

## О ПОСТРОЕНИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МАГНИТНОГО ПОЛЯ МЕРКУРИЯ ПО СПУТНИКОВЫМ ДАННЫМ

© 2023 г. И. Э. Степанова<sup>1, \*</sup>, А. Г. Ягола<sup>2</sup>, Д. В. Лукьяненко<sup>2</sup>, И. И. Колотов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, г. Москва, Россия

<sup>2</sup>МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия

\*E-mail: tet@ifz.ru

Поступила в редакцию 04.04.2023 г.

После доработки 17.05.2023 г.

Принята к публикации 19.05.2023 г.

Предложена новая методика аналитического описания магнитного поля Меркурия по данным спутниковых миссий на основе локальной и региональной версий метода линейных интегральных представлений. Обратная задача по нахождению источников поля редуцируется к решению плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений с приближенно заданной правой частью. Построены карты изолиний  $z$ -компоненты вектора магнитной индукции в декартовой системе координат, жестко связанной с планетой, а также региональная  $S$ -аппроксимация радиальной компоненты поля. Приводятся результаты математического эксперимента по аналитическому продолжению магнитного поля в сторону источников.

**Ключевые слова:** магнитное поле, лапласово поле, линейные интегральные представления, поле Био–Савара.

**DOI:** 10.31857/S000233723060212, **EDN:** YMYRJS

### ВВЕДЕНИЕ

За последние два-три десятилетия объем информации об объектах Солнечной системы существенно возрос благодаря межпланетным миссиям, таким как Mariner-10, Messenger, BepiColombo. Благодаря данным Mariner-10 исследователи сделали вывод о внутреннем происхождении магнитного поля Меркурия [Ness et al., 1974; 1975; Johnson et al., 2012; Alexeev et al., 2010; Wicht et al., 2014]. Меркурий – ближайшая к Солнцу планета, обладающая целым рядом особенностей, в частности, достаточно сильным магнитным полем.

Миссия Messenger позволила изучить поверхность Меркурия, историю геологического развития, химический состав и магнитосферу [Benkhoff et al., 2010; Anderson et al., 2007; 2008; Milillo et al., 2020]. Роль этого космического зонда в исследованиях Меркурия весьма велика: данные, отправленные Messenger на Землю, свидетельствуют о существовании жидкой части ядра планеты [Anderson et al., 2010; 2011; 2012; 2013], что противоречит существовавшей до 1970-х годов гипотезе о наличии в ядре Меркурия лишь твердой фазы [Plageman, 1965]. Токи во внешнем, жидком, ядре создают внутреннее магнитное поле Меркурия. В работе [Anderson et al., 2012] было установлено, что магнитный экватор расположен в северной полусфере планеты, и этот факт послужил осно-

ванием для моделирования внутреннего поля Меркурия как поля единичного диполя. Значение дипольного момента Меркурия приведено в работе [Anderson et al., 2012]. Оказалось, что угол наклона диполя по отношению к оси вращения планеты невелик: он составляет около 0.8 градуса. Изучались также и временные вариации магнитного поля Меркурия [Philpott et al., 2014].

Магнитное поле ближайшей к Солнцу планеты отличается весьма сложной структурой: есть составляющая, порождаемая движением горячей проводящей жидкости внутри ядра, а также поле плазмы в окружающем Меркурий пространстве. Однако по отдельности эти “компоненты” рассматривать нельзя: поле ядра активно взаимодействует с Солнечным ветром. В магнитосфере Меркурия обнаруживаются области пересоединения магнитного поля, головные ударные волны и так называемые “магнитопаузы” (*reconnection regions, bow shock and magnetopause*). Отличительным свойством магнитосферы Меркурия можно считать присутствие своеобразных вихрей, которые образуются благодаря взаимодействию внутреннего поля с Солнечным ветром.

Многие исследователи пытаются построить аналитические модели как “полного” магнитного поля, включающего в себя поле жидкого ядра [Margout et al., 2007] и поле магнитных масс, на-

ходящихся в коре Меркурия, так и отдельных составляющих магнитной индукции [Alken et al., 2021; Langlais et al., 2020]. Подход, основанный на разложении физических полей в ряд по сферическим гармоникам [Cain et al., 1989], является продуктивным в случае, когда измерения охватывают планету в глобальном масштабе [Stanley et al., 2008; Amit et al., 2011; Dietrich, Wicht, 2013]. Если же измерения более разрозненны и доступны только для отдельных областей планеты, то сферические гармоники также могут быть полезны, но при наложении дополнительных условий на коэффициенты разложения и выполнении процедуры регуляризации [Connerney et al., 1982; Holme, Bloxham, 1996; Uno et al., 2009].

Магнитное поле Меркурия некоторые исследователи [Langlais et al., 2020] пытаются описать как поле дипольных, квадрупольных и октупольных моментов. Предварительно сигнал, соответствующий компоненте магнитного поля, проходит через узкополосный фильтр по методу Сарон. Таким образом, выделяются отдельные компоненты спектра магнитного поля, в том числе — компоненты поля литосферного происхождения. Часто при решении подобного рода задач применяется метод дискретных дипольных моментов [Langlais et al., 2004; Whaler, Purucker, 2005; Oliveira et al., 2015; Hood et al., 2018]. Этот метод (дискретных точечных источников поля, сокращенно ESD) является весьма популярным уже на протяжении порядка 40 лет [Mayhew, 1979].

Так называемые локальные методы тоже используются при построении аналитических моделей полей планет [Thébault et al., 2006; Hood et al., 2018].

Особенности, выявленные в структуре магнитного поля Меркурия, накладывают ряд ограничений на построение модели магнитного динамо этой планеты, по сравнению с известными моделями палеодинамо Марса [Cao et al., 2014; Wicht, Heyner, 2014; Christensen, 2006; Christensen, Tilgner, 2004; Mittelholz et al., 2020; Langlais, Purucker, 2007].

