2012]. Каждому векторному полю, заданному на рассматриваемом многообразии (и отвечающему

определенным условиям гладкости), будет соответствовать некоторое векторное дифференциальное уравнение. Его решениям соответствует семейство фазовых траекторий, описывающее историю развития осадочного бассейна. Седиментационное моделирование позволяет на качественном уровне восстановить фазовый портрет системы, не выписывая в явной форме сами определяющие дифференциальные уравнения.

При переходе к количественному описанию ключевым является вопрос задания метрики модели. По мнению автора, подход к заданию меры близости фаций, используемой при решении задачи построения пространственных геологических моделей, должен быть непосредственно связан с анализом вероятностей переходов между фациями. В фиксированном стационарном состоянии седиментационной системы, отвечающем некоторой обстановке F_j , среди всех возможных фациальных переходов с большей вероятностью следует ожидать появления переходов к таким обстановкам F_j , которые характеризуются максимально близкими условиями к F_i (при условии равновесия внешних, «глобальных» факторов). И наоборот, чем ближе природа физических процессов, определяющих условия осадконакопления, тем выше вероятность соседства соответствующих фаций.

Различные исследователи неоднократно делали попытки применить данный принцип для количественного описания фациальных моделей [Miall, 1973; Harper 1984; Riegl, Purkis, 2009; Colombera et al., 2013], а полученные результаты подтверждают возможность использования этой идеи для введения метрики на фациальном многообразии. Более того, согласно хорошо известному принципу Вальтера–Головкинского [Одесский, 1992; Nurgaliev et al., 2007], вероятности перехода между фациями, оцениваемые по вертикальным разрезам, должны быть связаны с вероятностями латеральных фациальных переходов. Данный принцип открывает возможности для использования результатов статистического анализа фациальных переходов в разрезах скважин при построении фациальной модели в межскважинном пространстве.

В процессе геологической интерпретации диагностика фаций выполняется всегда с некоторой степенью неопределенности. Природа этой неопределенности связана не только с несовершенством применяемых моделей и погрешностями определения генезиса пород по их структурно-текстурным признакам. Сами принципы современного фациального анализа

подразумевают наличие некоторого естественного уровня флуктуаций условий осадконакопления, присущих каждой отдельно взятой фации. Эти флуктуации отражаются на внутренней изменчивости литологического состава (не приводя при этом к фациальному переходу), а также позволяют определять наличие генетической связи и «степень родства» фаций при выделении парагенетических ассоциаций. Без наличия таких связей фациальная модель характеризовалась бы дискретной топологией.

Естественно принять, что каждой фации F_i отвечает некоторое вероятностное распределение $P(L|F_i)$, заданное на пространстве литологических признаков $\{L\}$, или соответствующее ему распределение $P(x|F_i)$, где $\{X\}$ – пространство факторов, описывающих процессы осадконакопления. Тогда априорное распределение функции плотности вероятности $p(x)$ может быть представлено следующим образом:

$$p(x, f) = \sum_i P(x|F_i) \cdot P(F_i). \quad (3)$$

Здесь f – вектор априорных вероятностей набора фаций $f = \{P(F_i)\}$. Как было сказано выше, параметризация геологической модели при помощи вектора f является довольно неудачной, поскольку между его компонентами, как правило, существует тесная взаимосвязь.

С другой стороны, пусть известные геологические законы и принципы, а также любые другие сведения о закономерностях изменчивости фациального облика пород представлены априорной информацией I_a . Учет этой информации приводит к появлению ограничений на допустимые или наиболее вероятные значения факторов $\{x\}$ (или соответствующих им литологических признаков $\{L\}$), что задает некоторое распределение $p(x|I_a)$. Подстановка этого распределения в левую часть выражения (3), позволяет связать априорные ограничения и наблюдаемые геологические фации через вероятностное описание множества «допустимых» значений факторов $\{x\}$, которое контролируют процессы осадконакопления:

$$p(x|I_a) = \sum_i P(x|F_i) \cdot P(F_i). \quad (4)$$

Другими словами, привлечение априорной информации I_a позволяет выделить среди всевозможных взаимоотношений факторов $\{x\}$ допустимые с точки зрения априорных геологических представлений состояния среды. А представление (4) подсказывает, что данные априорные ограничения могут быть формально сведены

к заданию распределений $P(x|F_i)$ и набора правил, описывающих возможные комбинации априорных вероятностей фаций $P(F_i)$. В то же время, избыточность описания априорной информации I_a набором вероятностей фаций $P(F_i)$ наталкивает на мысль о возможности построения более эффективной параметризации модели, например, за счет факторизации множества, описываемого выражением (4).

В большинстве практических ситуаций любые две генетически связанные фации могут формировать непрерывный фациальный ряд. Под генетической связанностью здесь подразумевается тот факт, что данные фации формировались под действием общего набора процессов осадконакопления. Различия между фациями заключаются лишь в относительном вкладе этих процессов. То есть, для некоторых двух генетически связанных фаций F_s и F_p области значений параметров $\{x\}$, на которых функции плотности вероятности $P(x|F_s)$ и $P(x|F_p)$ строго положительны, характеризуются непустым пересечением. Это означает, что в условиях, отвечающих точкам из этого пересечения, существует вероятность появления обеих фаций. Следовательно, и фациальный переход возможен только в точках данной области пространства седиментационных факторов $\{X\}$.

Тогда одним из возможных вариантов параметризации фациальной модели является разбиение всей совокупности фаций на подмножества генетически связанных фаций (парагенезов) и описание каждого такого подмножества набором элементов некоторого параметрического семейства распределений:

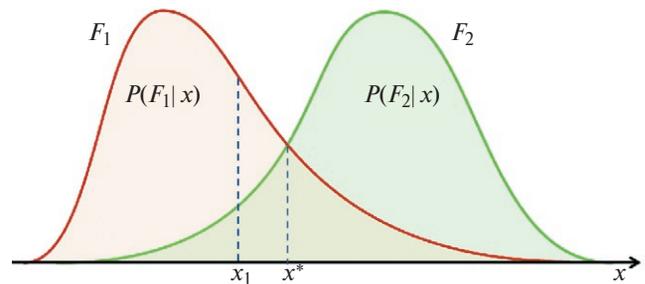
$$P(x|F_s) \leftrightarrow p(x, \theta_s). \quad (5)$$

Параметризация (5) означает переход от $\{X\}$ в двойственное пространство $\{\theta\}$, каждая точка которого отвечает некоторому распределению вероятностей в пространствах $\{L\}$ или $\{X\}$. А вектор параметров θ_s играет роль «координат» соответствующих фаций в данном пространстве. Такой подход позволяет посмотреть на рассматриваемую проблему с геометро-статистической точки зрения [Морозова, Ченцов, 1991; Amari, Nagaoka, 2000]. История развития осадочного бассейна будет описываться при этом набором параметрически заданных кривых $\theta(t)$. Изменениям состояния осадочной системы соответствуют касательные вектора к данным кривым $\partial_t \theta(t)$. Множеству возможных направлений фациальных переходов в каждой фиксированной точке фациального многообразия отвечает гиперплоскость: касательное пространство, базисом в котором служит линейно-независимая

система таких векторов. Размерность касательного пространства определяет размерность фациального многообразия. Естественной метрикой для такой модели является информационная метрика Фишера [Amari, Nagaoka, 2000; Морозова, Ченцов, 1991]. Эта метрика индуцирует на многообразии распределений риманову геометрию: подмножество (5) может быть описано системой криволинейных координат, а роль метрического тензора играет при этом тензор Фишера.

Таким образом, топология создаваемой параметрической фациальной модели определяется размерностью пространства параметров $\{\theta\}$, а метрика – «информационной близостью» фаций. Однако основной сложностью при оценке свойств распределений (5) на практике является отсутствие параметризации пространств $\{X\}$ и $\{L\}$. С другой стороны, это дает определенную свободу действий при выборе семейства распределений, на которое выполняется проекция фациальной модели (одним из существенных преимуществ использования метрики Фишера является ее инвариантность к преобразованиям координат исходного пространства $\{X\}$). Если по набору каких-либо статистических показателей, полученных в процессе анализа геологической информации, удастся количественно охарактеризовать меру различия между фациями, то параметризация модели может быть выполнена путем «проекции» фаций на любое параметрическое семейство вероятностных распределений, в котором удастся реализовать полученные метрические соотношения. То есть, «расстояния» между образами фаций в параметрическом семействе должны соответствовать оцененной по результатам анализа геологической информации мере различия между фациями. Как определить эту меру различия?

Вообще говоря, количественная характеристика степени подобия/отличия распределений вероятностей друг от друга может быть выполнена разными способами [Rao, 1987]. Применительно к рассматриваемой задаче фациального анализа автору представляется оправданным подход, основанный на использовании дивергенции Чернова [Chernoff, 1952; Nielsen, 2013]. В данном подходе степень близости фаций определяется тем, насколько велика вероятность ошибочной диагностики одной фации вместо другой. Эта мера оказывается связана с вероятностью фациального перехода (соседства). Поясним это на следующем примере. Рассмотрим две генетически связанные фации F_1 и F_2 и соответствующие им функции распределения $p(x|F_1)$ и $p(x|F_2)$. В процессе фациального анализа при условии наблюдения признаков горных пород,



Ошибка классификации в точке x_1 :

$$P_{err}(x_1) = P(F_2|x_1) = \frac{p(x_1|F_2) \cdot P(F_2)}{P(x_1)}$$

Вероятность ошибки классификации:

$$P_{err}(F_1, F_2) = P(F_2) \int_{-\infty}^{x^*} p(x|F_2) dx + P(F_1) \int_{x^*}^{+\infty} p(x|F_1) dx$$

Рис. 1. Связь фациальных переходов с задачей классификации условий осадконакопления. X -параметр, характеризующий условия осадконакопления. Фациям F_1 и F_2 отвечают свои распределения вероятностей $P(F_1|x)$ и $P(F_2|x)$. В точке x^* вероятность появления фаций одинакова, что соответствует условиям максимальной вероятности фациального перехода между F_1 и F_2 . Полная величина перекрытия между соответствующими функциями распределения, определяющей вероятность ошибки классификации.

отвечающих некоторым обстановкам x_1 , осуществляется диагностика той фации, вероятность появления которой в данных условиях максимальна (рис. 1). В условиях x^* , где вероятности двух фаций равны друг другу ($P(F_1|x^*) = P(F_2|x^*)$), вероятность диагностики границы между фациями максимальна (здесь и далее, если не оговорено обратное, мы будем отождествлять понятия фациального перехода и фациального соседства). Однако в точках, отличных от x^* , также существует ненулевая вероятность присутствия фациального перехода – эта вероятность равна вероятности присутствия в рассматриваемых условиях фации, отличной от диагностированной фации. То есть если на заданном множестве условий $\{X\}$ возможно присутствие двух фаций, описываемых соответствующими распределениями, то априорная вероятность соседства фаций формально равна вероятности ошибочной классификации точек $\{X\}$:

$$P_{err}(F_1, F_2) = \int_X P(\text{Error} | x) p(x) dx = \int_X \min\{P(F_1|x), P(F_2|x)\} \cdot p(x) dx. \quad (6)$$

В качестве меры сходства функций плотности вероятностей, основанной на оценке

сверху вероятности ошибки классификации, может быть использован коэффициент Чернова [Chernoff, 1952; Nielsen, 2013]:

$$c_{\alpha}^*(s:p) = \min_{\alpha \in (0,1)} \int_X p^{\alpha}(x|F_s) p^{1-\alpha}(x|F_p) dx. \quad (7)$$

Это следует из того, что для любого $0 < \alpha < 1$ ошибка классификации двух фаций F_s и F_p оценивается сверху выражением [Nielsen, 2013]:

$$Err(F_s, F_p) \leq P(F_s)^{\alpha} P(F_p)^{1-\alpha} \int_X p^{\alpha}(x|F_s) \times p^{1-\alpha}(x|F_p) dx. \quad (8)$$

Коэффициент Чернова, получаемый при выборе оптимального α , позволяет получить наилучшую оценку данного вида.

