

УДК 550.34.01

## О НАКЛОНАХ, ВЫЗВАННЫХ РАВНОВЕСНЫМИ ИЗМЕНЕНИЯМИ АТМОСФЕРНОГО ДАВЛЕНИЯ: ВЛИЯНИЕ РЕЛЬЕФА

© 2019 г. И. Я. Цуркис

Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта РАН, г. Москва, Россия

\*E-mail: tsurkis@ifz.ru

Поступила в редакцию 11.10.2018 г.

Принята в печать 25.03.2019 г.

Изучено влияние рельефа на барические наклоны. Основное внимание уделено двумерной задаче. Вариации барического поля предполагаются равновесными (горизонтальная составляющая градиента давления отсутствует), а рельеф – финитным. Последнее значит, что площадь области, заключенной между линией рельефа и осью абсцисс, конечна. Показано, что эта площадь – единственный геометрический параметр, от которого зависят вертикальные смещения и наклоны в дальней зоне. Выписаны асимптотики для вариаций вертикальных смещений и наклонов. Дано обобщение на трехмерный случай.

*Ключевые слова:* барические наклоны, вертикальные смещения, барическое поле, трехмерный случай.

**DOI:** <https://doi.org/10.31857/S0002-333720196140-150>

Влияние процессов в атмосфере на наклоны ранее неоднократно обсуждалось, в том числе, в работах расчетно-теоретического плана. Начало положила статья [Darwin, 1882]. В ней рассматривается упругое полупространство, атмосферное давление над которым меняется вдоль оси  $x$  по синусоидальному закону. То есть: рельеф отсутствует, распределение давления неравновесное и должно сопровождаться массопереносом. Эти два момента являются основными в постановке задачи. Авторы последующих (часто весьма содержательных) работ их так или иначе воспроизводят.

Показательна статья [Перцев, Ковалёва, 2004]: в ней авторы моделируют нестационарный процесс в атмосфере, а именно – прохождение циклона, который представляет собой область пониженного атмосферного давления с характерным размером  $\sim 600$  км. Давление в центре циклона отличается от нормального атмосферного давления на 40 мбар, т. е. на 4%.

Авторами получены следующие оценки: максимальное значение – 5 мсек дуги, или  $2 \cdot 10^{-8}$  рад – наклоны достигают на расстоянии  $\sim 200$  км от центра циклона. На расстоянии 1000 км от центра наклоны составляют  $\sim 5 \cdot 10^{-10}$  рад. Для сравнения: амплитуда волны M2 на широте Москвы – величина поряд-

ка  $5 \cdot 10^{-8}$ ; амплитуды суточных волн примерно в 2 раза меньше.

Но эти оценки носят «усредненный» характер, поскольку топографию – фактор, обладающий малым (по сравнению с масштабом рассматриваемого явления) «радиусом действия» – авторы не учитывают. «На локальном уровне» фактор рельефа может стать решающим.

Второй пример: статья [Латынина, Васильев, 2001]. Авторы анализируют данные, которые были получены на Подмосковной станции Протвино. Метеорологическая обстановка в районе станции известна, она характеризуется чередованием циклонов и антициклонов. Авторы вводят в рассмотрение передаточную функцию «от баровариаций к наклонам». Для периодов от 2 до 15 суток значение этой функции примерно в 7 раз больше теоретической. Авторы считают, что «причиной возникновения anomalно больших наклонов земной поверхности является латеральная неоднородность поверхностных слоев земной коры». Однако не исключено, что отчасти это несоответствие обусловлено наличием рельефа, который авторы «не замечают». Ниже будет показано, что даже слабый рельеф может существенно повлиять на барические наклоны.

О влиянии рельефа на атмосферные наклоны говорится только в статье [Широков, Анохина, 2003], но авторы ограничиваются констатацией факта и не приводят количественных оценок. В данной работе этот пробел будет восполнен.

Вариацию барического поля мы будем считать равновесной. Это значит, что давление в каждый момент времени зависит только от высоты над уровнем моря; горизонтальной составляющей у градиента давления нет. При наличии рельефа даже равновесные вариации давления должны сопровождаться изменением наклонов.

Рассмотрение будет вестись в рамках линейной теории упругости. Основное внимание мы уделим двумерной задаче. Это связано с тем, что рельеф, как правило, имеет линейно-протяженную структуру (разломы, цепи холмов, речные русла). С другой стороны, решить двумерную задачу проще, поскольку ее можно свести к краевой задаче теории функций комплексного переменного.

Этот подход был предложен Г. Колосовым [Колосов, 1935]. С его помощью в статье получен упомянутый в аннотации приближенный результат общего характера, а также точное решение для рельефа специального вида – образа нижней полуплоскости при конформном отображении:

$$z(w) = w - a^2/(w - ic), \quad c \geq a > 0; \quad \text{Im } w \leq 0. \quad (1)$$

Этот рельеф представляет собой впадину, выраженную тем более явно, чем больше отношение  $a/c$ . Показано, что вклад такого рельефа в барические наклоны может на порядок превышать чувствительность современных наклономеров.

## 1. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

### 1.1. Финитный рельеф

Пусть  $D$  – (нижняя) полуплоскость с рельефом,  $\partial D$  – линия, ограничивающая ее сверху, то есть собственно рельеф. Предположим, что у бесконечных ветвей рельефа есть общая горизонтальная асимптота. Введем правую систему координат  $(x, y)$ , совместив с этой асимптотой ось абсцисс; ось ординат направим вертикально вверх. Условимся через  $y(x)$  обозначать ординату точки рельефа с абсциссой  $x$ ; будем счи-

тать (хотя это и необязательно), что такая точка только одна.

Назовем рельеф финитным, если при  $x \rightarrow \pm\infty$

$$y'(x) = o(1), \quad y(x) = O(1/|x|^{1+\alpha}), \quad (2)$$

где  $\alpha$  – любое положительное число. Кроме того, пусть производная  $y'(x)$  имеет не более конечного числа точек разрыва.

Из (2), в частности, следует сходимость интеграла:

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} y(x) dx. \quad (3)$$

Этот интеграл представляет собой «алгебраическую площадь» области, заключенной между линией рельефа и осью абсцисс. Все дальнейшие рассуждения в полной мере относятся именно к финитному рельефу.

#### ПРИМЕР 1.

$\partial D$  – незамкнутая ломаная, такая, как на рис. 1а: вне отрезка, соединяющего крайние правую и крайнюю левую вершины, ордината  $y(x) = 0$ . У производной  $y'(x)$  конечное число точек разрыва (оно равно числу вершин ломаной), поэтому условия (2) соблюдены.