В наших предыдущих работах [Kolotov et al., 2022; Wang et al., 2022] мы строили аналитические модели магнитного поля Меркурия (так называемое “магнитное изображение” Меркурия) на основе методики интегральных уравнений. После дискретизации соответствующих непрерывных постановок получались системы линейных алгебраических уравнений относительно компонент вектора магнитного момента, заданного на некоторой сетке. Матрицы систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) не являются при таком подходе симметрическими и положительно полуопределенными, и этот фактор влияет на выбор стратегии регуляризации обратных задач.

В начале 2000-х был предложен весьма конструктивный подход, основанный на методе линейных интегральных представлений [Strakhov,

Stepanova, 2002a; 2002b], который является обобщением в некотором смысле метода интегральных уравнений. С помощью различных версий метода линейных интегральных представлений были получены аналитические аппроксимации различных физических полей Земли и Марса [Gudkova et al., 2020; 2021; Salnikov et al., 2021; Павевский, Stepanova, 2015; Степанова, 2020]. Метод линейных интегральных представлений позволяет находить устойчивые приближенные решения обратных задач геофизики даже при ограниченной информации об изучаемых элементах глобального или аномального поля, при наличии во входных данных помех различной природы. Основная идея метода заключается в представлении поля в виде простого и двойного слоев, распределенных на некоторых носителях (размерность носителей может принимать значения от единицы до четырех), а также в виде интегралов Радона и Фурье.

В настоящей работе мы предприняли попытку построения аналитической модели магнитного поля Меркурия по данным миссии Messenger [Messenger, 2011], без акцента на предварительную обработку экспериментальных данных (так называемый “preprocessing”). При создании математической модели магнитного поля применялись две версии метода линейных интегральных представлений (локальная и региональная  $S$ -аппроксимации лапласовых векторных полей), а также была апробирована методика описания вихревых полей на основе локальных модифицированных  $S$ -аппроксимаций.

Вне источников поля (т.е. вне внешнего жидкого ядра Меркурия) сигнал вполне хорошо может быть представлен в виде ряда по сферическим гармоникам, интеграла Фурье и т.п. [Фрик и др., 2021; Титов и др., 2020; Казанцев, Кардаков, 2019], но наиболее близкую к действительности математическую модель магнитного поля планеты, обладающей динамо (подобно магнитному полю Земли), невозможно получить без учета уравнений магнитной гидродинамики, которым удовлетворяют компоненты вектора магнитной индукции и скоростей заряженных частиц, генерирующих это поле [Reshetnyak, 2015].

Как известно [Арнольд, Хесин, 2007], существует теория кинематического динамо, согласно которой движение несжимаемой жидкости в магнитном поле описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\{\vec{v}, \vec{B}\} + \eta \Delta \vec{B}, \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  — это вектор магнитной индукции в некоторой области пространства  $M$ ;  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  — скорость жидкости, а  $\eta$  — малый безразмерный параметр, представляющий собой магнитную вязкость.

$\{\bar{v}, \bar{B}\}$  – это скобка Пуассона двух бездивергентных векторных полей. В трехмерном пространстве ее можно записать как  $\{\bar{v}, \bar{B}\} = -\text{rot}(\bar{v} \times \bar{B})$ . В более общей постановке, магнитное поле  $\bar{B}(\bar{r}, t)$  и поле скоростей  $\bar{v}(\bar{r}, t)$  определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = -\{\bar{v}, \bar{B}\} + \eta \Delta \bar{B}, \\ \text{div } \bar{B} = 0, \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -\{\bar{v}, \bar{v}\} + \text{rot } \bar{B} \times \bar{v} + \bar{v} \Delta \bar{v} - \nabla p. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь  $\nabla p$  – градиент давления. Это – система уравнений магнитной гидродинамики.

Предлагаемые в данной работе аналитические аппроксимации магнитного поля Меркурия в дальнейшем могут рассматриваться как нулевые или первые приближения к решению нелинейной системы уравнений в частных производных (2) при решении прямых начально-краевых задач магнитной гидродинамики, а также служить ориентиром при построении регуляризирующих операторов для широкого спектра обратных задач в этой области науки. Математические модели физических полей планет Солнечной системы, помимо чисто теоретического интереса, имеют и некоторую практическую ценность – с их помощью можно уточнять внутреннее строение не-

бесных тел, а также изучать движение заряженных частиц вблизи планет.

## ОПИСАНИЕ МЕТОДИКИ

Если известны компоненты магнитного или гравитационного поля (например, первая производная потенциала по  $z$  на некотором рельефе), то можно представить потенциал поля в виде суммы простого и двойного слоев, создаваемых совокупностью горизонтальных плоскостей, расположенных ниже заданного рельефа. Если систему координат выбрать так, чтобы дневная поверхность (поверхность Земли в локальном варианте метода  $S$ -аппроксимаций, см. работы [Strakhov, Stepanova, 2002b; Раевский, Степанова, 20156]) уравнением  $z = 0$ , то потенциал представляется в виде:

$$\begin{aligned} V(M) = & \sum_{l=1}^L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_{1,l}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2}{\sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + (z - H_l)^2}} + \\ & + \sum_{l=1}^L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_{2,l}(\xi_1, \xi_2) (z - H_l) d\xi_1 d\xi_2}{[\sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + (z - H_l)^2}]^3}, \quad (3) \\ M = & M(x, y, z), \quad \hat{x} = (x, y), \\ \xi = & (\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad \hat{\xi} = (\xi_1, \xi_2). \end{aligned}$$