В качестве меры различия двух распределений используется дивергенция Чернова первого типа (или информация по Чернову) [Nielsen, 2013]:

$$DC(s:p) = -\ln [c_{\alpha}^*(s:p)]. \quad (9)$$

Эта характеристика тесно связана с дивергенцией Кульбака–Лейблера (которая, в свою очередь, связана с метрикой Фишера), однако при этом является симметричной [Nielsen, 2011]. Величина оптимального значения коэффициента α^* в выражениях (7) и (9) зависит от свойств сравниваемых распределений. Если они принадлежат одному семейству и характеризуются близкими значениями дисперсии, то следует ожидать, что значение α будет близко к 0.5. Можно предположить, что данное условие будет приблизительно выполняться для такого набора фаций, элементы которого характеризуют одинаковые уровни изменчивости (неопределенности) условий осадконакопления. При значении α^* равном 0.5, коэффициент Чернова становится равным коэффициенту Бхаттачаррия [Bhattacharyya, 1943]:

$$BC(s,p) = \int_X \sqrt{p_s(x) p_p(x)} dx. \quad (10)$$

На практике вероятность соседства между фациями может быть оценена путем анализа числа переходов между фациями, наблюдаемыми в разрезах скважин. Обозначим вероятность фациального перехода между двумя фациями F_s и F_p при условии того, что одна из фаций является F_s (что можно интерпретировать, как вероятность появления фациального перехода $F_s \rightarrow F_p$ в обстановках осадконакопления, отвечающих

фации F_s), через $P(Tr_{sp}|F_s)$. Обозначим также через N_{sp} число наблюдаемых переходов между F_s и F_p , а через N_s – общее число переходов с участием фации F_s :

$$N_s = \sum_{k=1}^N N_{sk}.$$

Тогда вероятность фациального перехода между двумя фациями F_s и F_p при условиях, отвечающих фации F_s , может быть оценена следующим образом:

$$P(Tr_{sp}|F_s) = \frac{N_{sp}}{N_s}. \quad (11)$$

Исходя из общих соображений, можно предположить, что данная вероятность должна зависеть от априорной вероятности появления фации F_p в фациальном переходе, а также от степени генетической («внутренней») близости фаций F_s и F_p . С другой стороны, безусловная вероятность появления перехода между фациями F_s и F_p может быть выражена следующим образом:

$$P(Tr_{sp}) = P(Tr_{sp}|F_s) \cdot P_{tr}(F_s). \quad (12a)$$

Здесь $P_{tr}(F_s)$ – априорная вероятность появления фациального перехода с участием фации F_s .

В то же время, поскольку мы не различаем фациальные переходы по их направлению, вероятность появления перехода (соседства) между теми же фациями F_s и F_p может быть оценена через меру множества фациальных переходов с обязательным участием фации F_p :

$$P(Tr_{sp}) = P(Tr_{sp}|F_p) \cdot P_{tr}(F_p). \quad (12б)$$

Выражения (12a), (12б) дают представление вероятности фациальных переходов в виде произведения двух факторов: «внешнего», определяющегося априорными вероятностями появления фациальных переходов, и «внутреннего», связанного с генетической близостью фаций. С другой стороны, подобная интерпретация может быть применена и к выражению для меры сходства фаций, основанной на коэффициенте Чернова (7). Выберем некоторое $0 < \alpha < 1$ и, используя (12a), (12б), запишем вероятность фациального перехода следующим образом:

$$P(Tr_{sp}) = P_{tr}(F_s)^{\alpha} P_{tr}(F_p)^{1-\alpha} \times P(Tr_{sp}|F_s)^{\alpha} \cdot P(Tr_{sp}|F_p)^{1-\alpha}. \quad (13)$$

Выделим из (13) множители, не связанные с «внешними» факторами, контролирующими априорные вероятности появления переходов с участием рассматриваемых фаций. Принимая $\alpha = 0.5$ и учитывая (11), получаем выражение для коэффициента, который назовем **коэффициентом сходства фаций** по переходам:

$$C_{sp} = \sqrt{P(Tr_{sp} | F_s) \cdot P(Tr_{sp} | F_p)} = \frac{N_{sp}}{\sqrt{N_s N_p}}. \quad (14)$$

Исходя из приведенных выше рассуждений, при условии наличия представительной выборки фациальных переходов, данная величина может использоваться в качестве количественной меры «внутреннего» сходства фаций.

Однако важно отметить, что вероятности $P_{tr}(F_s)$ были определены на множестве событий, не включающем события отсутствия фациального перехода. Поэтому прямое использование выражения (14) в качестве коэффициента Чернова не является строго обоснованным – необходимо выполнить его перенормировку. Обозначим через $P(s:p)$ вероятность осуществления перехода от фации F_s к фации F_p (при условии нахождения среды в состоянии F_s), а через $P(s:s)$ – вероятность того, что среда останется в том же состоянии F_s (фациальный переход не реализуется). Очевидно, что

$$P(s:s) = 1 - \sum_{p \neq s} P(s:p), \quad (15)$$

а связь оценки $P(s:p)$ с (11) дается выражением:

$$P(Tr_{sp} | F_s) = \frac{P(s:p)}{1 - P(s:s)}. \quad (16)$$

Вероятность $P_{tr}(F_s)$ может быть оценена суммированием вероятностей переходов $P(s:p)$ по всем F_p , отличным от F_s , умноженная на вероятность появления фации F_s . При этом необходимо также выполнить нормировку, чтобы сохранить условие равенства единице суммы $P_{tr}(F_s)$. С учетом (15), это дает:

$$\begin{aligned} P_{tr}(F_s) &= \frac{1}{Z_{tr}} P(F_s) \cdot \sum_{p \neq s} P(s:p) = \\ &= \frac{1}{Z_{tr}} P(F_s) \cdot [1 - P(s:s)]. \end{aligned} \quad (17)$$

Нормирующий множитель рассчитывается следующим образом:

$$Z_{tr} = \sum_s P(F_s) [1 - P(s:s)] = 1 - \sum_s P(F_s) P(s:s). \quad (18)$$

Подставляя (17) в (13), получаем для априорной вероятности фациального перехода:

$$\begin{aligned} P(Tr_{sp}) &= \frac{1}{Z_{tr}} P(F_s)^\alpha P(F_p)^{1-\alpha} \times \\ &\times [1 - P(s:s)]^\alpha [1 - P(p:p)]^{1-\alpha} \times \\ &\times P(Tr_{sp} | F_s)^\alpha P(Tr_{sp} | F_p)^{1-\alpha}. \end{aligned} \quad (19)$$

Сопоставляя (19) и (13) с (7) и (8), получаем, что коэффициент Чернова может быть оценен через статистики фациальных переходов следующим образом:

$$c_{\alpha^*}(s:p) = B_{\alpha^*}(s,p) \cdot \frac{N_{sp}}{N_s^{\alpha^*} N_p^{1-\alpha^*}}. \quad (20)$$

Множитель B_{α^*} зависит от априорных вероятностей появления фаций и фациальных переходов с их участием:

$$\begin{aligned} B_{\alpha^*}(s,p) &= \left(\frac{P_{tr}(F_s)}{P(F_s)} \right)^{\alpha^*} \left(\frac{P_{tr}(F_p)}{P(F_p)} \right)^{1-\alpha^*} = \\ &= \frac{1}{Z_{tr}} (1 - P(s:s))^{\alpha^*} (1 - P(p:p))^{1-\alpha^*}. \end{aligned} \quad (21)$$

Величина оптимального значения коэффициента α^* в (20) и (21) определяется характером вероятностных распределений анализируемых фаций. Как уже говорилось, в важном для нас частном случае приблизительно одинакового для всех фаций одного парагенеза уровня неопределенности условий осадконакопления, можно ожидать, что значение этого коэффициента будет близко к 0.5, что приводит выражение (20) к виду:

$$c_{0.5}(s:p) = B_{0.5}(s,p) \cdot \frac{N_{sp}}{\sqrt{N_s N_p}}. \quad (22)$$

При $s=p$ для данного коэффициента, по определению, принимается единичное значение.

Выражение (22) дает ключ к способу оценки меры близости фаций, основанный на статистиках фациальных переходов. Если выбран конкретный вид семейства распределений (5), то можно попытаться получить явный вид зависимости между дивергенцией Чернова, оцениваемой при помощи (22), и «расстоянием», определяемым информационной метрикой Фишера.

Рассмотрим далее пример применения данного подхода, основанного на использовании наиболее часто встречающегося в приложениях семейства распределений.

ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ НАБОРА
ГЕНЕТИЧЕСКИ СВЯЗАННЫХ ФАЦИЙ

Одним из наиболее хорошо изученных теоретически и широко используемых на практике является экспоненциальное семейство распределений вероятности. Его элементы имеют вид [Nielsen, Garcia, 2011]:

$$p(x, \theta) = \exp[t(x) \cdot \theta - F(\theta) + k(x)]. \quad (23)$$

Здесь θ – вектор канонических параметров экспоненциального распределения, а $t(x)$ – вектор достаточных статистик. Функция $F(\theta)$, характеризующая семейство, – строго выпуклая. В частности, данному представлению удовлетворяет семейство многомерных нормальных распределений фиксированной размерности. Система канонических параметров $\{\theta\}$ (называемых также e -аффинными координатами) может быть задана, например, путем фиксации $M + 1$ вершин M -мерного симплекса (здесь M – размерность пространства параметров $\{\theta\}$).

Семейство распределений (23) также допускает двойственную к $\{\theta\}$ параметризацию вектором m -аффинных координат $\{\eta\}$ [Ченцов, 1966; Nielsen, Garcia, 2011]:

$$\eta_i = E[t_i(x)] = \frac{\partial}{\partial \theta_i} F(\theta). \quad (24)$$

Здесь $E[t_i(x)]$ математическое ожидание i -й достаточной статистики. При преобразовании (24), функция $F(\theta)$ переходит в некоторую функцию $G(\eta)$. Данные функции связаны друг с другом преобразованием Лежандра:

$$G(\eta) = \sup_{\theta} \{\theta \cdot \eta - F(\theta)\}. \quad (25)$$

Несложно показать, что функция $G(\eta)$ равна энтропии, взятой с обратным знаком:

$$G(\eta) = E[\log p(x, \eta)]. \quad (26)$$

Переход от параметров $\{\eta\}$ к параметрам $\{\theta\}$ осуществляется следующим образом:

$$\theta_i = \frac{\partial}{\partial \eta_i} G(\eta). \quad (27)$$

Важно также отметить следующее выражение для матрицы вторых моментов (информационной матрицы Фишера) [Nielsen, Garcia, 2011]:

$$E[(t(x) - \eta)^T (t(x) - \eta)] = \nabla^2 F(\theta). \quad (28)$$

Вершинам базисного симплекса в системе координат $\{\theta\}$ отвечают некоторые точки в системе координат $\{\eta\}$. При этом выбор базисных

обстановок в системе координат $\{\eta\}$ может быть подкреплен геологической интерпретацией, поскольку данное пространство, в силу (24), может быть отождествлено с пространством достаточных статистик $\{t(x)\}$. Если базисные обстановки заданы, то любое распределение семейства, отвечающее какой-либо фации рассматриваемого парагенеза, может быть представлено в виде их аффинной комбинации. То есть, например, θ – «координаты» произвольной фации F_s из рассматриваемого подмножества могут быть выражены в виде:

$$\theta_s = \sum_{i=1}^{M+1} w_{si} \theta_i, \quad (29)$$

$$\sum_{i=1}^{M+1} w_{si} = 1.$$

Здесь θ_i – вектор канонических координат распределений i -й базисной обстановки, а w_{si} – соответствующие им веса.