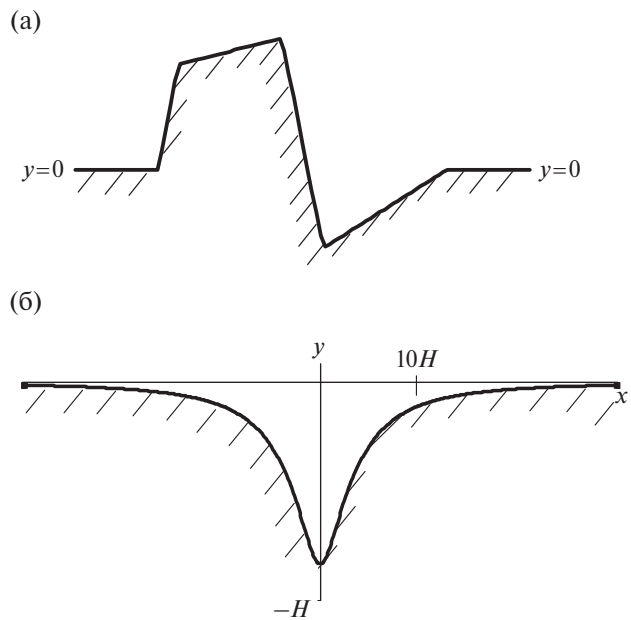


Рис. 1. Примеры финитного рельефа: (а) линия рельефа – ломаная с конечным числом звеньев; (б) линия рельефа – образ действительной оси при отображении (1), где  $c = 2a$ .

*Терминологическое замечание.* Если  $y(x)$ , как в Примере 1, функция с компактным носителем, рельеф будем называть «совсем финитным».

**ПРИМЕР 2.**  $\partial D$  — граница области, в которую переходит нижняя полуплоскость комплексной переменной  $w$  при простейшем рациональном конформном отображении (1), см. рис. 16). Оно имитирует ложбину, глубина которой  $H$  равна:

$$H = a^2/c. \quad (4)$$

Интеграл (3) легко вычислить:

$$S = -\pi a^2 \left( 1 - \frac{a^2}{4c^2} \right). \quad (5)$$

Вклад рельефа (1) в барические наклоны будет вычислен в п. 2.

### 1.2. Метод Колосова—Мухелишвили

Обозначим через  $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}$  компоненты тензора напряжений, через  $(u, v)$  — компоненты вектора упругих смещений, через  $\lambda$  и  $\mu$  — коэффициенты Ламе (модуль сжатия и модуль сдвига). Двумерная задача теории упругости представляет собой систему из семи скалярных уравнений, из которых три уравнения выражают закон Гука:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda(\partial u / \partial x + \partial v / \partial y) + 2\mu \partial u / \partial x, \quad \sigma_{yy} = \\ &= \lambda(\partial u / \partial x + \partial v / \partial y) + 2\mu \partial v / \partial y, \quad (6) \\ \sigma_{xy} &= \mu(\partial u / \partial y + \partial v / \partial x), \end{aligned}$$

два — условия равновесия:

$$\begin{aligned} \partial \sigma_{xx} / \partial x + \partial \sigma_{xy} / \partial y &= 0, \\ \partial \sigma_{xy} / \partial x + \partial \sigma_{yy} / \partial y &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

и еще два — краевые условия, заданные на границе  $\partial D$ :

$$\sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y = F_x, \quad \sigma_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y = F_y. \quad (8)$$

В (8)  $n_x, n_y$  — компоненты вектора внешней нормали;  $F_x, F_y$  — компоненты вектора внешних усилий. В нашем случае, согласно закону Паскаля:

$$F_x = -p n_x, F_y = -p n_y, \quad (9)$$

где  $p$  — атмосферное давление, меняющееся от точки к точке:  $p = p_0 - \rho g y(x)$ .

Здесь  $p_0$  — давление «на уровне моря», которому соответствует значение ординаты  $y = 0$ ;

$g$  — ускорение свободного падения;  $\rho \approx 1.2 \text{ кг/м}^3$  — плотность воздуха вблизи поверхности Земли.

Деформации и наклоны линейно зависят от атмосферного давления  $p$ . Поэтому вклад рельефа можно представить как сумму двух слагаемых: первое пропорционально  $p_0$  (слагаемое I); второе, учитывающее изменение давления с высотой — пропорционально  $\rho g y(x)$  (слагаемое II). Заметим, что слагаемое I в двумерной постановке рассчитывается так же, как вклад рельефа в приливные наклоны (для слабого рельефа эта задача решена в ст. [Молоденский, 1983]): давление  $p_0$  играет роль приливного напряжения.

Соотношение слагаемых I и II заслуживает отдельного рассмотрения, которое выходит за рамки данной статьи. Здесь скажем только, что доля второго слагаемого тем значительнее, чем «масштабнее» рельеф; но главное — оно превалирует в дальней от активной части рельефа зоне. Поэтому, на наш взгляд, оно представляет гораздо больший интерес. Именно его мы и будем анализировать.

Итак, будем считать, что:

$$p = -\rho g y(x). \quad (10)$$

Двумерную задачу теории упругости (6)–(8) можно свести к краевой задаче теории функций комплексного переменного, используя метод Колосова. Этот метод с исчерпывающей полнотой изложен в книге [Мухелишвили, 1966] (см. также [Портон, Перлин, 1981]). Он основан на том, что компоненты тензора напряжений являются производными бигармонической функции, т. н. функции Эри  $U(x, y)$ :

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$$

и на теореме Гурса, в силу которой бигармоническую в области  $D$  функцию можно представить в виде:

$$U = \text{Re} \left( z \bar{\phi} + \int \psi dz \right),$$

где  $\phi(z)$  и  $\psi(z)$  — аналитические в этой области функции комплексной переменной  $z = x + iy$ . Функции  $\phi(z)$  и  $\psi(z)$  связаны на границе условием:

$$\phi(\xi) + \xi \overline{\phi'(\xi)} + \overline{\psi(\xi)} = f(\xi), \quad \xi \in \partial D. \quad (11)$$