Тогда производная по  $z$  потенциала  $V$ , взятая с обратным знаком, будет иметь вид:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial z}(M) = & \sum_{l=1}^L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_{1,l}(\xi) (z - H_l) z d\xi_1 d\xi_2}{[\sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + (z - H_l)^2}]^3} + \\ & + \sum_{l=1}^L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_{2,l}(\xi) (2(z - H_l)^2 - (x - \xi_1)^2 - (y - \xi_2)^2) d\xi_1 d\xi_2}{[\sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + (z - H_l)^2}]^5}, \quad (4) \\ M = & M(x, y, z). \end{aligned}$$

Функции  $\rho_{1,l}, \rho_{2,l}$  неизвестны.  $H_l$  –  $z$ -координаты (глубины залегания) плоскостей, на которых распределены простой и двойной слои,  $l = 1, 2, \dots, L$ . Пусть компоненты поля заданы в конечном множестве точек  $M(x_i, y_i, z_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ; Обозначим подынтегральную функцию в первом слагаемом для  $l$ -го слоя в (4) в точке  $M(x_i, y_i, z_i)$  через  $Q_{1,l}^{(i)}$ , а во втором слагаемом – через  $Q_{2,l}^{(i)}$ . Тогда получим:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V(M_i)}{\partial z} & \equiv f_i = \\ & = \sum_{l=1}^L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\rho_{1,l}(\hat{\xi}) Q_{1,l}^{(i)}(\hat{\xi}) + \rho_{2,l}(\hat{\xi}) Q_{2,l}^{(i)}(\hat{\xi})) d\hat{\xi}, \quad (5) \\ i = & 1, 2, \dots, N, \quad \hat{\xi} = (\xi_1, \xi_2). \end{aligned}$$

На практике компоненты поля бывают заданы с некоторой погрешностью  $\delta$ , поэтому входной информацией являются значения  $f_{i,\delta}$ . С помощью решения вариационной задачи:

$$\Omega(\rho) = \sum_{l=1}^L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\rho_{1,l}^2(\hat{\xi}) + \rho_{2,l}^2(\hat{\xi})) d\hat{\xi} = \min_{\rho}, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} f_{i,\delta} - \sum_{l=1}^L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\rho_{1,l}(\hat{\xi}) Q_{1,l}^{(i)}(\hat{\xi}) + \rho_{2,l}(\hat{\xi}) Q_{2,l}^{(i)}(\hat{\xi})) d\hat{\xi} & = 0, \quad (7) \\ i = & 1, 2, \dots, N, \end{aligned}$$

получим, что искомые функции должны иметь вид [Strakhov, Stepanova, 2002a]:

$$\rho_{1,l}^{(a)}(\xi) = \tilde{\rho}_{1,l}(\xi, \lambda), \rho_{2,l}^{(a)}(\xi) = \tilde{\rho}_{2,l}(\xi, \lambda),$$

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{1,l}(\xi, \lambda) &= \sum_{i=1}^N \lambda_i Q_{1,l}^{(i)}(\xi), \tilde{\rho}_{2,l}(\xi, \lambda) = \\ &= \sum_{i=1}^N \lambda_i Q_{2,l}^{(i)}(\xi), l = 1, 2, \dots, L. \end{aligned} \quad (8)$$

$$A\lambda = f_\delta, \quad (9)$$

элементы матрицы которой в нашем случае имеют вид:

$$a_{ij} = \sum_{l=1}^L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (Q_{1,l}^{(i)}(\xi) Q_{1,l}^{(j)}(\xi) + Q_{2,l}^{(i)}(\xi) Q_{2,l}^{(j)}(\xi)) d\xi, \quad (10)$$

$$1 \leq i \leq N, \quad 1 \leq j \leq N.$$

Таким образом, приходим к следующей системе линейных уравнений

Элементы  $a_{ij}$  матрицы  $A$  могут быть вычислены явно с помощью интеграла Пуассона:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= 2\pi \sum_{l=1}^L \left\{ \frac{z_i + z_j - 2H_l}{(\sqrt{(z_i + z_j - 2H_l)^2 + (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2})^3} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(z_i + z_j - 2H_l)(9[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2] - 6(z_i + z_j - 2H_l)^2)}{(\sqrt{(z_i + z_j - 2H_l)^2 + (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2})^7} \right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$1 \leq i \leq N, \quad 1 \leq j \leq N.$$

Предположим теперь, что измеренное магнитное поле содержит компоненту, создаваемую намагниченными массами в коре Меркурия, и вектор намагниченности  $\mathbf{J}$  направлен вдоль оси  $Oz$ .

В этом случае для  $z$ -компоненты вектора магнитной индукции будет верно интегральное представление, аналогичное (11):

$$\begin{aligned} B_z(M) &= \sum_{l=1}^L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J_{1,l}(\xi)(z - H_l)z d\xi_1 d\xi_2}{[\sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + (z - H_l)^2}]^3} + \\ &+ \sum_{l=1}^L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J_{2,l}(\xi)(2(z - H_l)^2 - (x - \xi_1)^2 - (y - \xi_2)^2) d\xi_1 d\xi_2}{[\sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + (z - H_l)^2}]^5}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$M = (x, y, z).$$

В (12)  $J_{1,l}(\xi)$  и  $J_{2,l}(\xi)$  — это плотности простого и двойного слоев некоторой магнитной среды, распределенной на  $l$ -ой плоскости. Ввиду того, что Меркурий обладает магнитным динамо, как уже отмечалось во Введении, представление (12) не может выявить все особенности магнитного поля