Для общего случая семейства (23), аффинные геодезические (кривые, задаваемые параметрическими уравнениями 1-й степени $\theta(t) = a \cdot t + b$ и $\eta(t) = c \cdot t + d$, где a, b, c, d – постоянные векторы) не переходят друг в друга при преобразованиях (24) и (26). Более того, в общем случае данные кривые также не являются геодезическими в метрическом смысле. Поэтому аффинная комбинация m -координат с весами w_{si} в случае экспоненциального семейства общего вида не будет соответствовать распределению, определяемому значением θ_s из (29) с теми же коэффициентами.

Однако, если рассматриваемые фации характеризуют условия осадконакопления с примерно одинаковым уровнем неопределенности, то естественным будет выбор семейства распределений, на которое выполняется проекция области фациального многообразия, характеризующееся постоянной матрицей вторых моментов. Основываясь на (28), применение этого предположения к экспоненциальному семейству дает распределения с функцией $F(\theta)$, представленной в виде квадратичной формы. То есть описание генетически связанных обстановок осадконакопления выполняется параметрическим семейством многомерных нормальных распределений $N(\eta, \Sigma)$ с постоянной ковариационной матрицей Σ . Поскольку все производные функции $F()$ выше второго порядка равны 0, получаемая геометрия семейства распределений является плоской: метрический тензор $\{g_{ij}\}$ (информационная матрица Фишера) не зависит от «координат» $\{\theta\}$:

$$\begin{aligned}
 I(\theta) &= \int \frac{\partial \log(p(x, \theta))}{\partial \theta_i} \frac{\partial \log(p(x, \theta))}{\partial \theta_j} p(x, \theta) dx = \\
 &= \frac{\partial^2 F(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = \{g_{ij}\} = \text{const.}
 \end{aligned}
 \tag{30}$$

«Расстояние» между распределениями такого семейства определяется расстоянием Махаланобиса [Mahalanobis, 1936]. Заменой координат можно привести эту матрицу к диагональному виду. Более того, поскольку «информационное расстояние», определяемое тензором Фишера, инвариантно относительно гладких преобразований «координат» $\{\theta\}$, ковариационная матрица (28) без потери общности решаемой задачи может быть приведена к изотропному виду, при котором дисперсии по всем направлениям одинаковы и равны 1. В результате такой замены, функция $F(\theta)$ преобразуется к простому виду:

$$F(\theta) = \frac{1}{2} \theta^T \theta + \frac{d}{2} \ln(2\pi). \tag{31}$$

Здесь d – размерность координатного пространства.

Более того, в данном, частном случае, оказывается, что параметры θ в точности равны параметрам η . Метрический тензор равен единичному тензору, то есть пространства параметров $\{\theta\}$ и $\{\eta\}$ наделены обычной евклидовой геометрией.

С другой стороны, подставляя (31) в (7), получаем выражение для коэффициента Чернова:

$$c_\alpha(\theta_s : \theta_p) = \exp[-J_F^\alpha(\theta_s : \theta_p)], \tag{32}$$

где J_F^α – α -дивергенция Дженсена [Nielsen, 2013]:

$$\begin{aligned}
 J_F^\alpha(\theta_s : \theta_p) &= \alpha \cdot F(\theta_s) + (1 - \alpha) \times \\
 &\times F(\theta_p) - F(\alpha \cdot \theta_s + (1 - \alpha) \cdot \theta_p).
 \end{aligned}
 \tag{33}$$

Для нормальных распределений с одинаковой дисперсией значение коэффициента α^* в выражении (7) равно 0.5, что приводит нас к коэффициенту Бхаттачаррия (10). В результате этого, выражение (33) переходит в:

$$\begin{aligned}
 J_F^{0.5}(\theta_s : \theta_p) &= \frac{\theta_s^T \theta_s + \theta_p^T \theta_p}{4} - \frac{(\theta_s + \theta_p)^T (\theta_s + \theta_p)}{8} = \\
 &= \frac{(\theta_s - \theta_p)^T (\theta_s - \theta_p)}{8}.
 \end{aligned}
 \tag{34}$$

То есть, дивергенция Чернова (9) оказывается пропорциональна квадрату евклидова «расстояния» между фациями в пространстве параметров $\{\theta\}$ или $\{\eta\}$.

Использование выражений (34) и (32) позволяет связать вероятности переходов между фациями одного парагенеза с «информационным расстояниями» между ними в пространстве канонических параметров $\{\theta\}$. Поскольку базисные обстановки принадлежат тому же пространству, что и исходный набор фаций, то способ задания меры близости между ними (а значит и метрики пространства параметров) должен быть основан на том же принципе: расстояние между базисными обстановками в пространстве параметров $\{\theta\}$ должно определяться вероятностью соседства между ними. С другой стороны, если расстояния между базисными обстановками зафиксированы, априорные вероятности переходов между фациями могут быть рассчитаны из координат базисных литотипов и выражений (29). Но тогда, если в процессе геологических изысканий удалось оценить коэффициенты $\{w_{si}\}$ и получить представительные статистики фациальных переходов, можно попытаться решить обратную задачу по оценке «расстояний» между базисными обстановками.

Описание геологической модели при помощи набора фаций вынуждает нас оперировать дискретным набором состояний среды. При этом обычно предполагается, что каждая фация описывает стационарное (в смысле динамического равновесия процессов осадконакопления) состояние. В рамках заданного уровня неопределенности седиментационной модели характер смены базисных обстановок в пределах фации предполагается случайным (однако устойчивые последовательности смены обстановок осадконакопления могут присутствовать на более детальном уровне рассмотрения). Случайный характер флуктуаций подразумевает, что события появления диагностических признаков базисных обстановок в породе, отвечающих некоторой фации F_s , принимаются независимыми. Благодаря совпадению e -аффинных и m -аффинных координат, естественно принять, что вероятности появления диагностических признаков, отвечающих i -й базисной обстановке, равны весам $\{w_{si}\}$ из представления (29). Поэтому, если наблюдаемый набор признаков горных пород был продиагностирован как некоторая фация F_s , то данному состоянию будет соответствовать матрица вероятностей переходов между базисными обстановками, составленная из элементов $w_{si} w_{sj}$. Кроме того,

из-за генетической связности фаций, из данного состояния существует вероятность перехода к другому состоянию F_p . Каждому фациальному переходу $F_s \rightarrow F_p$ будет соответствовать матрица вероятностей переходов между базисными обстановками $[w_{si}w_{pj}]$. Поэтому заданному вектору априорных вероятностей появления фаций $P(F_s)$ соответствует матрица вероятности переходов между базисными обстановками, составленная из следующих элементов:

$$B_{ij} = \sum_{s=1}^N P(F_s) \cdot \left[w_{si}w_{sj} \cdot P(s:s) + \sum_{p \neq s} P(s:p) w_{si}w_{pj} \right]. \quad (35)$$

Используя выражение (16), получаем:

$$B_{ij} = \sum_{s=1}^N P(F_s) \times \left[P(s:s) \cdot w_{si}w_{sj} + (1 - P(s:s)) \sum_{p \neq s} P(Tr_{sp} | F_s) w_{si}w_{pj} \right]. \quad (36)$$

Следовательно, если определены априорные вероятности $P(F_s)$ и $P(s:s)$, то для заданных весовых коэффициентов $\{w_{si}\}$ и оцененных по статистикам фациальных переходов вероятностей $P(Tr_{sp} | F_s)$, выражение (36) дает оценку априорных вероятностей перехода между базисными обстановками. С другой стороны, априорные вероятности $P(s:s)$ должны зависеть от метрических свойств фациального многообразия, которые задаются искомыми величинами B_{ij} (чем сильнее перекрываются распределения $p(x|F_s)$, тем выше энтропия модели и меньше вероятность $P(s:s)$). В связи с этим, несмотря на привлекательность выражения (36), его прямое использование на практике для задания метрики модели крайне затруднено. Пожалуй, единственным исключением является тот случай, когда имеющиеся результаты наблюдений позволяют оценить величины $P(s:s)$ и $P(F_s)$. Например, иногда это может оказаться возможным при параметризации литофаций, распознанных в непрерывных колонках керна. Как правило, исследования керна предваряют построение фациальной модели, основанной на ГИС-фациях, и позволяют сформировать априорные представления о базисных обстановках осадконакопления. Поэтому на этапе такого первичного анализа, может оказаться удобным сразу работать с базисным набором литофаций. Коэффициенты w_{si} в этом случае будут представлены символами Кронекера, а выражение (36), используя (17), преобразуется к виду

(12) для несовпадающих индексов i и j . Поэтому, если каким-то образом удалось оценить вероятности $P(s:s)$, то оценка квадратов «расстояния» между литотипами выполняются напрямую с использованием выражений (9) и (22). Отметим, что часто при этом в практических приложениях численное значение коэффициента $B_{0,5}(s,p)$ в (22) оказывается близким к единице. Это позволяет в ряде случаев использовать для оценки меры близости фаций при задании метрики модели непосредственно коэффициент сходства (14) вместо (22).