Здесь  $f(z)$  — «комплексный градиент» функции  $U(x, y)$ :

$$f(z) = \frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y},$$

он определен с точностью до аддитивной константы. Функцию  $f(\xi)$  будем называть нагрузочной функцией. Ее можно выразить через компоненты вектора внешних усилий:

$$f(\xi) = i \int_{\partial D} (F_x + iF_y) ds, \quad (12)$$

где  $ds$  – элемент дуги контура  $\partial D$ . Интегрирование идет в положительном направлении так, что область  $D$  находится от нас слева. Подставив (9) в (12), получим:

$$f(\xi) = - \int_{\partial D} p \cdot (dx + idy). \quad (13)$$

Мы учли, что  $n_x = dy/ds$ ,  $n_y = -dx/ds$ . Наконец, пользуясь (10), приводим (13) к виду:

$$f(\xi) = f(x + iy) = \rho g \left[ \int_b^x y(x_1) dx_1 + \frac{i}{2} (y^2(x) - y^2(b)) \right] + \text{const.}$$

Здесь:  $x_1$  – абсцисса текущей точки  $\partial D$ ;  $b$  – произвольное действительное число. Если рельеф финитный, мы можем положить  $b = \infty$ , и, отбросив несущественную константу, написать:

$$f(\xi) = \rho g \left[ \int_{\infty}^x y(x_1) dx_1 + \frac{i}{2} y^2(x) \right]. \quad (14)$$

Решив задачу (11)–(14), мы с помощью формулы, принадлежащей Г. Колосову:

$$2\mu(u + iv) = \kappa \varphi(z) - z \overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}, \quad (15)$$

где  $\kappa = (\lambda + 3\mu)/(\lambda + \mu)$ , сможем найти смещения во всей области  $D$ . На линии рельефа:

$$2\mu(u + iv) = (\kappa + 1) \varphi(\xi) - f(\xi), \quad \xi \in \partial D. \quad (16)$$

Нас интересует, в основном, наклоны  $\partial v(z)/\partial x|_{z=\xi \in D}$ . Наша ближайшая цель – получить асимптотику для наклонов при  $|x| \rightarrow \infty$ . Мы покажем, что единственный геометрический параметр, от которого она зависит – интеграл (3).

### 1.3. Вертикальные смещения и наклоны в дальней зоне

Обратимся к общей задаче (11) для полуплоскости с рельефом. Как уже было сказано, функция  $f(\xi)$  в правой части (11) определена с точностью до постоянного слагаемого. Если его можно подобрать так, чтобы величина  $f(\xi)$  при  $\xi \rightarrow \infty$

достаточно быстро стремилась к нулю (например, как  $1/|\xi|^\alpha$ , где  $\alpha > 0$ ), функция  $\varphi(z)$  на бесконечности будет регулярной. Это значит, что:

$$\varphi'(z) = o(1/|z|), \quad z \rightarrow \infty.$$

Например, для нижней полуплоскости, ограниченной действительной осью, решение гласит:

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty}^{-\infty} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z}$$

и  $\varphi'(z)$  убывает как  $1/|z|^2$  [Мухелишвили, 1966]. Но функция (14) при обходе контура  $\partial D$  испытывает приращение  $[f]_{\partial D}$ , не равное 0:

$$[f]_{\partial D} = \rho g \int_{\infty}^{-\infty} y(x_1) dx_1 = -\rho g S. \quad (17)$$

Поэтому применим прием, также описанный в кн. [Мухелишвили, 1966]: будем искать функции  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  в виде:

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= A \ln(z - z_0) + \Phi(z), \\ \psi(z) &= B \ln(z - z_0) + C + \Psi(z). \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь:  $z_0$  – точка, лежащая в верхней полуплоскости, выше самой высокой точки области  $D$ ;  $\Phi(z)$ ,  $\Psi(z)$  – аналитические функции, регулярные на бесконечности. Под  $\ln z$  мы будем понимать ветвь логарифма

$$\ln z = \ln |z| + i \text{Arg } z,$$

где  $\text{Arg } z$  – аргумент комплексного числа, который меняется в пределах от  $-\pi$  до  $\pi$ . Важно, что приращение логарифма при обходе контура  $\partial D$  отлично от 0:

$$[\ln(\xi - z_0)]_{\partial D} = -\pi i.$$

Подставляем (18) в (11):

$$\begin{aligned} &\Phi(\xi) + \xi \overline{\Phi'(\xi)} + \overline{\Psi(\xi)} = \\ &= f(\xi) - A \ln(\xi - z_0) - \overline{B} \ln(\overline{\xi} - \overline{z_0}) - \xi \frac{\overline{A}}{\overline{\xi} - \overline{z_0}} - \overline{C}, \\ &\xi \in \partial D. \end{aligned} \quad (19)$$

При  $\text{Re } \xi \rightarrow \pm \infty$  правая часть (19) должна оставаться ограниченной, более того – стремиться к нулю, откуда:

$$A = B = -\frac{[f]_{\partial D}}{2\pi i} = \frac{\rho g S}{2\pi i}; \quad C = \frac{[f]_{\partial D}}{2\pi i} = -\frac{\rho g S}{2\pi i}. \quad (20)$$

При этих значениях  $A$ ,  $B$  и  $C$  правая часть (19) стремится к 0 по степенному закону: если



$\alpha \leq 1$ , не медленнее чем  $1/\xi^\alpha$ , а в случае  $\alpha > 1$  – не медленнее, чем  $1/\xi$ . Следовательно:

$$\varphi(z) = \frac{\rho g S}{2\pi i} \ln(z - z_0) + \Phi(z), \quad (21)$$

$$\psi(z) = \frac{\rho g S}{2\pi i} \ln(z - z_0) - \frac{\rho g S}{2\pi i} + \Psi(z),$$

где

$$\Phi'(z) = o(1/|z|), \quad z \rightarrow \infty. \quad (22)$$

Выразим через  $\Phi(z)$  вертикальные смещения на границе. Подставив (21) в (16), имеем после отделения мнимой части:

$$v = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu(\lambda + \mu)} \left( -\frac{\rho g S}{2\pi} \ln|\xi - z_0| + \text{Im} \Phi(\xi) \right) - \frac{\rho g y^2}{4\mu}. \quad (23)$$

Мы учли, что согласно (14),

$$\text{Im} f = \rho g y^2 / 2.$$

Предположим, что рельеф «совсем финитный», т. е. для далеких точек, лежащих на линии рельефа:

$$y = 0, \quad \xi = x.$$

Тогда в силу (23) вертикальные смещения в этих точках:

$$v = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu(\lambda + \mu)} \left( -\frac{\rho g S}{2\pi} \ln|x - z_0| + \text{Im} \Phi(x) \right). \quad (24)$$