планеты. Поэтому предположим, что измерения содержат информацию о поле, порождаемом токами внутри жидкой части ядра Меркурия. Как известно, магнитное поле вдали от элемента тока можно определить согласно закону Био-Савара-Лапласа:

$$\begin{aligned} \bar{B}(M) &= \sum_{l=1}^L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[\bar{J}_{1,l}(\xi), \bar{r}_{\xi M}] d\xi_1 d\xi_2}{[\sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + (z - H_l)^2}]^3} \\ M &= (x, y, z), \quad \bar{r}_{\xi M} = \bar{r}_{\xi,l} - \bar{r}_M, \quad \bar{r}_{\xi,l} = (\xi_{1,l}, \xi_{2,l}, H_l), \quad \bar{r}_M = (x, y, z). \end{aligned} \quad (13)$$

Через  $\bar{J}_{1,l}(\xi)$  обозначена поверхностная плотность тока на  $l$ -ой плоскости. В числителе дроби в (13) стоит векторное произведение плотности тока на разность радиус-векторов точки интегрирования и точки наблюдения. Интегральное представление

(13) записано нами в предположении о возможности применения локального варианта метода модифицированных  $S$ -аппроксимаций. Таким образом, для компонент вектора магнитной индукции мы получим выражения, аналогичные (11):

$$B_z(M) = \sum_{l=1}^L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(j_{x,l}(\xi)y_{\xi M} - j_{y,l}(\xi)x_{\xi M})d\xi_1 d\xi_2}{[\sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + (z - H_l)^2}]^3}. \quad (14)$$

Элементы матрицы системы линейных алгебраических уравнений будут выглядеть следующим образом:

$$a_{ij}^1 = 2\pi \sum_{l=1}^L \left\{ \frac{1}{[z_i + z_j - 2H_l + \sqrt{(z_i + z_j - 2H_l)^2 + r_{ij}^2}]} - \frac{(y_i - y_j)((z_i + z_j - 2H_l)(y_i - y_j) + 2(y_i - y_j)\sqrt{(z_i + z_j - 2H_l)^2 + r_{ij}^2})}{(((z_i + z_j - 2H_l)\sqrt{(z_i + z_j - 2H_l)^2 + r_{ij}^2} + (z_i + z_j - 2H_l)^2 + r_{ij}^2)^2)} \right\} \times \\ \times \frac{1}{\sqrt{(z_i + z_j - 2H_l)^2 + r_{ij}^2}}, \quad r_{ij}^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2, \quad 1 \leq i \leq N, \quad 1 \leq j \leq N.$$

$$a_{ij}^2 = 2\pi \sum_{l=1}^L \left\{ \frac{1}{[z_i + z_j - 2H_l + \sqrt{(z_i + z_j - 2H_l)^2 + r_{ij}^2}]} - \frac{(x_i - x_j)((z_i + z_j - 2H_l)(x_i - x_j) + 2(x_i - x_j)\sqrt{(z_i + z_j - 2H_l)^2 + r_{ij}^2})}{(((z_i + z_j - 2H_l)\sqrt{(z_i + z_j - 2H_l)^2 + r_{ij}^2} + (z_i + z_j - 2H_l)^2 + r_{ij}^2)^2)} \right\} \times \\ \times \frac{1}{\sqrt{(z_i + z_j - 2H_l)^2 + r_{ij}^2}}, \quad r_{ij}^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2, \quad 1 \leq i \leq N, \quad 1 \leq j \leq N.$$

$$a_{ij} = a_{ij}^1 + a_{ij}^2. \quad (15)$$

Если учитывать сферичность Меркурия, то необходимо применить региональный вариант  $S$ -аппроксимаций лапласовых полей (т.е. векторных полей, являющихся одновременно потенциальными и соленоидальными).

Представим себе идеализированный Меркурий как внутренность сферы радиуса  $R_0$ . Реальный Меркурий тогда может трактоваться как область трехмерного пространства, ограниченная замкнутой кусочно-непрерывной поверхностью  $S$ , незначительно отклоняющейся от сферы радиуса  $R_0$ . Предполагается, что приближенные значения функции  $G(x)$ , гармонической вне этой сферы, заданы в произвольном множестве точек  $x^{(i)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , на поверхности  $S$ :

$$f_{i,\delta} = f_i + \delta f_i, \quad f_i = G(x^{(i)}). \quad (16)$$

Так как  $G(x)$  гармонична при  $r > R_0$ , она имеет следующее интегральное представление:

$$G(x) = \frac{R_0^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sigma(\tilde{\vartheta}, \tilde{\varphi}) \sin \tilde{\vartheta} d\tilde{\vartheta} d\tilde{\varphi}}{R(\xi - x)} + \\ + \frac{R_0^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{w(\tilde{\vartheta}, \tilde{\varphi})(R_0 - r \cos \vartheta) \sin \tilde{\vartheta} d\tilde{\vartheta} d\tilde{\varphi}}{R^3(\xi - x)}, \quad (17) \\ R(\xi - x) = (R_0^2 - 2R_0 r \cos \vartheta' + r^2)^{1/2}, \\ \xi = (R_0 \cos \tilde{\varphi} \sin \tilde{\vartheta}, R_0 \sin \tilde{\varphi} \sin \tilde{\vartheta}, R_0 \cos \tilde{\vartheta}), \\ x = (r \cos \varphi \sin \vartheta, r \sin \varphi \sin \vartheta, r \cos \vartheta), \\ \cos \vartheta' = \sin \vartheta \sin \tilde{\vartheta} \cos(\varphi - \tilde{\varphi}) + \cos \vartheta \cos \tilde{\vartheta}.$$

Функция  $\sigma(\tilde{\vartheta}, \tilde{\varphi})$  в (17) называется плотностью простого слоя, распределенного на сфере радиуса  $R_0$ ,  $w(\tilde{\vartheta}, \tilde{\varphi})$  — плотность двойного слоя, распределенного на той же сфере;  $R(\xi - x)$  — расстояние между текущей точкой сферы  $\xi$  и точкой наблюдения  $x$ . Дифференцирование правой части (17) по различным координатам точки наблюдения  $G(x)$ , даже если эти производные (например,  $\frac{\partial V}{\partial r}$  — радиальная производная гравитационного потенциала) не являются гармоническими функциями.