Альтернативный подход к заданию метрики модели может быть основан на сужении пространства анализируемых событий, по которым вычисляются статистики, до наблюдаемых в разрезах скважин фациальных переходов. В этом случае вероятность появления перехода между i -м и j -м базисными литотипами на множестве фациальных границ может быть представлена следующим образом:

$$B_{ij} = \sum_{s,p>s} P(Tr_{ij} | F_s \leftrightarrow F_p) \cdot P(F_s \leftrightarrow F_p). \quad (37)$$

Здесь $P(Tr_{ij} | F_s \leftrightarrow F_p)$ – вероятность перехода (соседства) между базисными обстановками i и j на границе перехода между фациями F_s и F_p ; $P(F_s \leftrightarrow F_p)$ – вероятность фациального перехода (соседства) между фациями F_s и F_p . Первая, как было сказано выше, определяется элементами матрицы $[w_{si}w_{pj}]$, симметричными относительно главной диагонали:

$$P(Tr_{ij} | F_s \leftrightarrow F_p) = w_{si}w_{pj} + w_{pi}w_{sj}. \quad (38)$$

Оценка вероятности $P(F_s \leftrightarrow F_p)$ с точностью до нормирующего множителя Z_f может быть основана на выражениях (11) и (13), что для $\alpha = 0.5$ дает:

$$P(F_s \leftrightarrow F_p) = \frac{1}{Z_f} \sqrt{P_r(F_s) \cdot P_r(F_p)} \frac{N_{sp}}{\sqrt{N_s N_p}}. \quad (39)$$

Если принять также, что вся доступная априорная информация о вероятностях появления фациальных переходов с участием определенной фации заключена в статистиках фациальных переходов, то все вероятности $P_r(F_s)$, участвующие в формировании выражений (39), могут быть приняты равными $1/N$. Нормирующий множитель Z_f выбирается таким образом, чтобы сумма вероятностей по всем неупорядоченным парам фаций $F_s - F_p$ была равна 1:

$$Z_f = \sum_{s,p>s} \frac{N_{sp}}{N \sqrt{N_s N_p}}. \quad (40)$$

Подставляя (39) и (38) в (37), получаем:

$$B_{ij} = \frac{1}{Z_f \cdot N} \cdot \sum_{s,p>s} \frac{N_{sp}}{\sqrt{N_s N_p}} (w_{si} w_{pj} + w_{pi} w_{sj}). \quad (41)$$

Основываясь на данных величинах, оценка вероятности появления перехода с участием i -й базисной обстановки равна:

$$P_i = \sum_j B_{ij}. \quad (42)$$

Тогда величины $Z_{ij} = B_{ij} / (P_i - B_{ii})$ будут характеризовать априорные вероятности появления перехода между i -м и j -м базисными литотипами среди всех переходов с участием i -го базисного литотипа (здесь из пространства событий исключены переходы $i-i$). Используя логику перехода от (12) к (22), для оценки коэффициента Чернова, отвечающего двум различным базисным обстановкам i и j , получаем следующее выражение:

$$C_{ij} = \frac{1}{1 - \sum_k B_{kk}} \sqrt{\left(1 - \frac{B_{ii}}{P_i}\right) \left(1 - \frac{B_{jj}}{P_j}\right)} \times \sqrt{Z_{ij} Z_{ji}} = \frac{1}{1 - \sum_k B_{kk}} \frac{B_{ij}}{\sqrt{P_i P_j}}. \quad (43)$$

При получении данного выражения было использовано предположение о равенстве априорных вероятностей появления базисных литотипов величинам (42), а в качестве аналога $P(s:s)$ из (21) выступали отношения B_{ii}/P_i .

Как и при использовании (22), при совпадении индексов i и j , значение C_{ii} принимается равным 1.

Квадрат «расстояния» между базисными литотипами, в соответствии с (32) и (34), будет пропорционален минус логарифму от (43), что также находится в соответствии с (9). Коэффициент пропорциональности равен $1/8$.

Рассчитывая значения дивергенции Чернова для всех пар ($i-j$), получаем матрицу, на количественном уровне характеризующую различия между базисными литотипами в некотором параметрическом пространстве. Наличие такой матрицы позволяет выполнять параметризацию совокупности генетически связанных фаций следующим образом:

1. Выбор набора базисных обстановок осадконакопления. Число $M+1$ базисных обстановок задает максимально возможную размерность пространства параметров M . Все элементы рассматриваемого подмножества фаций

определяются при этом как аффинная комбинация данных базисных обстановок.

2. Оценка меры близости между базисными обстановками, основываясь на анализе статистик фациальных переходов и заданных аффинных координатах фаций.

3. Задание системы прямоугольных координат, удовлетворяющей полученной на предыдущем этапе метрике модели. Расчет «координат» фаций рассматриваемого подмножества из «координат» базисных фаций.

Шаг (1) задает топологию модели и «аффинные координаты» элементов рассматриваемой совокупности фаций. Этап (2) определяет метрику модели.

Шаг (3) может быть выполнен с применением методов факторного анализа (например, метода Торгерсона [Torgerson, 1952; Дэйвисон, 1988]). Система координат при этом определяется с точностью до постоянных сдвигов и поворотов/отражений. Важным фактом является совпадение e - и m -параметризаций $\{\theta\}$ и $\{\eta\}$ в рамках рассмотренного подхода. Благодаря тому, что пространство параметров $\{\eta\}$ связано с факторами $\{X\}$, контролирующими изменчивость механизмов седиментации, удачный выбор направления осей полученной системы координат позволяет придать им в ряде случаев ясную геологическую интерпретацию. Условие прямоугольности координат выражается в том, что метрический тензор в выбранной системе имеет диагональный вид: скалярные произведения векторов, направленных вдоль осей, равны нулю. Это означает отсутствие корреляции между соответствующими факторами. Благодаря этому интерполяция данных параметров в межскважинное пространство может выполняться независимо друг от друга при построении сеточных моделей.

Шаг (1) подразумевает представление каждой фации как суперпозиции нескольких базисных обстановок осадконакопления в виде (29). Такое представление выполняется на основе априорных геологических знаний и позволяет учесть информацию об ограниченном количестве механизмов, контролирующих разнообразие фаций. В качестве базисных могут быть выбраны крайние элементы наблюдаемых или предполагаемых фациальных рядов. В этом случае каждая точка фациального ряда получается путем смешивания состояний среды, отвечающих его крайним элементам. Либо вершины базисного симплекса могут быть получены путем экстраполяции нескольких фациальных рядов до получения «чистых» состояний в точке пересечения

их «продолжений». Практические способы задания весов $\{w_{si}\}$ в (29) могут быть основаны на двух подходах.

Во-первых, веса w_{ij} могут назначаться, исходя из эмпирических и эвристических соображений о природе действовавших геологических процессов. Конкретные значения w_{ij} задаются на основе экспертных оценок, основанных на имеющемся опыте работы с рассматриваемыми обстановками осадконакопления. Например, для таких оценок могут привлекаться результаты седиментологических исследований, базирующихся на материалах бурения на прилегающих территориях. Данный подход имеет преимущества на площадях с небольшим числом скважин, охарактеризованных керном, либо для непредставительных выборок керна.

Второй метод основан на статистическом анализе фаций, определенных по керну. Пусть при таком анализе была разработана система фаций $\{J_q\}$, которая, как правило, не совпадает с набором каротажных фаций $\{F_i\}$. Для выполнения корректной увязки результатов этих исследований достаточно выполнить оценку весов $b_{qj} = P(g_j | J_q)$, обозначающих вероятность появления j -го базисного литотипа в q -й фации, диагностированной в керне (аналог весов w_{ij} для набора каротажных фаций, задающих вклад j -го базисного процесса). Эти величины оцениваются в процессе седиментологического анализа керна по комплексу структурно-текстурных показателей и других диагностических признаков процессов осадконакопления.

Кроме того, потребуются оценки вероятностей $P_{iq} = P(J_q | F_i)$ появления керновых фаций $\{J_q\}$ в обстановках, отвечающих каротажным фациям $\{F_i\}$. Данные параметры могут быть оценены по результатам статистического анализа фаций керн-ГИС.

После этого переход к коэффициентам w_{ij} выполняется следующим образом:

$$w_{ij} = P(g_j | F_i) = \sum_{q=1}^{N_J} P(g_j | J_q) \cdot P(J_q | F_i) = \sum_{q=1}^{N_J} P_{iq} b_{qj}. \quad (44)$$

Следует отметить, что в связи с наличием непосредственных диагностических признаков геологических процессов в керновом материале, определение коэффициентов $b_{qj} = P(g_j | J_q)$, как правило, выполняется с гораздо меньшей степенью неопределенности, чем непосредственное задание весов w_{ij} для каротажных фаций с помощью эвристического подхода. В связи с этим, по возможности, предпочтение при

определении весов w_{ij} следует отдавать методике, основанной на выражении (44). Некоторые сложности в реализации второго подхода могут быть связаны с тем, что выборка данных керн-ГИС часто является недостаточно представительной с точки зрения определения коэффициентов $P_{iq} = P(J_q | F_i)$. Это может являться причиной необходимости выполнения коррекции параметров P_{iq} либо w_{ij} на основе априорных геологических представлений.

СИНТЕТИЧЕСКИЙ ПРИМЕР

В качестве первой иллюстрации рассмотрим абстрактный синтетический пример, полученный посредством моделирования последовательностей литотипов при помощи цепей Маркова. Пусть разрезы скважин некоторого исследуемого участка представлены чередованием микрослоев, сложенных одним из трех базисных литотипов $\{L_1, L_2, L_3\}$. Для простоты рассмотрим сначала ситуацию с одной скважиной, в которой оказалось возможным выполнить полный статистический анализ переходов между этими литотипами. Пусть в первом случае появление литотипов в разрезе происходит под действием закономерно меняющихся внешних условий: на начальной стадии преобладают условия, отвечающие фациям L_1 и L_2 , а в конце — L_2 и L_3 (рис. 2а). Литотипы L_1 и L_3 гораздо реже соседствуют в разрезе между собой, чем с литотипом L_2 . Это означает, что между событиями появления литотипов L_1 и L_3 наблюдается обратная корреляция. Поскольку данный пример является синтетическим, для него оказывается возможным применить подход к заданию метрики модели, основанный непосредственно на выражении (22). Модель параметризуется двумя переменными. Рассчитывая матрицу дивергенций (22) и факторизуя ее (см. Приложение), получаем «координаты» (x_1, x_2) базисных литотипов в некотором пространстве «обобщенных геологических переменных». Точки, отвечающие базисным литотипам, образуют треугольник, показанный в правой части рис. 2а. Видно, что «расстояние» L_1-L_3 примерно в полтора раза превышает «расстояния» L_1-L_2 и L_2-L_3 .

Второй пример, представленный на рис. 2б, соответствует ситуации с другой направленностью седиментационного тренда. На начальной стадии накопления осадков (нижняя часть литологической колонки) отмечается преобладание условий седиментации, отвечающих литотипам L_1 и L_3 . По мере смещения вверх по разрезу увеличивается роль обстановок,