Дифференцируя (24) по  $x$ , получаем выражение для наклонов:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu(\lambda + \mu)} \left( -\frac{\rho g S}{2\pi} \frac{x}{|x - z_0|^2} + \text{Im} \Phi'(x) \right).$$

Принимая во внимание (22), находим асимптотику при  $x \rightarrow \infty$ :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\lambda + 2\mu}{\mu(\lambda + \mu)} \frac{\rho g S}{2\pi x} + o(1/|x|). \quad (25)$$

Таким образом, изменение наклона  $\delta \partial v / \partial x$  вследствие равновесных вариаций барического поля в далеких от активной части рельефа точках:

$$\delta \frac{\partial v}{\partial x} \sim -\frac{\lambda + 2\mu}{\mu(\lambda + \mu)} \frac{\delta \rho g S}{2\pi x}, \quad (26)$$

где  $\delta \rho$  – вариация плотности воздуха. Формулы (25) и (26) верны и в случае «просто финитного» рельефа, когда функция  $u(x)$  удовлетворяет условиям (2).

Будем считать температуру неизменной. Тогда:

$$\delta \rho \sim \delta p_0,$$

где  $\delta p_0$  – вариация давления вблизи поверхности Земли. Если  $p_0$  увеличивается или падает на 50 мбар, т. е. на 5% по отношению к среднему значению, на 5% по отношению к средней плотности 1.2 кг/м<sup>3</sup>, изменяется плотность  $\rho$ , т. е.:

$$|\delta \rho| \approx 0.06 \text{ кг/м}^3. \quad (27)$$

В дальнейшем мы будем исходить из оценки (27). На первый взгляд, она кажется завышенной: дневная вариация давления редко превышает 15 мбар, плотности (при постоянной температуре) – 0.018 кг/м<sup>3</sup>. Однако на промежутке времени длиной  $\sim 10$  суток вариация давления в данном пункте вполне может составить 50–55 мбар, а «... при последовательном прохождении циклона и антициклона... перепад давления может достигать 100 мбар» [Латынина, Васильев, 2001]. Этому перепаду давления отвечает вдвое большая, чем (27), вариация плотности:  $|\delta \rho| = 0.12 \text{ кг/м}^3$ .

Но плотность воздуха  $\rho$  не только пропорциональна давлению, она обратно пропорциональна абсолютной температуре. Поэтому  $\delta \rho$  может быть еще больше, если температура и давление меняются в противофазе. Рассмотрим ситуацию, типичную для среднеширотной зимы: циклон уступает место антициклону, при этом температура падает на 15–20°. Тогда  $\delta \rho \sim 0.18 - 0.20 \text{ кг/м}^3$ .

Модули  $\lambda$  и  $\mu$  мы примем равными:

$$\lambda = \mu = 3 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2. \quad (28)$$

Значения вариации плотности (27) и коэффициентов Ламе (28) будем называть стандартными.

**ПРИМЕР 3.** Область  $D$  – протяженный карьер (траншея, русло реки) сечением  $100 \times 100$  м (см. рис. 2). Тогда  $S = -10^4 \text{ м}^2$ . В силу (26), при стандартных значениях  $|\delta \rho|$ ,  $\lambda$  и  $\mu$  на расстоянии  $x = 1000$  м от карьера вариация наклона, обусловленная изменением атмосферного давления, равна:

$$\delta \frac{\partial v}{\partial x} = 0.5 \cdot 10^{-10} \text{ рад}. \quad (29)$$

Мы получили величину в пределах точности наклономера. Но (29) – это, скорее, оценка снизу: значения упругих модулей (28) характерны для консолидированной среды с преобладанием гранита и базальта. Там, где преобладают осадочные породы, модули на полпорядка меньше [Латынина, Васильев, 2001]. Кроме того, речь идет о дальней зоне; максимальное значение вариации наклона, очевидно, в несколько раз больше. Следовательно, эффект от равновесной вариации давления при данной геометрии рельефа может составить  $\sim 5 \cdot 10^{-10}$  рад, а это – доступная измерению величина.

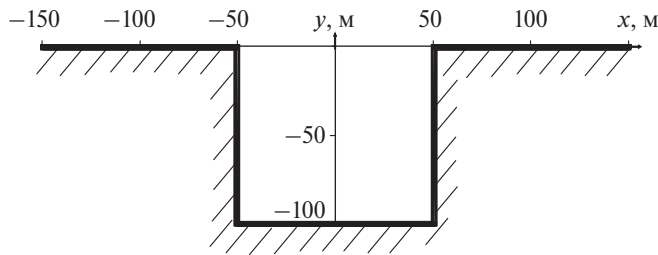


Рис. 2. Протяженный карьер сечением 10 × 100 м

2. ОТОБРАЖЕНИЕ (1).

Рассмотрим подробно рельеф, определяемый отображением (1). Параметры  $a$  и  $c$  имеют следующий геометрический смысл: пусть  $H$  – глубина впадины,  $r$  – радиус кривизны в самой низкой точке дна. Тогда:

$$a^2 = H\sqrt{2rH} + H^2, \quad c = \sqrt{2rH} + H.$$

При фиксированном значении  $c$  рельеф представляет собой впадину, выраженную тем резче, чем больше  $a$ . Случаю  $a/c = 1$ , показанному на рис. 3б, соответствует значение  $r = 0$ . Тогда ложбина превращается в каньон, и:

$$a = c = H,$$

где  $H$  – глубина каньона. Функция  $y(x)$  содержит точку заострения  $x = 0, y = -c$ , в которой производная  $y'(x)$  скачком меняется от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Для области  $D$ , задаваемой отображением (1), решение задачи о наклонах, обусловленных равновесными вариациями барического поля, выражается через элементарные функции, правда, формула получается весьма громоздкая. Запишем нагрузочную функцию (14) в виде:

$$f(\xi) = \rho g \int_{\infty-i\cdot 0}^{\xi} \text{Im} \xi_1 d\xi_1,$$

где интегрирование идет по контуру  $\partial D$ . образом точки  $\xi \in \partial D$  служит точка  $\eta$ , принадлежащая действительной оси комплексной

плоскости  $w$ . Перейдем к (действительной) переменной  $\eta$ . Из (1) имеем:

$$\xi = \eta - \frac{a^2}{\eta - ic}, \quad \text{Im} \eta = 0. \quad (30)$$

Отсюда:

$$\text{Im} \xi = \frac{a^2}{2i} \left( \frac{1}{\eta + ic} - \frac{1}{\eta - ic} \right); \quad \frac{d\xi}{d\eta} = 1 + \frac{a^2}{(\eta - ic)^2}. \quad (31)$$