Формула (17) является одной из форм интегрального представления гармонической функции вне сферы радиуса  $R$  [Владимиров, 1981]:

$$V(x) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left( \frac{1}{R(\xi - x)} \frac{\partial V(\xi)}{\partial \bar{n}} - V(\xi) \frac{\partial}{\partial \bar{n}} \left( \frac{1}{R(\xi - x)} \right) \right) \sin \tilde{\vartheta} d\tilde{\vartheta} d\tilde{\varphi}, \quad (18)$$

где  $\bar{n}$  — внешняя нормаль к единичной сфере (мы можем написать  $\frac{\partial}{\partial r}$ ,  $r$  — радиальная координата радиус-вектора  $x$ ).

Условно-вариационная задача для  $\sigma$  и  $w$  [Strakov, Stepanova, 2022b] имеет следующее решение:

$$a_{ij} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[ Q_i^{(1)}(\xi) Q_j^{(1)}(\xi) + Q_i^{(2)}(\xi) Q_j^{(2)}(\xi) \right] \sin \tilde{\vartheta} d\tilde{\vartheta} d\tilde{\varphi} = \frac{2\pi}{(h_i h_j)^{1/2} r_i r_j} \left( 1 + \frac{0.25}{r_i r_j h_i h_j} \right) F(2\arctg(\sqrt{h_i h_j}), \quad (22)$$

$$\sqrt{0.5 \times (1 + \cos \alpha_{ij})}) - \frac{\pi(3(h_i h_j)^2 - 4h_i h_j \cos \alpha_{ij} + 1)}{r_i^2 r_j^2 h_i h_j (\sqrt{1 - 2h_i h_j \cos \alpha_{ij}} + (h_i h_j)^2)^3}.$$

Здесь  $h_i = \frac{R_0}{r_i}$ ,  $h_j = \frac{R_0}{r_j}$ .  $\alpha_{ij}$  — угол между векторами  $x_i$  и  $x_j$ . Мы предполагаем, что вектор  $x_i$  параллелен оси  $Oz$ , а вектор  $x_j$  лежит в плоскости  $zOx$  (мы всегда так можем выбрать систему координат). Тогда указанные вектора будут иметь координаты:

$$x_i = (r_i, 0, 0) \quad \text{и} \quad x_j = (r_j \sin \alpha_{ij}, 0, r_j \cos \alpha_{ij}).$$

Функция  $F(\phi, k)$  — это эллиптический интеграл первого рода.

Если ограничиться представлением элементов магнитного поля Меркурия в виде потенциала простого слоя, то элементы матрицы системы (22) принимают тогда вид

$$a_{ij} = \frac{2\pi}{(h_i h_j)^{1/2} r_i r_j} F(2\arctg(\sqrt{h_i h_j}), \quad (23)$$

$$\sqrt{0.5 \times (1 + \cos \alpha_{ij})}).$$

## РЕЗУЛЬТАТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Данные миссии Messenger за несколько дней полета были интерпретированы с помощью трех различных модификаций метода линейных интегральных представлений. Точек в наборе было 10000. В файлах, содержащих “сырые данные”, указывались декартовы координаты точек наблюдения в километрах, при этом начало систе-

$$\sigma(\hat{\xi}) = \sum_{i=1}^N \lambda_i Q_i^{(1)}(\xi), \quad w(\hat{\xi}) = \sum_{i=1}^N \lambda_i Q_i^{(2)}(\xi), \quad (19)$$

$$\hat{\xi} = (\tilde{\vartheta}, \tilde{\varphi}), \quad \xi = (R, \tilde{\vartheta}, \tilde{\varphi}),$$

где  $Q_i^{(1)}(\xi)$  и  $Q_i^{(2)}(\xi)$  представляются в виде

$$Q_i^{(1)}(\xi) = \frac{1}{R(\xi - x^{(i)})}, \quad Q_i^{(2)}(\xi) = \frac{R_0 - r_i \cos \vartheta_i}{R^3(\xi - x^{(i)})}. \quad (20)$$

Величины  $\lambda_i$  являются компонентами  $N$ -вектора  $\lambda$ , дающего решение системы линейных уравнений

$$A\lambda = f_\delta, \quad f_\delta = f + \delta f, \quad (21)$$

где  $f_\delta$  имеет компоненты  $f_{i,\delta}$  (see (3)) и элементы матрицы  $A = A^T \geq 0$  записываются как

мы координат совпадает с центром масс Меркурия. Носители простого и двойного слоев при аппроксимации лапласовых полей располагались в коре Меркурия, т.е. на расстоянии от 0.1 до 100 км от поверхности планеты, а проводящая среда (см. формулу (14)) — на расстоянии 500–600 км от плоскости  $z = 0$ . При выборе интегрального представления магнитного поля Меркурия в виде поля Био—Савара мы считаем, что токопроводящая среда — это набор плоскостей с распределенными на них плотностями токов  $j_{x,l}(\xi)$ ,  $j_{y,l}(\xi)$ , а находим мы компоненту поля  $B_z$ .

Для указанной компоненты поля строятся: а) локальные; б) региональные; в) смешанные (локальные + региональные); д) “вихревые”  $S$ -аппроксимации.