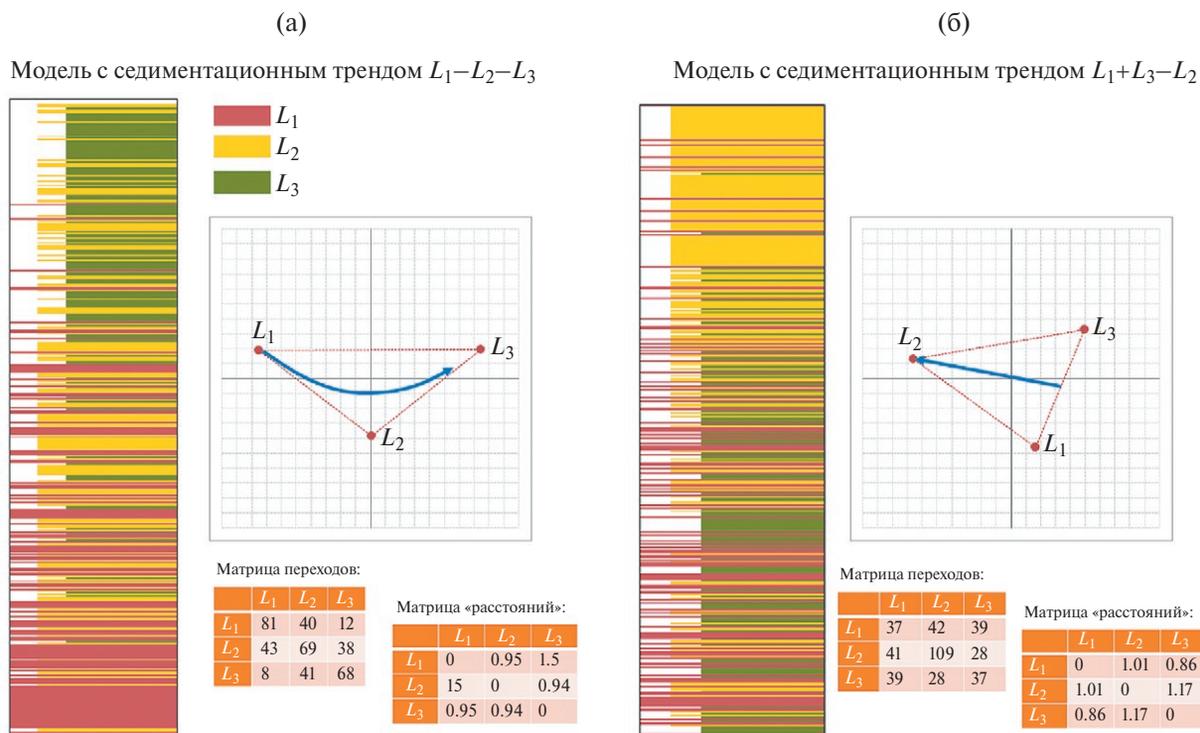


Рис. 2. Пример двух простых моделей разрезов, составленных из чередующихся слоев, представленных тремя литотипами $\{L_1, L_2, L_3\}$, и соответствующие им метрические модели, построенные с использованием выражения (20). Стрелками показано направление седиментационного тренда, отвечающего представленным разрезам.

соответствующих L_2 . Это отражается на статистиках фациальных переходов: вероятность соседства L_1-L_3 оказывается несколько выше, чем вероятность соседства этих литотипов с литотипом L_2 . Поэтому в получаемой метрической модели «расстояние» L_1-L_3 оказывается меньше, чем «расстояния» L_1-L_2 и L_2-L_3 . Более того, поскольку литотип L_2 «обособлен» от остальных двух, сложенные им пласты характеризуются в среднем большей толщиной, нежели пропластки литотипов L_1 и L_3 (за счет большей вероятности соседства L_1-L_1).

Приведенные примеры иллюстрируют одну важную особенность предлагаемого метода. Несмотря на то, что анализируемые последовательности не отвечают стационарному состоянию седиментационной системы, созданная модель неплохо соотносится с представлениями о степени сродства наблюдаемых фаций, которые могли бы быть получены, исходя из визуального анализа представленных разрезов. Например, на рис. 2а довольно легко идентифицировать факт разобщенности условий осадконакопления, отвечающих литотипам L_1 и L_3 : переход между этими двумя обстановками с большой вероятностью будет осуществляться через промежуточное состояние L_2 . Однако при этом построенная

модель не исключает возможности осуществления и непосредственного перехода L_1-L_3 , присваивая лишь небольшую вероятность данному событию. Получить подобный результат с достаточной степенью обоснованности было бы сложно, опираясь только на анализ толщин прослоев литологических разностей по разрезам скважин, в которых присутствуют явно выраженные седиментационные тренды.

Как уже отмечалось ранее, из-за того, что в практических ситуациях оценка величины нормировочного коэффициента $B_{0,5}(s:p)$ в (22) крайне затруднена, задание метрики модели предпочтительнее выполнять с использованием статистик фациальных переходов и априорных весов (29). Проиллюстрируем методику такой оценки на следующем примере. Пусть некоторый исследуемый пласт вскрыт двумя скважинами, в разрезах которых была диагностирована последовательность смены обстановок осадконакопления, представленная чередованием пяти фаций F_1-F_5 (см. рис. 3а). Пусть также диагностированные фации являются результатом композиции трех базисных обстановок, рассмотренных в предыдущем примере (рис. 3б), а веса базисных литотипов $\{w_{si}\}$, представленные в таблице на данном рисунке, были определены

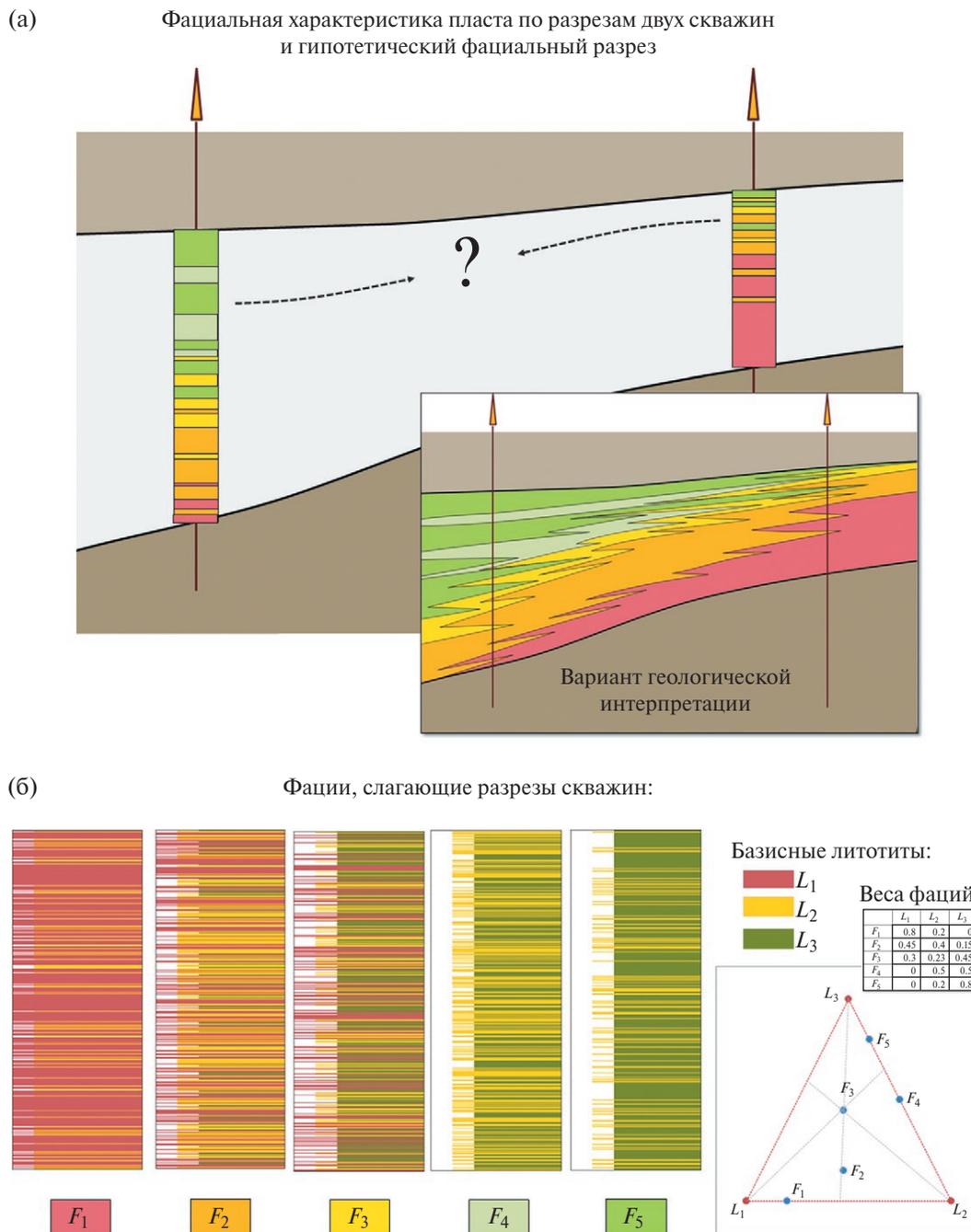


Рис. 3. Гипотетический пример фациальной характеристики некоторого пласта, полученной по разрезам двух скважин. Пять наблюдаемых фааций $\{F_1, \dots, F_5\}$ представлены аффинной комбинацией трех базисных литотипов L_1, L_2, L_3 .

по результатам анализа кернового материала. Данные веса задают аффинные координаты фааций, определяющие лишь относительное их положение внутри треугольника (симплекса), вершины которого отвечают базисным обстановкам седиментации.

В процессе геологической интерпретации, основанной на циклофациальном анализе и принципе Вальтера–Головкинского, может быть

получен предполагаемый геологический разрез межскважинного пространства, например такой, как показан в правом нижнем углу рис. За. Границы фациальных переходов на таких разрезах обычно рисуются геологом-интерпретатором, исходя из представлений качественного характера о направленности развития осадочного бассейна и присущей ему палеогеографической зональности на каждом стратиграфическом

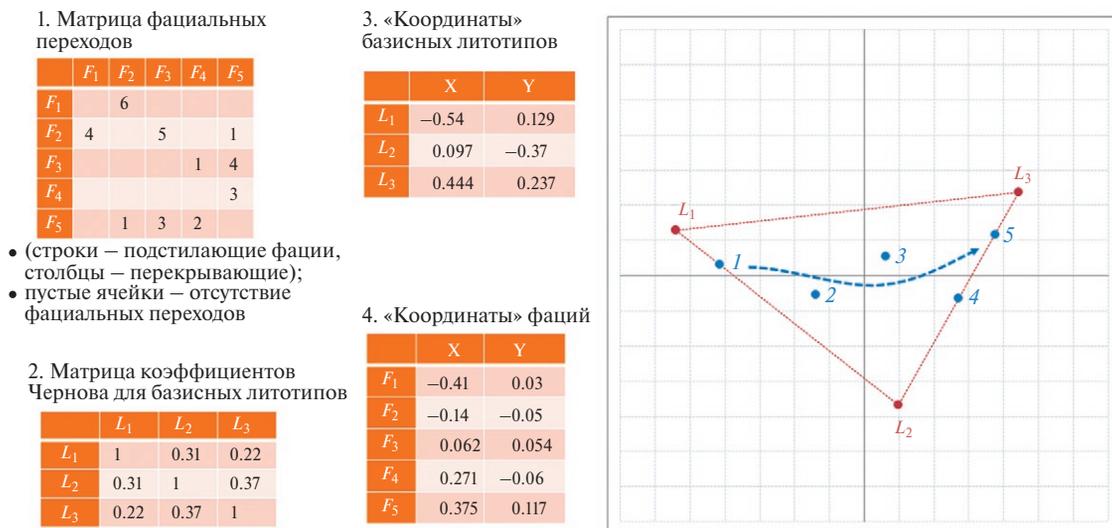


Рис. 4. Результат факторизации фациальной модели из гипотетического примера, показанного на рис. 3. Стрелкой показано направление седиментационного тренда.

уровне. Латеральные фациальные переходы при этом увязываются как с общим седиментационным трендом, определяемым по точкам скважин, так и с вертикальными последовательностями фашии в разрезах скважин. Метод, изложенный в настоящей работе, позволяет получить учитывающий данные принципы результат на основе формализованного подхода.

Сначала, используя статистики фациальных переходов и веса, представленные в таблице на рис. 3б (заданные в данном примере априорно), с использованием (41) рассчитывается матрица коэффициентов Чернова для базисных обстановок. Затем она пересчитывается в матрицу дивергенций Чернова, которая подвергается двойному центрированию и факторизации (см. Приложение). Результат данной процедуры показан на рис. 4. В отличие от диаграммы, приведенной на рис. 3б, здесь расстояния между точками на графике отражают вероятность возникновения перехода между соответствующими фашиями (больше расстояние – меньше вероятность).