Следовательно:

$$f(\eta) = f(\xi(\eta)) = \frac{\rho g a^2}{2i} \int_{\infty}^{\eta} \left( \frac{1}{\eta_1 + ic} - \frac{1}{\eta_1 - ic} \right) \left( 1 + \frac{a^2}{(\eta_1 - ic)^2} \right) d\eta_1.$$

Очевидно, что этот интеграл «берется». Результат можно записать в следующем виде:

$$f(\eta) = \rho g \left\{ \frac{S}{2\pi i} (\ln(\eta - ic) - \ln(\eta + ic)) + a^4 \frac{\eta/c - 2i}{4(\eta - ic)^2} \right\}, \quad \text{Im} \eta = 0. \quad (32)$$

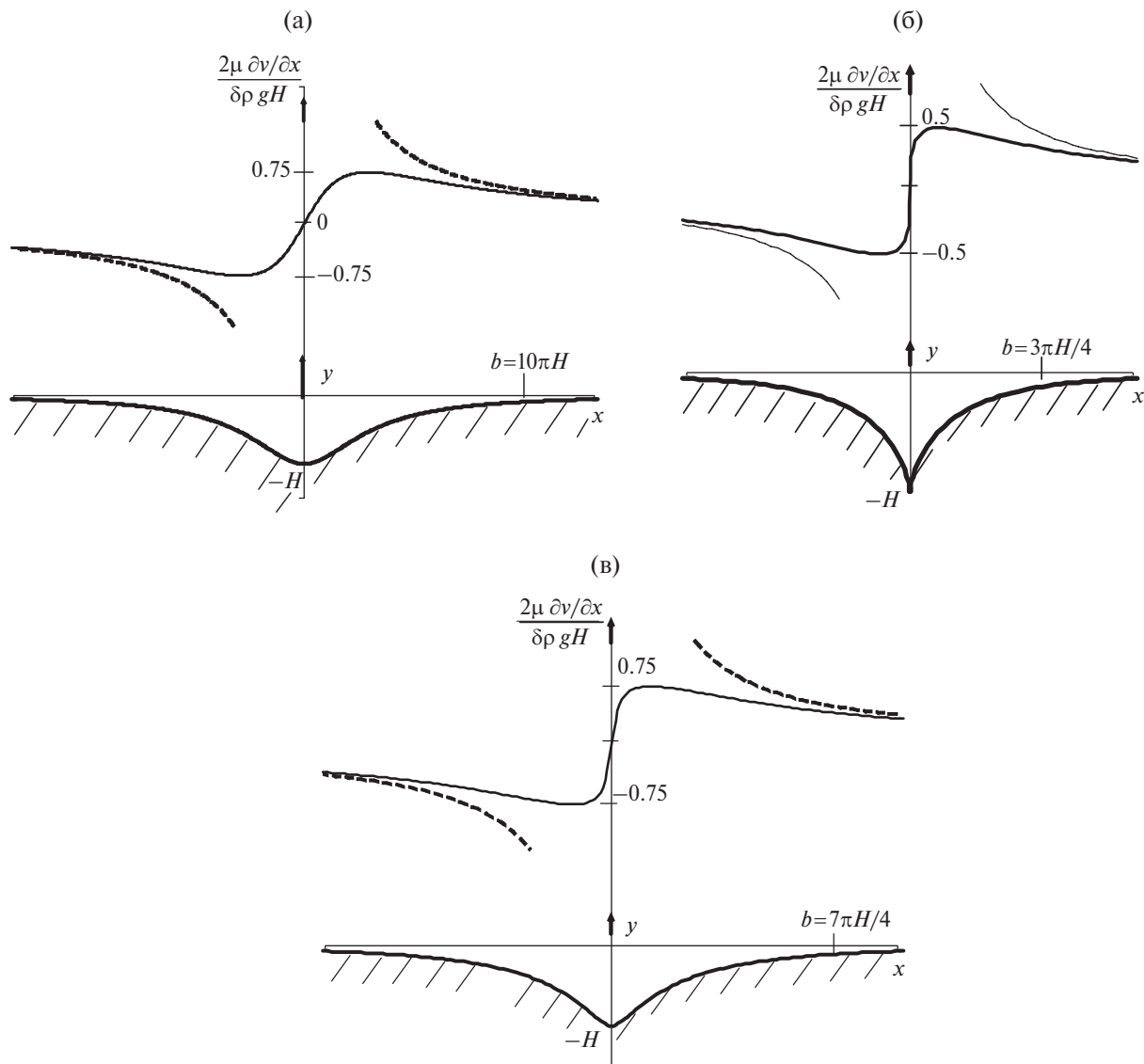
Здесь  $S$  – «алгебраическая площадь» области, заключенной между линией  $\partial D$  и осью  $\text{Im} z = 0$ . Формула для  $S$  приведена в п. 1, см. (5). Задача (11) для области  $D$  эквивалентна краевой задаче для нижней полуплоскости с условием, заданным на действительной оси:

$$\varphi(\eta) + \frac{\xi(\eta)}{\xi'(\eta)} \overline{\varphi'(\eta)} + \overline{\psi(\eta)} = f(\eta), \quad \text{Im} \eta = 0. \quad (33)$$

Здесь  $\varphi(\eta)$  и  $\psi(\eta)$  – граничные значения аналитических в нижней полуплоскости функций  $\varphi(w)$  и  $\psi(w)$ ; зависимость  $\xi(\eta)$  – см. (30). Опуская промежуточные вычисления, приведем решение задачи (33)–(32):

$$\varphi(w) = \frac{\rho g S}{2\pi i} \ln(w - ic) + \frac{\rho g a^4}{4} \left( \frac{a^2}{c(4c^2 - 2a^2)} \frac{1}{w - ic} - \frac{i}{(w - ic)^2} \right); \quad (34)$$

$$\psi(w) = \frac{\rho g S}{2\pi i} \ln(w - ic) + \frac{\rho g a^2}{8c^2} \times \frac{c(16c^4 - a^4)(2c^2 - a^2)w^2 - i(64c^8 - 32c^6a^2 - 7c^2a^6 + 2a^8)w - c^5(32c^4 + 10a^4 - 48c^2a^2)}{(4c^2 - a^2)(2c^2 - a^2)((w - ic)^2 + a^2)(w - ic)}. \quad (35)$$



**Рис. 3.** Наклоны на границе области, задаваемой отображением (1), при  $\lambda = \mu$  и различных значениях  $\varepsilon = a^2/c^2$ : (а) – слабый рельеф,  $\varepsilon = 0.1$ ; (б) – каньон (линия рельефа содержит особую точку),  $\varepsilon = 1$ ; (в) – промежуточный случай,  $\varepsilon = 0.5$ . Толстая линия – линия рельефа; тонкая линия – точное значение  $\frac{2\mu \partial v / \partial x}{\delta \rho g H}$ ; пунктир – асимптотика (26).