Под “смешанными аппроксимациями” мы понимаем представление компонент вектора магнитной индукции в виде суммы потенциалов простого и двойного слоев, распределенных на плоскостях, а также добавление к этой сумме полей эквивалентных носителей, заданных на двух или более сферах. При этом применяется структурно-параметрический подход: для каждого из носителей определяется свой вектор решения [Salnikov et al., 2021]. Во всех случаях системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), к которым редуцируется решение обратной задачи по восстановлению магнитного поля Меркурия, решаются с помощью метода регуляризации Холецкого (БМХР) и усовершенствованного блочного

**Таблица 1.** Модифицированные  $S$ - аппроксимации  $z$ -компоненты магнитного поля Меркурия по данным Messenger

| № | $\frac{B}{N}$            | $R_0$ , км или<br>$H_1, H_2$ | Метод<br>решения<br>СЛАУ | $\sigma_{\min}$ , нТл | $\sigma_{\max}$ , нТл | $\sigma_0$ , нТл | $\frac{\Delta}{t}$               |
|---|--------------------------|------------------------------|--------------------------|-----------------------|-----------------------|------------------|----------------------------------|
| 1 | $B_z$<br>10000           | 2400                         | БМХР                     | 0.012                 | 0.024                 | 0.017            | $1.1 \times 10^{-3}$<br>41 : 12  |
| 2 | $B_z$<br>10000           | –20.5, –13.5                 | БМХР                     | 0.0027                | 0.0039                | 0.0030           | $1.4 \times 10^{-6}$<br>15 : 12  |
| 3 | $B_z$<br>10000           | –5.5, –10.5                  | УБМ                      | 0.001                 | 0.0015                | 0.0013           | $1.5 \times 10^{-8}$<br>10 : 27  |
| 4 | $B_z$<br>10000           | 2400, –10.5,<br>–5.5         | УБМ                      | 0.001                 | 0.0015                | 0.0012           | $1.45 \times 10^{-8}$<br>43 : 14 |
| 5 | $B_z, j_x, j_y$<br>10000 | –600.0<br>–650.0             | УБМ                      | 0.01                  | 0.015                 | 0.012            | $1.3 \times 10^{-4}$<br>24 : 22  |
| 6 | $B_z, j_x, j_y$<br>10000 | –500.0<br>–550.0             | УБМ                      | 0.001                 | 0.0015                | 0.0014           | $1.1 \times 10^{-7}$<br>33 : 42  |

метода решения СЛАУ (УБМ) [Раевский, Степанова, 2015a; 2015b; Gudkova et al., 2020; Степанова и др., 2020; Salnikov et al., 2021]. При этом мы полагали, что Меркурий представляет собой шар радиуса  $R_0 = 2439.0$  км. Результаты аппроксимации представлены в табл. 1.

На рис. 1a, 1б схематически обозначена область пространства, “заметаемая” траекториями движения станции Messenger; для измеренных в этой области пространства значения магнитного поля Меркурия мы попытались построить аппроксимационную конструкцию в настоящей работе. Орбита космической миссии в некоторые моменты времени достаточно далеко уходила от поверхности Меркурия (на расстояние до 0.6 среднего радиуса планеты), поэтому для выделения из “сырых” данных составляющих магнитной индукции, генерируемых токами в жидком ядре и коре — так называемого внутреннего магнитного поля Меркурия — можно воспользоваться приближением “*the thin shell approximation*” [Toepfer et al., 2021]. При таком подходе точки на-

блюдения должны находиться в пределах тонкой (по сравнению с некоторыми параметрами, характеризующими топологию планеты) оболочки, окружающей Меркурий. Полоидальное и тороидальное магнитные поля, создаваемые токами в плазме вокруг Меркурия, “исчезают” в этом случае. Мы проводили математический эксперимент, опираясь на упомянутый принцип “тонкой оболочки”: каждый отрезок из некоторого набора данных, полученных при движении спутника, вниз не выходит за пределы сферической оболочки, толщина которой составляет приблизительно 0.1 радиуса Меркурия, т.е. 240 км. Процесс построения математической модели магнитного поля условно можно разбить на несколько этапов:

1) аппроксимация измеренных вдоль всех траекторий значений магнитной индукции;

2) нахождение значений компонент вектора магнитной индукции в нескольких шаровых слоях, толщина которых не превышает 240 км, с по-