В полученной модели разнообразие фашии описывается двумя переменными, при этом первый фактор (горизонтальная ось на графике рис. 4) значительно доминирует над вторым. Именно его изменение характеризует главную составляющую седиментационного тренда (от условий отвечающих фашии F_1 с преобладанием литотипа L_1 , к обстановкам, отвечающим фашиям F_4 и F_5). Второй фактор определяет менее значимые вариации обстановок осадконакопления. Например, отличия между фашиями

F_4 и F_5 главным образом кодируются именно второй «обобщенной координатой».

Необходимо оговориться, что в приведенных примерах при расчете матрицы различий не учитывался фактор $1/8$, присутствующий в выражении (32) (это обосновывается тем, что окончательные оценки вероятностей фашии инвариантны относительно процедуры поворота и сжатия/растяжения получаемой системы координат).

Следующим шагом после проведения факторизации фациальной модели является выполнение интерполяции значений «обобщенных геологических переменных», определенных вдоль стволов скважин, в межскважинное пространство. Поскольку эти переменные характеризуют состояние седиментационной системы, зная их, оказывается возможным для каждой точки среды оценить вероятность появления каждой фашии.

ПОСТРОЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ МОДЕЛИ

Так как получаемые при факторизации матрицы различий оси координат являются ортогональными, интерполяция значений каждого фактора может выполняться независимо от остальных. Это является существенным преимуществом такой параметризации геологической модели. Кроме того, во многих случаях полученным «обобщенным геологическим переменным» можно дать физическую интерпретацию и статистически связать их с некоторыми внешними атрибутами (такими, например, как палеоструктурный план или атрибуты

сейсмической записи). Подобные корреляционные зависимости могут быть использованы при интерполяции, что дополнительно помогает снизить уровень неопределенности получаемых моделей.

Затем, на основе созданной пространственной модели геологических факторов $\{x\}$ может быть выполнена оценка вероятности присутствия фаций $P(F_i|x)$ в каждой ячейке сеточной модели:

$$P(F_i|x) = \frac{p(x|F_i) \cdot P(F_i)}{p(x)} = \frac{p(x|F_i) \cdot P(F_i)}{\sum_k p(x|F_k) \cdot P(F_k)}. \quad (45)$$

Здесь распределения $p(x|F_i)$ характеризуют вероятность получения заданных значений обобщенных переменных $\{x\}$ в фиксированной ячейке модели для фации F_i . Данные распределения зависят от точности параметризации фациальной модели и погрешности интерполяции значений обобщенных геологических переменных в межскважинное пространство. Первая определяется величинами отброшенных в процессе факторизации пространства геологических факторов собственных значений. Оценка второй возможна, например, при использовании геостатистических алгоритмов типа кригинга.

Если дополнительная информация, позволяющая дать предпочтение какой-то из фаций набора $\{F_i\}$ и не учтенная в процессе параметризации, отсутствует, то априорные вероятности $P(F_i)$ в выражении (45) принимаются равными $1/N$. В этом случае выражение (45) редуцируется к простому виду:

$$P(F_i) = \frac{P(x|F_i)}{\sum_k P(x|F_k)}. \quad (46)$$

Возвращаясь к примеру, показанному на рис. 3 и рис. 4, предположим, что нам необходимо оценить литологический состав в точке профиля, расположенной посередине между скважинами на некотором стратиграфическом уровне. Пусть на этом же стратиграфическом уровне разрезы скважин представлены фациями F_2 и F_5 . Согласно выполненной параметризации (рис. 4), этим фациям отвечают значения «обобщенных координат» $(-0.14, -0.05)$ и $(0.375, 0.117)$. Предположим, что в результате интерполяции для данной точки разреза были получены значения «обобщенных координат» $(0.12, 0.03)$. (эти величины получены осреднением указанных выше значений «координат» в точках скважин: при отсутствии дополнительной

информации такой результат для средней точки профиля дадут большинство алгоритмов интерполяции). Также предположим, что была выполнена оценка погрешности интерполяции, которая для обоих факторов составила 0.2. Применение выражения (46) для оценки вероятностей появления фаций $\{F_1, \dots, F_5\}$ в данной точке разреза дает следующие значения: $(0.01, 0.16, 0.39, 0.27, 0.16)$. То есть в рассматриваемой ячейке априорной модели с наибольшей вероятностью ожидается появление фаций F_3 и F_4 . Присутствие фации F_1 маловероятно. Такой результат хорошо согласуется с вариантом геологического разреза, показанного на рис. 3а. Полученные таким образом оценки вероятностей могут быть напрямую поданы на вход геостатистической инверсии, либо использованы для расчета фоновой модели для детерминистической инверсии сейсмических данных и последующей интерпретации ее результатов с применением выражений, подобных (1).

Анализируя приведенный простой пример несложно понять важность правильной оценки метрики модели. Для точки с фиксированными аффинными координатами изменение расположения вершин базисного треугольника, показанного на рис. 4, приведет к перераспределению значений вероятностей фаций, оцениваемых по (45).

Важно подчеркнуть, что применение рассмотренного подхода позволяет автоматически получить пространственные распределения фаций, увязанные со скважинными данными и представлениями о закономерностях их последовательной смены в пространстве и геологическом времени (получаемых по результатам палеогеографических реконструкций и циклофациального анализа). Обычно при геологической интерпретации традиционными методами на практике тратится много сил и времени на создание таких согласованных моделей.

В качестве показателя уровня неопределенности получаемой фациальной модели в каждой точке может быть использована величина энтропии:

$$H(F) = -\sum_i P(F_i) \cdot \ln(P(F_i)). \quad (47)$$

Максимальной энтропией будут характеризоваться ячейки модели с равновероятным появлением фаций, а минимальной — области вокруг стволов скважин. Отметим также, что в случае выполнения параметризации принципиальной фациальной модели, при которой в расчет принимаются только наиболее значимые главные

компоненты, применение выражения (46) для расчета вероятностей появления фаций в точках скважин дает значения, меньшие 1. Этот эффект позволяет наглядно продемонстрировать влияние неопределенности, связанной с «огрублением» модели за счет учета только самых значимых факторов, отвечающих за изменчивость условий седиментации.

ИЕРАРХИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ОБСТАНОВОК ОСАДКОНАКОПЛЕНИЯ

Предложенная методика количественного учета априорной геологической информации основана на параметризации обстановок осадконакопления, разнообразие которых связано с совместным действием нескольких базисных процессов. Для непосредственного применения выражений (41) и (43) необходимо, чтобы для любых двух базисных обстановок существовало непустое множество фациальных переходов, которым отвечает ненулевая вероятность перехода между этими базисными литотипами. Другими словами, данные выражения позволяют ввести метрику и задать единую систему обобщенных координат на подмножестве фаций, характеризующихся общим набором базисных обстановок. Однако область применимости изложенного

метода может быть расширена и на более сложные седиментационные системы, состоящие из нескольких подсистем со своим набором базисных процессов. Каждому из таких подмножеств генетически связанных фаций можно поставить в соответствие некоторую область фациального многообразия, на которой может быть введена метрика и задана своя система координат. Эти локальные «карты» объединяются в «атлас» фациального многообразия. Если наборы базисных процессов этих подсистем имеют непустое пересечение, то получаемая модель фациального многообразия является односвязной. В некоторых случаях, при соблюдении ряда условий, между этими системами координат может быть осуществлен переход при помощи невырожденного взаимнооднозначного преобразования. Это дает возможность ввести единую систему координат на всем многообразии, используя отображения отдельных «карт» друг на друга. Но расстояния при таких преобразованиях координат, вообще говоря, не сохраняются. Поэтому в общем случае для параметризации сложных седиментационных систем целесообразно применять подход, основанный на построении иерархических моделей обстановок (рис. 5). Каждый узел промежуточного слоя такой модели отвечает набору генетически связанных фаций

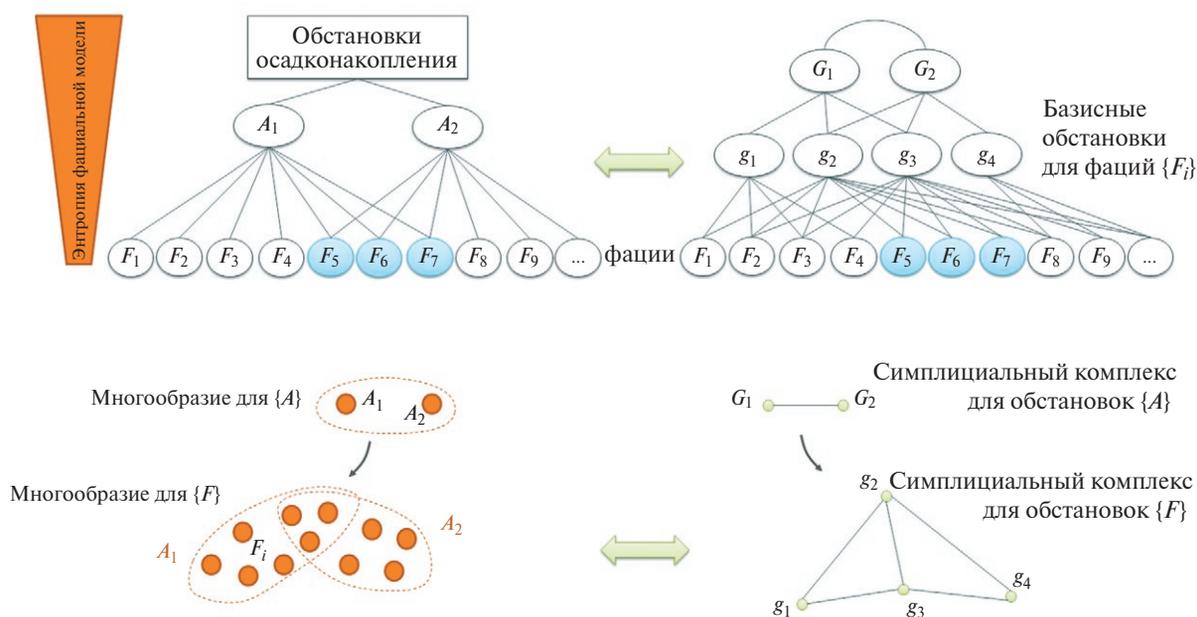


Рис. 5. Абстрактный пример седиментационной системы, содержащей две подгруппы обстановок A_1 и A_2 . Фациальное разнообразие внутри подгрупп определяется частично перекрывающимися наборами базисных процессов $\{g_1, g_2, g_3\}$ и $\{g_2, g_3, g_4\}$. Каждая подгруппа может быть параметризована своей системой «обобщенных геологических переменных», задающих «карты» соответствующих областей фациального многообразия. Фации F_5, F_6, F_7 присутствуют на двух «картах». Полная параметризация всей системы осуществляется путем задания вероятностей $P(A_1)$ и $P(A_2)$ и значений «обобщенных геологических координат» для подсистем $\{F_1, \dots, F_7\}$ и $\{F_5, \dots, F_9, \dots\}$.