В том, что функции (34) и (35) действительно решают задачу (33)–(32)–(30), можно убедиться непосредственной подстановкой.

Пользуясь явными выражениями для потенциалов  $\varphi(w)$  и  $\psi(w)$ , мы можем найти вектор смещений:

$$2\mu(u + iv) = \kappa\varphi(w) - \frac{z(w)}{z'(w)} \overline{\varphi'(w) - \psi(w)}, \quad (36)$$

где  $\kappa = (\lambda + 3\mu) / (\lambda + \mu)$ . Формула (36) равносильна формуле Колосова (15). Она справедлива при всех  $w$  с неположительной мнимой частью,

а значит, с ее помощью мы можем найти компоненты смещения во всей области  $D$ . Для того, чтобы вычислить компоненты тензора деформации  $\partial u / \partial x$  и  $\partial v / \partial x$ , продифференцируем (36) по  $x$ :

$$2\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \kappa \frac{\varphi'(w)}{z'(w)} - \frac{1}{z'(w)} \left[ \overline{\varphi'(w) + \psi'(w)} + z(w) \frac{d}{dw} \frac{\overline{\varphi'(w)}}{z'(w)} \right]; \quad (37)$$

мы учли аналитичность функций  $\varphi(w)$ ,  $\psi(w)$  и  $z(w)$ . Подставив (34) и (35) в (37), положив  $w = \eta$ , где  $\text{Im} \eta = 0$ , и, отделив мнимую часть, получим формулу, которая позволяет вычислить наклоны на линии рельефа:

$$2\mu \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\varepsilon \rho g c^2}{8(2-\varepsilon)} \frac{\eta}{(\eta^2 + c^2) \left( \eta^4 + 2\eta^2 c^2 (1+\varepsilon) + c^4 (1-\varepsilon)^2 \right)} \times \\ \times \left( \eta^2 (\kappa + 1) \left( \eta^2 (\varepsilon^2 - 6\varepsilon + 8) + c^2 (\varepsilon^3 - 10\varepsilon^2 + 4\varepsilon + 16) \right) + \right. \\ \left. + c^4 \left( (1-3\kappa)\varepsilon^3 + (13\kappa-11)\varepsilon^2 + (10-22\kappa)\varepsilon + 8(\kappa+1) \right) \right), \quad (38)$$

где

$$\varepsilon = a^2 / c^2. \quad (39)$$

*Замечание.* Параметр  $\varepsilon$  характеризует «крутизну» рельефа: чем  $\varepsilon$  меньше, тем меньше углы наклона элементов рельефа к горизонту. Справедлива оценка:

$$|y'(x)| \leq \frac{3\sqrt{3}\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon}(8+\varepsilon)}, \quad (40)$$

равенство достигается при  $\eta = \pm c\sqrt{(1-\varepsilon)}/3$ .

Выразим через  $\varepsilon$  и  $c$  глубину ложбины  $H$  и «площадь»  $S$ : из (4), (5) и (39) имеем:

$$H = \varepsilon c \quad (41)$$

и

$$S = -\pi \varepsilon c^2 (1 - \varepsilon / 4). \quad (42)$$

Целесообразно ввести еще один линейный параметр, ширину ложбины  $b$ :

$$b = |S| / H. \quad (43)$$

В терминах  $c$  и  $\varepsilon$ :

$$b = \pi c (1 - \varepsilon / 4). \quad (44)$$

Ниже мы рассмотрим два крайних случая:  $\varepsilon \ll 1$  (слабый рельеф) и  $\varepsilon = 1$  (каньон), а также среднее значение  $\varepsilon = 0.5$ .

**1). Слабый рельеф** ( $\varepsilon \ll 1$ ). В этом случае  $x = \eta + O(\varepsilon)$ . Поэтому из (38) имеем:

$$2\mu \frac{\partial v}{\partial x} = \rho \cdot (\kappa + 1) \frac{g \varepsilon c^2}{2} \frac{x}{x^2 + c^2} + O(\varepsilon^2).$$

Вариация наклонов, с точностью до величин порядка  $\varepsilon^2$ , равна:

$$\delta \frac{\partial v}{\partial x} = \delta \rho g \varepsilon c^2 \frac{(\lambda + 2\mu)}{2\mu(\lambda + \mu)} \frac{x}{x^2 + c^2}. \quad (45)$$

Правая часть (45) достигает экстремума при  $x = \pm c$ , в точках с ординатой  $y = -c\varepsilon/2 = -H/2$ . В этих точках:

$$\left| \delta \frac{\partial v}{\partial x} \right| = \frac{(\lambda + 2\mu)}{4\mu(\lambda + \mu)} |\delta \rho| g H.$$

**ПРИМЕР 4.** Зададимся стандартными значениями  $\delta \rho$ ,  $\lambda$  и  $\mu$ ; (см. (27), (28)). Пусть  $c = 1000$  м,  $\varepsilon = 0.1$ . Тогда глубина ложбины  $H = \varepsilon c = 100$  м. В силу (40), угол наклона элементов рельефа к горизонту не превышает  $4^\circ$ , т.е. рельеф действительно выражен слабо. Тем не менее, на расстоянии 1000 м от дна ложбины вариация барического наклона согласно (45) равна:

$$\delta \frac{\partial v}{\partial x} = 7.2 \cdot 10^{-10},$$

что на порядок превышает точность измерений.

Далее: сравним (45) и асимптотику (26) (см. рис. 3а). При  $\varepsilon \ll 1$  «площадь»  $S$  и эффективная ширина  $b$ :

$$S = -\pi \varepsilon c^2, \quad b = \pi c, \quad (46)$$

(см. (41), (43)). Учитывая (46), запишем (45) в виде:

$$\delta \frac{\partial v}{\partial x} = -\delta \rho g S \frac{(\lambda + 2\mu)}{2\pi\mu(\lambda + \mu)} \frac{x}{x^2 + (b/\pi)^2}. \quad (47)$$

Отношение правых частей (26) и (47) равно  $1 + b^2 / (\pi x)^2$ . При  $x = \pm b$  оно отличается от 1 на  $1/\pi^2 \approx 0.1$ . Это значит, что вне интервала  $x \in (-b, b)$  асимптотика (26) дает ошибку меньше 10%.