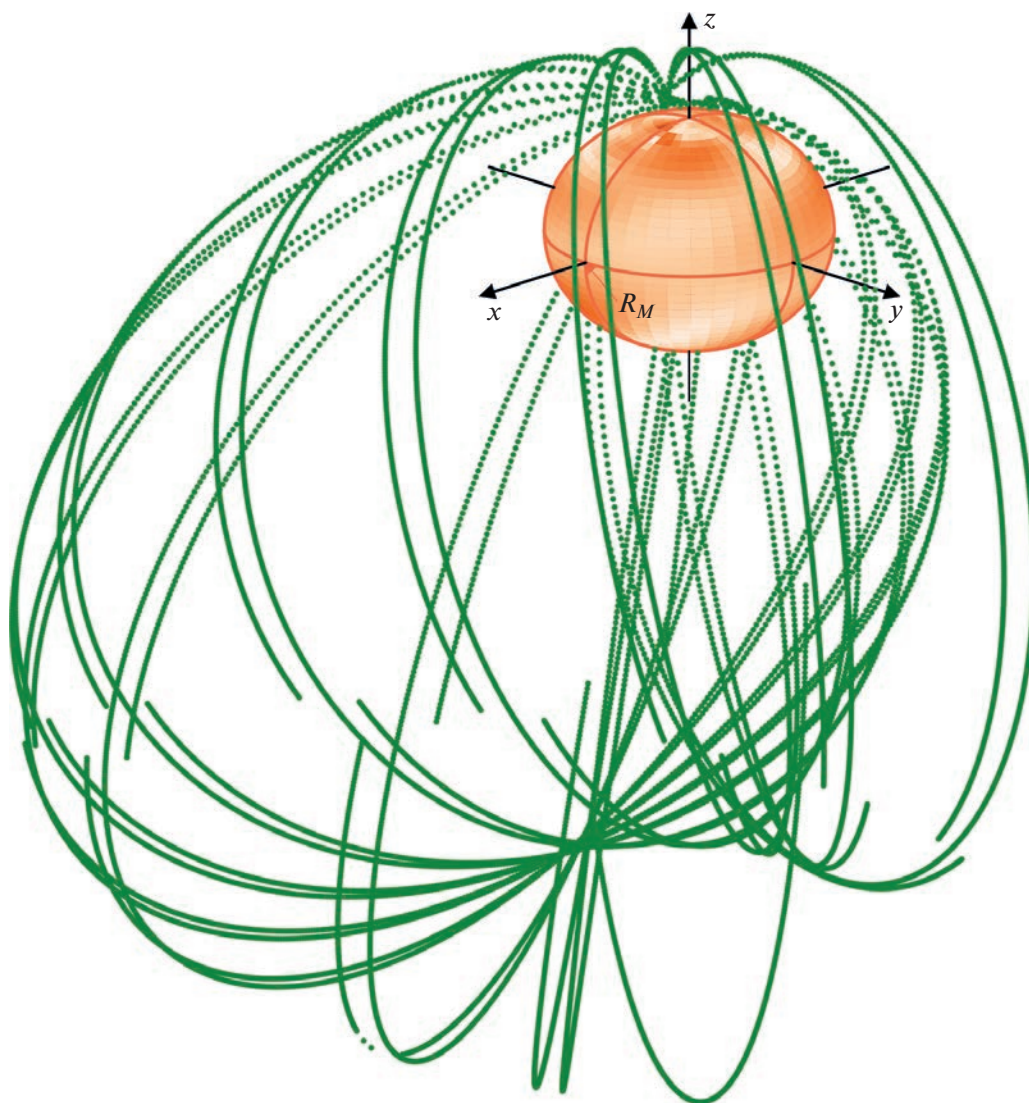


Рис. 1. Траектории полета станции MESSENGER.

мощью определенных на предыдущем этапе распределений эквивалентных источников;

3) построение аппроксимаций поля и нахождение эквивалентных распределений по синтезированным на втором этапе данным;

4) выполнение аналитических продолжений поля вниз, в сторону поверхности планеты (т.е. в сторону истинных источников магнитного поля);

5) построение в некотором смысле оптимальных аппроксимаций путем выделения из общего набора данных измерений тех точек наблюдений, которые отстоят от поверхности планеты не более, чем на 700–800 км.

Для того чтобы в наборе, по которому выполнялись аппроксимации, оставалось 10000, мы синтезировали, если можно так выразиться, дополнительные промежуточные узлы и “приписывали” им некоторые усредненные значения элементов магнитного поля. По найденным распределениям эквивалентных источников мы находили пространственное распределение элементов магнитного поля, таким образом продолжая или экстраполируя, аппроксимированное поле в другие точки рассматриваемых орбит спутника. На рис. 2 изображено магнитное поле ( $z$ -компонента) Меркурия по данным миссии Messenger на приведенном