из нижележащего уровня, которые являются его «потомками». Каждому уровню иерархической модели отвечает свое представление многообразия обстановок и соответствующее ему симплициальное разбиение, вершины которого являются базисными обстановкам для данного уровня. По мере продвижения вниз по иерархии модели количество базисных обстановок увеличивается, а структура многообразия может усложняться.

Узлы иерархической модели, имеющие общего «родителя», характеризуются общим набором базисных литотипов и принадлежат одной «карте» фациального многообразия данного уровня, на которой задается метрика при помощи изложенного выше подхода. Применительно к модели, изображенной на рис. 5, параметризация всего многообразия обстановок осуществляется с использованием пяти факторов: по два фактора на подмножества фаций $\{F_1, \dots, F_7\}$ и $\{F_5, \dots, F_9, \dots\}$ и один фактор, задающий вероятности появления самих «макрофаций» A_1 и A_2 .

Следует подчеркнуть, что для того, чтобы изложенный подход можно было использовать для параметризации фациальной модели, обстановки одного уровня иерархической схемы должны характеризоваться одинаковыми значениями неопределенности задания условий осадконакопления.

Интересно отметить следующее свойство получаемых моделей. При переходе от нижних уровней к верхним, минимальное количество базисных обстановок, необходимых для задания симплициальных комплексов, уменьшается. При этом две вершины симплициального комплекса соединяются ребром, если соответствующие базисные процессы участвуют в формировании условий хотя бы одного подмножества генетически связанных фаций (имеющих общий «родительский» узел). С другой стороны, переход к верхним уровням иерархии сопровождается увеличением неопределенности задания условий осадконакопления. Однако, если сохранить набор базисных обстановок неизменным, то переход к вышележащим уровням иерархической модели будет сопровождаться появлением дополнительных ребер в симплициальном комплексе, что эквивалентно увеличению энтропии модели. Если в фациальной модели, отвечающей нижнему уровню иерархической схемы, вероятности перехода между какими-то базисными литотипами были малы или равны нулю, то при последовательном смещении на вышележащие уровни они увеличатся. При этом в целом будет наблюдаться уменьшение различий в вероятностях

появления базисных обстановок и переходов между ними. В предельном случае, на вершине иерархической схемы фациальная модель характеризуется максимальной неопределенностью условий — любые две вершины симплициального комплекса соединены ребром, то есть возможны переходы между любыми двумя фациями модели. Именно такой ситуации максимальной неопределенности фациальных переходов отвечает подход к заданию априорных вероятностей фаций в выражениях, подобных (1), по пропорциям литотипов, оцененных на основе анализа разрезов всех скважин изучаемой территории. Привлечение генетической информации приводит к наложению ограничений на возможные фациальные переходы и учету седиментационных трендов, что сопровождается уменьшением энтропии получаемой модели.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенный выше подход позволяет решить проблему учета априорной геологической информации на количественном уровне, остро стоящую при решении обратных задач геофизики. Получаемый при этом набор «обобщенных геологических координат» описывает разнообразие условий образования исследуемых пород, то есть параметризует причины, приводящие к наблюдаемым вариациям свойств горных пород. Поэтому можно ожидать, что данные переменные будут являться гиперпараметрами, определяющими (с некоторой погрешностью) все остальные свойства геолого-геофизической модели. Существующие сегодня технологии совместного анализа сейсмических и скважинных данных позволяют естественным образом на количественном уровне увязать описание исследуемого объекта посредством набора таких гиперпараметров с реализованными на практике алгоритмами интерпретации материалов ГИС и сейсмической инверсии (см., например, [Eidsvik et al., 2002]). Поскольку в результате предложенной методики получается пространственная модель вероятностей фаций (литотипов), данный подход особенно хорошо подходит для комбинирования с технологиями геостатистической инверсии [Gunning, Glinsky, 2004; Gunning et al., 2014; Saussus, Sams, 2012; Walker et al., 2016; Rimstad, Omre, 2010; González, 2008].

Можно также ожидать, что рассмотренная методика параметризации геологической информации может найти применение при решении более широкого круга задач геологического моделирования, не ограничиваясь проектами,

на которых применяется технологии инверсии сейсмических данных. По мнению автора, вероятностное описание геологических моделей несет в себе значительный потенциал с точки зрения практического применения.

Очевидно, что область применимости представленного подхода к построению геолого-геофизических моделей определяется тем, насколько сильна причинно-следственная связь между изменчивостью обстановок осадконакопления и характеристиками горных пород, прогнозируемыми по результатам инверсии геофизических данных. Как правило, такая связь выражена достаточно хорошо даже в тех случаях, когда присутствуют и другие факторы, оказывающие существенное влияние на различные физические параметры. Например, известно, что диагенетические преобразования тесно связаны с изначальным фаціальным составом отложений [Ajdukiewicz, Lander, 2010; Morad et al., 2010]. В частности, на практике широко применяется разделение трендов уплотнения для пород различной литологии при выполнении интерпретации сейсмических и скважинных данных [Avseth et al., 2005]. Во многих случаях понимание условий формирования осадочных пород позволяет точнее описывать и учитывать вариации свойств отложений, связанные со вторичными преобразованиями и современным напряженным состоянием геологической среды. В связи с этим можно ожидать, что даже в тех случаях, когда фаціальная изменчивость не является единственным фактором, контролирующим физические свойства пород, использование рассмотренного подхода способно значительно снизить уровень неопределенности и повысить достоверность получаемых геолого-геофизических моделей.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает глубокую признательность доктору геол.-мин. наук, профессору геологического факультета МГУ им М.В. Ломоносова Валентине Алексеевне Жемчуговой. Основные идеи, нашедшие отражение в данной публикации, родились в результате многолетнего сотрудничества и плодотворных дискуссий при совместной работе над производственными проектами по комплексной интерпретации сейсмических и скважинных данных.

Автор также благодарен доктору физико-математических наук чл.-корр. РАН Сергею Андреевичу Тихоцкому за ценные комментарии, высказанные им в процессе обсуждения и подготовки данной публикации.

ПРИЛОЖЕНИЕ.

РАСЧЕТ «ОБОБЩЕННЫХ КООРДИНАТ» ФАЦИЙ ПО МАТРИЦЕ РАЗЛИЧИЙ

Расчет значений «обобщенных геологических переменных» из величин (17) выполняется с применением алгоритма Торгерсона [Torgerson, 1952], лежащего в основе классического метода многомерного шкалирования [Дэйвисон, 1988; Borg, Groenen, 2005]. Метод базируется на идее восстановления координат объектов по заданным расстояниям между ними. Он включает расчет центрированной ковариационной матрицы и последующую ее факторизацию.

Пусть дана матрица различий D , элементами которой являются квадраты «расстояний» между N объектами анализируемого множества (в рамках данной работы – базисными обстановками):

$$D = \begin{pmatrix} 0 & d_{12} & \dots & d_{1N} \\ d_{12} & 0 & \dots & d_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{1N} & d_{2N} & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{П.1})$$

Переход к центрированной ковариационной матрице R осуществляется следующим образом:

$$R = -\frac{1}{2} \cdot J \cdot D \cdot J. \quad (\text{П.2})$$

Здесь матрица J рассчитывается с помощью выражения:

$$J = E - \frac{1}{N} \cdot l^T l,$$

где: E – единичная матрица; N – размерность матрицы D (число сравниваемых объектов), а $l = \{1, 1, \dots, 1\}$ – вектор-строка, составленная из N единиц.

В скалярных обозначениях выражение (П. 2) записывается в следующем виде [Дэйвисон, 1988]:

$$r_{ij} = -\frac{1}{2} (d_{ij} - d_{i*} - d_{*j} + d_{**}). \quad (\text{П.3})$$

Здесь: d_{ij} – элемент матрицы D (квадрат «расстояния» между i -м и j -м объектом); d_{i*} – среднее значение элементов i -й строки; d_{*j} – среднее значение элементов j -го столбца; d_{**} – среднее значение элементов матрицы D .

Пусть далее V – матрица собственных вектор-столбцов матрицы R (единичной длины), а Λ – матрица, на диагонали которой находятся соответствующие собственные значения. Тогда

значения координат объектов в новой факторизованной ортогональной системе определяются вектор-строками матрицы X :

$$X = V \cdot \Lambda^{1/2}. \quad (\text{П.4})$$

Ковариационная матрица при такой замене координат не меняется (в силу $RV = V\Lambda$ и $V^T V = E$):

$$X \cdot X^T = V \cdot \Lambda^{1/2} \cdot \Lambda^{1/2} \cdot V^T = V \cdot \Lambda \cdot V^T = R.$$

С другой стороны, в силу $V^T V = E$, матрица $X^T X = \Lambda$ является диагональной. То есть факторы, отвечающие осям новой системы координат, являются статистически независимыми (выборочные коэффициенты корреляции значений координат равны нулю), а выборочные дисперсии значений координат равны собственным значениям матрицы R . Поэтому размерность координатного пространства может быть уменьшена без существенной потери точности, путем отбрасывания факторов, отвечающих малым собственным числам. При этом матрицы Λ и V в выражении (П.4) заменяются на матрицы Λ_1 и V_1 , отвечающие наибольшим собственным числам, а вместо матрицы X получается прямоугольная матрица координат X_1 с небольшим числом столбцов $K < N$:

$$X_1 = V_1 \cdot \Lambda_1^{1/2}. \quad (\text{П.5})$$

Зная матрицу W весов базисных обстановок (7), координаты фаций получаются из рассчитанных с помощью выражения (П.5) координат базисных обстановок X_1 следующим образом:

$$Y = W \cdot X_1. \quad (\text{П.6})$$

Здесь i -я строка матрицы Y содержит $K < N$ «обобщенных координат» i -й фации. Размерность модели K определяется количеством факторов, значимых с точки зрения точности восстановления исходной матрицы различий (П.1).