**2). Каньон** ( $\varepsilon = 1$ ). Глубина каньона  $H = c$ ; самая низкая точка является точкой заострения (см. рис. 3б). Заменив  $c$  на  $H$  и  $\varepsilon$  на 1, из (38) имеем:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\rho g H^2}{16\mu} \cdot \frac{\eta^2 (\kappa + 1) (3\eta^2 + 11H^2) + 4H^4 (2 - \kappa)}{\eta (\eta^2 + H^2) (\eta^2 + 4H^2)}. \quad (48)$$

Если  $\lambda = \mu$ , то  $\kappa = 2$ . В этом (и только в этом) случае правая часть (48) при  $\eta \rightarrow 0$  остается ограниченной. Формула (48) переходит в:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{3\rho g H^2}{16\mu} \cdot \frac{\eta (3\eta^2 + 11H^2)}{(\eta^2 + H^2) (\eta^2 + 4H^2)}.$$



В вариациях:

$$\delta \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{3\delta\rho g H^2}{16\mu} \cdot \frac{\eta(3\eta^2 + 11H^2)}{(\eta^2 + H^2)(\eta^2 + 4H^2)}. \quad (49)$$

Результаты вычислений по формуле (49), в сравнении с асимптотикой (26), показаны на рис. 3б. Удовлетворительную точность (ошибку < 10 %) асимптотика дает при  $|x| > 1.6b$ , где  $b$  – эффективная ширина (44); в рассматриваемом случае  $b = 3\pi H / 4$ .

Абсолютная величина вариации наклона достигает максимума при  $\eta \approx \pm H$ , в точках с ординатой  $y \approx -H/2$ , – как и в случае слабого рельефа. Этот максимум равен  $\approx 0.25\delta\rho g H / \mu$ , что при  $H = 100$  м (и стандартных значениях остальных параметров) составляет  $5 \cdot 10^{-10}$  рад.

**3). Промежуточный случай** ( $\varepsilon = 0.5$ ). Результаты вычислений по формуле (38) при этом значении  $\varepsilon$  и  $\kappa = 2$  представлены на рис. 3в. Асимптотика (26) дает погрешность, не превышающую 10 %, при условии  $|x| > 1.4b$ , где  $b$  – ширина ложбины: при  $\varepsilon = 0.5$  из (44) и (41) имеем  $b = 7\pi H / 4$ .

Вариация наклона достигает максимума при  $|\eta| \approx 1.4H$ , в точках с ординатой  $y \approx -0.7H$ . Сам максимум равен  $\approx 0.37\delta\rho g H / \mu$ . При  $H = 100$  м и стандартных значениях остальных параметров, наибольшее значение, как и в случае 1), составляет  $7.2 \cdot 10^{-10}$  рад.

*Итак: для рельефа, задаваемого конформным отображением (1), величина эффекта определяется, в основном, глубиной ложбины  $H = a^2/c$ . В зависимости от крутизны рельефа, которую характеризует параметр  $\varepsilon = a^2/c^2$ , максимальное значение вариации наклона меняется незначительно, в пределах от  $0.25\delta\rho g H / \mu$  до  $0.37\delta\rho g H / \mu$ . При  $H = 100$  м и стандартных значениях  $\delta\rho$  и  $\mu$  (см. (27) и (28)) это – величины  $\sim 5 \cdot 10^{-10}$ . Но вариация плотности  $|\delta\rho|$  может оказаться вдвое и даже втрое больше, а модуль сдвига  $\mu$  – в 3–5 раз меньше стандартного значения; тогда эффект составит  $\sim 7 \cdot 10^{-9}$  рад.*

Максимального значения наклоны достигают примерно на половине глубины, в точках с ординатой  $y \sim -H/2$ .

Асимптотика (26) «начинает работать» на расстояниях порядка эффективной ширины  $b|S|/H$  от самой низкой точки дна. Она дает погрешность, не превышающую 10 %, в случае слабого рельефа – при  $|x| > b$ ; в противоположном случае  $a = c$ , когда рельеф содержит точку заострения – при  $|x| > 1.6b$ .

### 3. ОБСУЖДЕНИЕ ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА: СВЯЗЬ С РЕШЕНИЕМ БУССИНЕСКА И ВОЗМОЖНОСТЬ ОБОБЩЕНИЯ НА ТРЕХМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Статья посвящена оценке влияния рельефа на барические наклоны.

Вариации барического поля мы считаем равновесными: это значит, что горизонтальной составляющей у градиента давления нет. Наклоны возникают, по большей части из-за того, что на поверхности Земли атмосферное давление меняется от точки к точке, в зависимости от высоты «над уровнем моря». В отсутствие рельефа, ответные напряжения в земной коре не влияли бы на наклоны. «Равновесная» постановка задачи кажется автору наиболее естественной. К тому же, в ней есть элемент новизны: до сих пор в работах, посвященных влиянию атмосферы на наклоны элементов земной коры, задавалось неравновесное распределение давления, а влияние рельефа игнорировалось.

В данной работе рельеф предполагался двумерным и финитным. Последнее означает, что площадь  $S$  области, образованной линией рельефа и общей для обеих бесконечных ветвей рельефа горизонтальной асимптотой, конечна.

Основной результат был получен в п. 1: это формула (26). Из нее следует, что  $S$  – единственный геометрический параметр, от которого зависит вариация наклонов в дальней от активной части рельефа зоне.

Теперь рассмотрим двумерную задачу Буссинеска: на границу нижней полуплоскости (т. е. на ось  $x$ ) действует единичная сосредоточенная сила, приложенная к началу координат и направленная вертикально вверх. Требуется найти вертикальную компоненту смещения точки  $x$  на границе полуплоскости  $G(x)$ .

Решение этой задачи хорошо известно:

$$G(x) = -\frac{\lambda + 2\mu}{2\pi\mu(\lambda + \mu)} \ln|x|. \quad (50)$$

Сравнивая (26) и (50), видим, что:

$$\delta \frac{\partial v}{\partial x} \sim \delta\rho g S \frac{\partial G}{\partial x}.$$

Иными словами: вариации наклонов в дальней зоне пропорциональны производной решения Буссинеска  $\partial G / \partial x$ ; роль коэффициента пропорциональности играет величина  $\delta\rho \cdot g \cdot S$ .