Погрешность полученной параметризации определяется суммой отброшенных собственных значений. Эта величина может быть использована при оценке распределений вероятностей $P(F_i|x)$, участвующих в расчете $P(F_i)$ в (46) и (47), а также при задании моделей пространственной корреляции (вариограмм) в процессе интерполяции в межскважинное пространство.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Новое издание, исправл. М.: МЦНМО. 2012. 344 с.
- Гогоненков Г.Н.* Изучение детального строения осадочных толщ сейсморазведкой. М.: Недра. 1987. 221 с.
- Дэйвисон М.* Многомерное шкалирование: методы наглядного представления данных. М.: Финансы и статистика. 1988. 254 с.
- Кабанихин С.И., Исаков К.Т.* Обратные и некорректные задачи для гиперболических уравнений. Алматы: Казахский нац. педагогический ун-т им. Абая. 2007. 330 с.
- Крашенинников Г.Ф.* Учение о фациях. Учеб. пособие. М.: Высшая школа. 1971. 368 с.
- Морозова Е.А., Ченцов Н.Н.* Естественная геометрия вероятностных законов. Итоги науки и техн. современ. пробл. матем. фундам. направления. ВИНТИ. 1991. Т. 83. С. 133–265.
- Мясоедов Д.Н.* Влияние интерполяционной модели на результат геостатистической инверсии // Геофизика. 2015. № 6. С. 20–28.
- Одесский И.А.* Пространственно-временное содержание породно-слоевых границ // Записки Горного Института. 1992. Т. 134. С. 116–123.
- Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука. 1979. 285 с.
- Ченцов Н.Н.* К систематической теории экспоненциальных семейств распределений вероятностей // Теория вероятностей и ее применения. 1966. Т. 11. Вып. 3. С. 483–494.
- Яковлев И.В., Ампилов Ю.П., Филиппова К.Е.* Почти все о сейсмической инверсии, часть 2 // Технологии сейсморазведки. 2011. № 1. С. 5–15.
- Ajdukiewicz J.M., Lander R.H.* Sandstone reservoir quality prediction: The state of the art // AAPG Bulletin. 2010. V. 94. № 8. P. 1083–1091.
- Amari Shun-ichi, Nagaoka Hiroshi.* Methods of information geometry (translated from the Japanese by Daishi Harada). Oxford University Press: Translations of mathematical monographs. 2000. V. 191.
- Avseth P., Mukerji T., Mavko G.* Quantitative seismic interpretation: Applying rock physics tools to reduce interpretation risk. Cambridge University Press. 2005. 359 p.
- Bhattacharyya A.* On a measure of divergence between two statistical populations defined by their probability distribution // Bulletin of the Calcutta Mathematical Society. 1943. V. 35. P. 99–110.
- Ball V., Tenorio L., Schiott C., Blangy J.P., Thomas M.* Uncertainty in inverted elastic properties resulting from uncertainty in the low-frequency model // The Leading Edge. 2015. V. 34 №. 9. P. 1028–1030, 1032, 1034–1035.
- Bohacs K., Suter J.* Sequence stratigraphic distribution of coaly rocks: Fundamental controls and paralic examples // AAPG Bulletin. 1997. V. 81. № 10. P. 1612–1639.

- Borg I., Groenen P.J.F.* Modern multidimensional scaling: Theory and applications. NY: Springer. 2005. 614 p.
- Bosch M., Mukerji T., Gonzalez E.F.* Seismic inversion for reservoir properties combining statistical rock physics and geostatistics: A review // *Geophysics*. 2010. V. 75. № 5.
- Buland A., Kolbjornsen O., Hauge R., Skjæveland O., Duffaut K.* Bayesian lithology and fluid prediction from seismic prestack data // *Geophysics*. 2008. V. 73. № 3. P. C13–C21.
- Carroll A.R., Bohacs K.M.* Stratigraphic classification of ancient lakes: Balancing tectonic and climatic controls // *Geology*. 1999. V. 27. № 2. P. 99–102.
- Catuneanu O., Galloway W.E., Kendall C.G.S.t.C., Miall A.D., Posamentier H.W., Strasser A., Tucker M.E.* Sequence Stratigraphy: Methodology and Nomenclature // *Newsletters on Stratigraphy*. 2011. V. 44. № 3. P. 173–245.
- Chernoff H.* A measure of asymptotic efficiency for test of a hypothesis based on the sum of observations // *The Annals of Mathematical Statistics*. 1952. V. 23. № 4. P. 493–507.
- Colombera L., Mounthey N.P., Mccaffrey W.D.* A quantitative approach to fluvial facies models: Methods and example results // *Sedimentology*. 2013. V. 60. P. 1526–1558.
- Dubrule O.* Geostatistics for seismic data integration in Earth models. 2003 SEG/EAGE Distinguished Instructor Short Course. 283 p.
- Duijndam A.J.W.* Bayesian Estimation in Seismic Inversion. Part I: Principles // *Geophysical Prospecting*. 1998. V. 36.
- Duijndam A.J.W.* Bayesian Estimation in Seismic Inversion. Part II: Uncertainty Analysis // *Geophysical Prospecting*. 1988. V. 36.
- Dvorkin J., Gutierrez M.A., Grana D.* Seismic reflections of rock properties. Cambridge University Press. 2014. 352 p.
- Eidsvik J., Mukerji T., Switzer P.* Modeling lithofacies alternations from well logs using Hierarchical Markov Chains. SEG Technical Program Expanded Abstracts. 2002. P. 2463–2466.
- Eidsvik J., Avseth P., More H., Mukerji T., Mavko G.* Stochastic reservoir characterization using prestack seismic data // *Geophysics*. 2004. V. 69. № 4. P. 978–993.
- González E.F., Gesbert S., Hofmann R.* Adding geologic prior knowledge to Bayesian lithofluid facies estimation from seismic data // *Interpretation*. 2016. V. 4. № 3.
- González E.F., Mukerji T., Mavko G.* Seismic inversion combining rock physics and multiple-point geostatistics // *Geophysics*. 2008. V. 73. № 1. P. R11–R21.
- Grana D., Pirrone M., Mukerji T.* Quantitative log interpretation and uncertainty propagation of petrophysical properties and facies classification from rock-physics modeling and formation evaluation analysis // *Geophysics*. 2012. V. 77 (3). P. WA45–WA63.
- Grana D.* Bayesian inversion methods for seismic reservoir characterization and time-lapse studies. Dis... Stanford University. 2013. 211 p.
- Gunning J., Glinsky M.* Delivery: An open-source model-based Bayesian seismic inversion program // *Computers and Geosciences*. 2004. V. 30. P. 619–636.
- Gunning J.S., Kemper M., Pelham A.* Obstacles, challenges and strategies for facies estimation in AVO seismic inversion // 76 th EAGE Conference & Exhibition 2014. Extended abstract.
- Haas A., Dubrule O.* Geostatistical inversion – a sequential method of stochastic reservoir modelling constrained by seismic data // *First Break* 1994. V. 12. P. 561–569.
- Harper C.W.J.* Facies model revisited: an examination of quantitative methods // *Geoscience Canada*. 1984. V. 11. № 4. P. 203–207.
- Kemper M.A.C., Gunning J.* Joint impedance and facies inversion – seismic inversion redefined // *First Break*. 2014. V. 32 (9). P. 89–95.
- Larsen A.L., Ulymoen M., Omre, H., Buland, A.* Bayesian lithology/fluid prediction and simulation on the basis of a Markov-chain prior model // *Geophysics*. 2006. V. 71 (5). P. R69–R78.
- Mahalanobis P.C.* On the generalised distance in statistics. Proceedings of the National Institute of Sciences of India 2 (1). 1936. P. 49–55.
- Mavko G., Mukerji T., Dvorkin J.* The rock physics handbook. Cambridge University Press. 2009.
- Miall A.D.* Markov chain analysis applied to an ancient alluvial plain succession // *Sedimentology*. 1973. № 20. P. 347–364.
- Morad S., Al-Ramadan K., Ketzer J.M., De Ros L.F.* The impact of diagenesis on the heterogeneity of sandstone reservoirs: A review of the role of depositional facies and sequence stratigraphy // *AAPG Bulletin*. 2010. V. 94. № 8. P. 1267–1309.
- Mukerji T., Avseth P., Mavko G., Takahashi I., Gonzalez E.F.* Statistical rock physics: Combining rock physics, information theory, and geostatistics to reduce uncertainty in seismic reservoir characterization // *The Leading Edge*. 2001. V. 20. P. 313–319.
- Nielsen F.* An information-geometric characterization of Chernoff information // *IEEE Signal Processing Letters*. 2013. V. 20. № 3. P. 269–272.
- Nielsen F.* Chernoff information of exponential families. arXiv:1102.2684 v1, 2011.
- Nielsen F., Garcia V.* Statistical exponential families: a digest with flash cards. arXiv:0911.4863 v2, 2011.
- Nurgalieva N.G., Vinokurov V.M., Nurgaliev D.K.* The Golovkinsky strata formation model, basic facies law and sequence stratigraphy concept: historical sources and relations // *Russ. J. Earth Sci.* 2007. V. 9. ES 1003.
- Rao C.R.* Differential metrics in probability spaces. Differential geometry in statistical inference / ed. By S. Amari, O. Barndorff-Nielsen, R. Kass, S. Lauritzen, C.R. Rao. IMS Lecture Notes. V. 10. Hayward, CA. 1987. P. 217–240.
- Reading H.G.* Clastic facies models, a personal perspective // *Bulletin of the Geological Society of Denmark*. 2001. V. 48. P. 101–115.
- Riegl B., Purkis S.J.* Markov models for linking environments and facies in space and time (recent Arabian Gulf, Miocene Paratethys). *Perspectives in Carbonate Geology: A Tribute*

- to the Career of Robert Nathan Ginsburg. 2009. IAS Special Publication 41.
- Rimstad K., Omre H.* Impact of rock-physics depth trends and Markov random fields on hierarchical Bayesian lithology/fluid prediction // *Geophysics*. 2010. V. 75. № 4. R93-R108.
- Russell B.H.* Introduction to seismic inversion methods. SEG. 1988. 178 p.
- Sams M., Saussus D.* Practical implications of low frequency model selection on quantitative interpretation results. SEG Technical Program Expanded Abstracts. 2013. P. 3118–3122.
- Saussus D., Sams M.* Facies as the key to using seismic inversion for modelling reservoir properties // *First Break*. 2012. V. 30. № 7. P. 45–52.
- Scales J.A., Tenorio L.* Prior information and uncertainty in inverse problems // *Geophysics*. 2001. V. 66. № 2. P. 389–397.
- Sen M.K.* Seismic inversion. SPE. 2006. 120 p.
- Sen M.K., Stoffa P.L.* Nonlinear one-dimensional seismic waveform inversion using simulated annealing // *Geophysics*. 1991. V. 56. № 10. P. 1624–1638.
- Tarantola A.* Inverse problem theory and methods for model parameter estimation. SIAM. 2005. 342 p.
- The sedimentary record of sea-level change. Edited by Angela L. Coe. Cambridge, UK: Cambridge University Press and the Open University. 2003. 287 p.
- Torgerson W.S.* Multidimensional scaling: I. Theory and method // *Psychometrika*. 1952. V. 17. № 4. P. 401–419.
- Ulymoen M., Omre H.* Improved resolution in Bayesian lithology/fluid inversion from prestack seismic data and well observations: Part 1 – Methodology // *Geophysics*. 2010. V. 75. № 2.
- Walker M., Grant S., Conolly P., Smith L.* Stochastic inversion for facies: A case study on the Schiehallion field // *Interpretation*. 2016. V. 4 (3). P. SL9–SL20.
- Zavala C., Carvajal J., Mercano J., Delgado M.* Sedimentological indices: A new tool for regional studies of hyperpycnal systems. Sediment transfer from shelf to deepwater – Revisiting the delivery mechanisms: Conference Proceedings. AAPG Search and Discovery Article 50076. AAPG Hedberg Conference. March 3–7, 2008.

Parameterization of A Priori Geological Knowledge in Seismic Inversion

К. А. Епов^а

^а*JSC Ruspetro, Moscow, 125167 Russia*

e-mail: epovk@yandex.ru

Received March 25, 2019

An approach to parameterization of prior geological knowledge concerning the changes in depositional environment in space and geological time for their quantitative use in the workflow of seismic inversion is presented. The idea is to describe the observed or expected facies diversity in terms of a few statistically independent factors (generalized geological variables). The topology and metrics of the model are determined by the set of basic depositional environments and the statistics of facies transitions. The introduced parameters make it possible to estimate the occurrence probability of different facies at each model point. The proposed technique can be applied for regions with various degree of detail of the existing geological knowledge and amount of available well logging data.

Keywords: seismic inversion, depositional environments, facies, conditional probability, a priori knowledge, Bayes' theorem