Естественно предположить, что связь между наклонами в дальней зоне и решением

Буссинеска имеет место и в трехмерном случае. Пусть  $D$  – полупространство с рельефом,  $\partial D$  – гладкая поверхность, ограничивающая его сверху (то есть собственно рельеф). Направим ось  $z$  вертикально вверх. Предположим, что объем области, заключенной между  $\partial D$  и горизонтальной плоскостью  $xOy$  конечен, т.е. интеграл:

$$V = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} z(x, y) dx dy$$

абсолютно сходится (здесь  $z(x, y)$  высота текущей точки рельефа).

Обозначим через  $G(x, y)$  вертикальное смещение точек на границе «идеального» полупространства  $z \leq 0$  под действием единичной силы, приложенной к началу координат:

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{\lambda + 2\mu}{\mu(\lambda + \mu)} \frac{1}{r}, \quad (51)$$

где  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  [Ландау, Лифшиц, 2003]. И сразу, по аналогии с (26), пишем формулы для вариации наклонов  $\partial w / \partial x$  и  $\partial w / \partial y$  в дальней зоне:

$$\begin{aligned} \delta \frac{\partial w}{\partial x} &\sim \delta \rho g V \frac{\partial G}{\partial x} = -\frac{\lambda + 2\mu}{\mu(\lambda + \mu)} \frac{\delta \rho g V x}{4\pi r^3}, \\ \delta \frac{\partial w}{\partial y} &\sim -\frac{\lambda + 2\mu}{\mu(\lambda + \mu)} \frac{\delta \rho g V y}{4\pi r^3}. \end{aligned} \quad (52)$$

Конечно, приведенное рассуждение не является доказательством. Однако, если рельеф «слабый» ( $\alpha \ll 1$ , где  $\alpha$  – синус угла между нормалью к поверхности  $\partial D$  и осью  $z$ ), формулы (52) следуют из теории возмущений. Эта теория была развита С.М. Молоденским для оценки влияния рельефа на приливные деформации и наклоны [Молоденский, 1983]. Идея состоит в том, чтобы заменить функцию Грина для полупространства со слабым рельефом функцией Грина для «идеального» полупространства, т.е. решением Буссинеска. С.М. Молоденский показал, что вычисленные таким образом смещения и деформации отличаются от истинных значений на величину порядка  $\alpha^2$ .

Пусть на поверхности  $\partial D$  заданы напряжения:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = p; \quad \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0,$$

где  $p = \delta \rho g z(x, y)$ . С учетом сделанных выше предположений, вертикальное смещение  $w$  на границе с точностью до величин второго порядка по  $\alpha$  равно:

$$w = \delta \rho g \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} z(x_1, y_1) \cdot G(x - x_1, y - y_1) dx_1 dy_1.$$

Ограничимся рассмотрением ситуации, когда рельеф «совсем финитный»: вне круга достаточно большого радиуса  $R$  с центром в начале координат высота  $z(x, y) = 0$ . Тогда координаты  $x_1, y_1$ , по которым идет интегрирование, по абсолютной величине не превосходят  $R$ . Если точка  $(x, y)$  находится в дальней зоне ( $|x|, |y| \ll R$ ), то  $G(x - x_1, y - y_1) \approx G(x, y)$ , и

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \delta \rho g G(x, y) \int \int z(x_1, y_1) dx_1 dy_1 = \\ &= \delta \rho g V G(x, y). \end{aligned} \quad (53)$$

Что и требовалось: формулы (52) следуют из (53) и (51). По-видимому, формулы (52) верны для любого трехмерного финитного рельефа, необязательно слабого.

К сожалению, подходов, сравнимых по эффективности с методом Колосова – именно с помощью этого метода была получена асимптотика (26) – в трехмерном случае нет, по крайней мере, автору они неизвестны. Поэтому подтвердить (или опровергнуть) высказанную выше гипотезу можно только «экспериментально»: то есть, решить трехмерную задачу теории упругости для нескольких финитных рельефов численно и сопоставить результаты вычислений с (52). В ближайших планах автора – выполнить такую работу.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарит Ю.О. Кузьмина, М.С. Кучая и И.А. Широкова за интерес к работе и полезное обсуждение результатов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Колосов Г.В. Применение комплексной переменной к теории упругости. М.: ОНТИ. 1935. 224 с.
- Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, т. VII. Теория упругости. М.: Физматлит. 2003. 264 с.
- Латынина Л.А., Васильев И.М. Деформация земной коры под влиянием атмосферного давления // Физика Земли. 2001. № 5. С. 45–54.
- Молоденский С.М. О локальных аномалиях амплитуд и фаз приливных наклонов и деформаций // Физика Земли. 1983. № 7. С. 3–9.
- Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука. 1966. 707 с.

Партон В.З., Перлин П.И. Математический аппарат теории упругости. М.: Наука. 1981. 688 с. С. 362–446.

Перцев Б.П., Ковалёва О.В. Оценка влияния колебаний атмосферного давления на наклоны и линейные деформации земной поверхности // Физика Земли. 2004. № 8. С. 79–81.

Широков И.А., Анохина К.М. О связи пространственно-временных вариаций наклонов земной поверхности с вариациями атмосферного давления // Физика Земли. 2003. № 1. С. 84–87.

Darwin G.H. XLVI. On variations in the vertical due to elasticity of the earth's surface // Phil. Mag. S. 1882. V. 14. № 90. P. 409–427.

## **On the Tilts Caused by Equilibrium Fluctuations of Atmospheric Pressure: Effect of Topography**

**I. Ya. Tsurkis<sup>a,\*</sup>**

<sup>a</sup>*Schmidt Institute of Physics of the Earth, Russian Academy of Sciences, Moscow, 123242 Russia*

<sup>\*</sup>*E-mail: tsurkis@ifz.ru*

Received October 11, 2018

The influence of the relief on baric tilts is studied. Main attention is focused on two-dimensional problem. It is assumed that variations of baric field are equilibrium (horizontal component of pressure gradient is absent) and the relief is finite. The latter means that the area between the topographic profile and the abscissa axis is finite. It is shown that this area is the only geometric parameter that determines vertical displacements and tilts in the far zone. The asymptotics for the variations in vertical displacements and tilts are written out. The generalization to the three-dimensional case is presented.

*Keywords:* baric tilts, vertical displacements, baric field, three-dimensional case