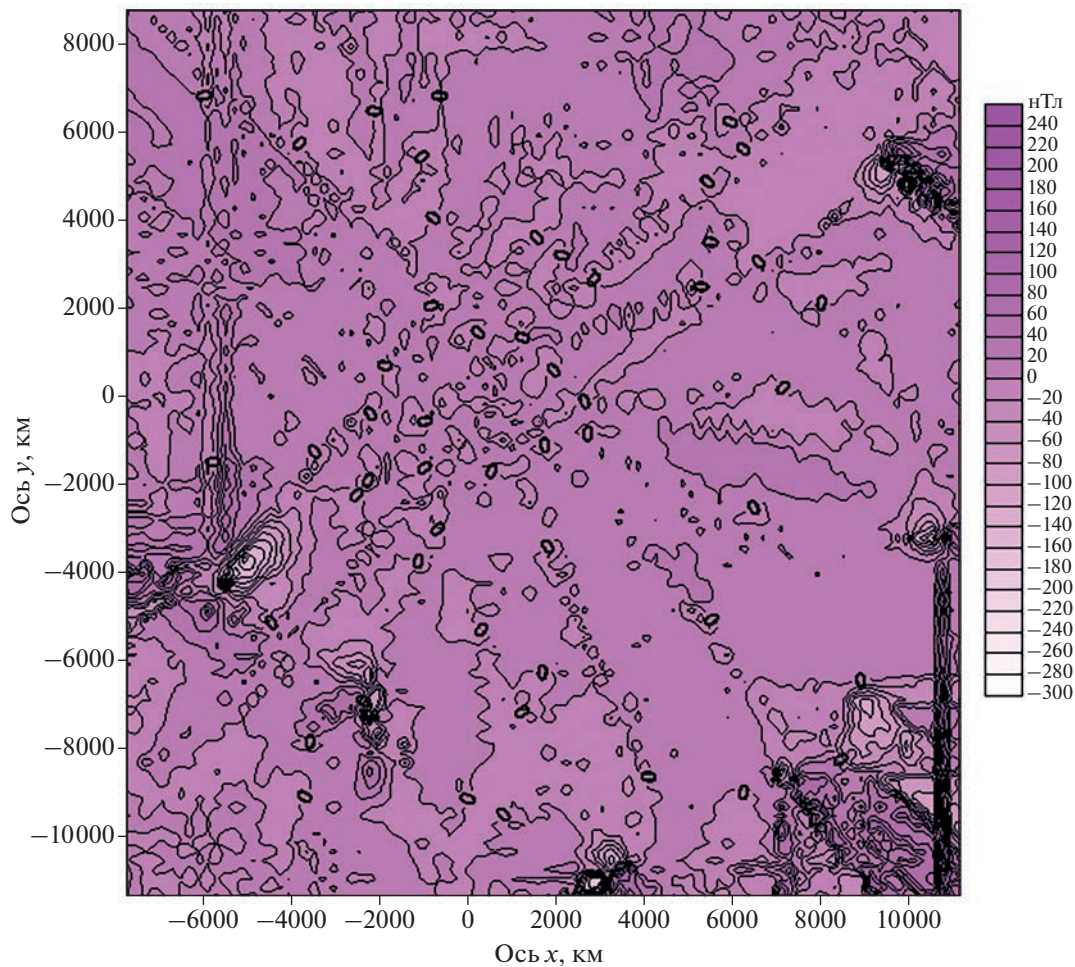


Рис. 2. Карта изолиний компоненты  $B_z$  магнитного поля по данным MESSENGER.  $N = 10000$ .

на рис. 1 участке траектории. На рис. 3 представлено магнитное поле, построенное с помощью локального варианта  $S$ -аппроксимаций (пример 3 в табл. 1), на рис. 4 – с помощью региональных аппроксимаций (пример 1, сфера одна), на рис. 5 изображена карта изолиний  $z$ -компоненты магнитной индукции на расстоянии 100 км от поверхности планеты, полученная с помощью “вихревого” варианта метода линейных интегральных представлений (пример 4 в табл. 1). Таким образом, показано, что предлагаемая методика может применяться при выполнении аналитических продолжений полей вниз, в сторону источников.

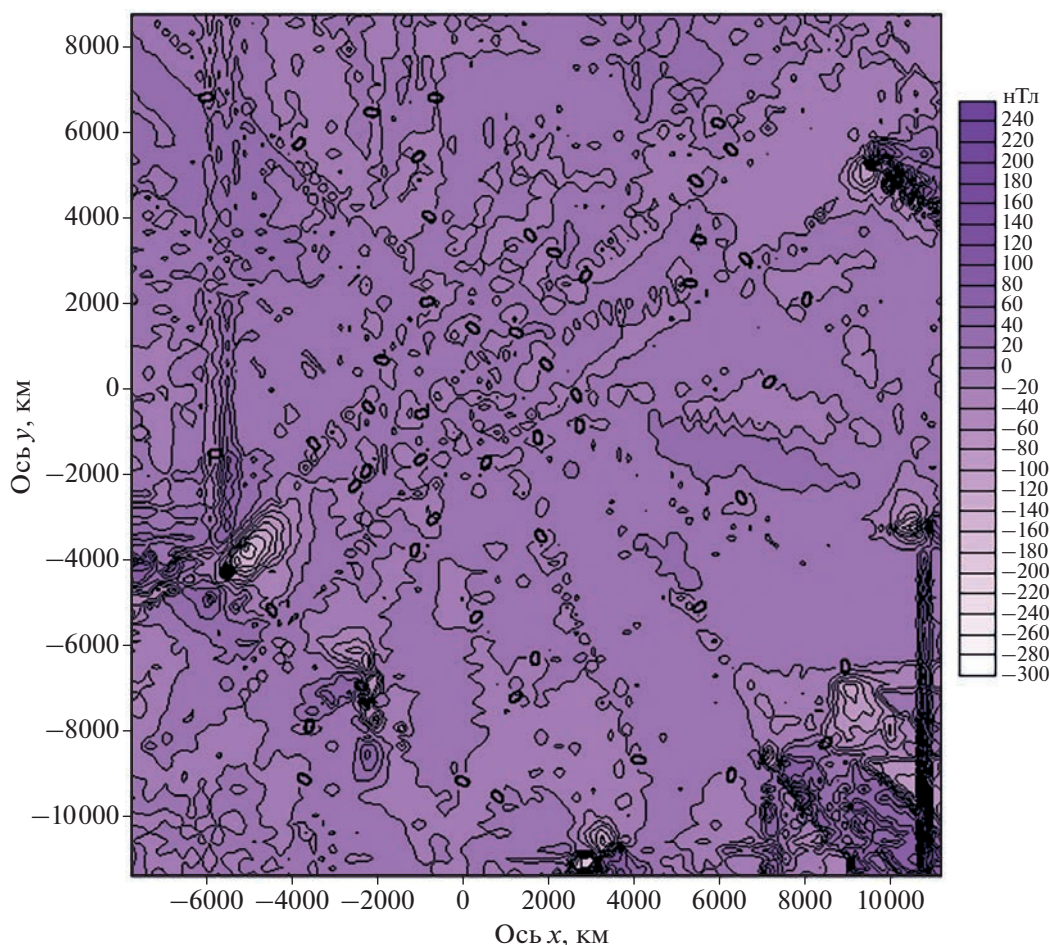
Примечания:  $\sigma = \frac{\|Ax - f_\delta\|_E}{\sqrt{N}}$  – среднее квадратическое отклонение;  $\sigma_{\max} = \sqrt{\frac{\delta_{\max}^2}{N}}$ ,  $\sigma_{\min} = \sqrt{\frac{\delta_{\min}^2}{N}}$ ;

$\Delta = \frac{\|Ax - f_\delta\|_E}{\|f_\delta\|_E}$  – показатель качества решения;

$\sigma_0$  – среднее квадратическое отклонение, полученное в результате решения СЛАУ;  $t$  – время в часах, минутах и секундах.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как уже упоминалось выше, так называемый метод ESD [Emilia, 1973; Langlais et al., 2004; Dyment, Arkani-Hamed, 1998] и его модификация, учитывающая зависимость магнитных свойств среды от времени. В основе этого метода лежит представление полного поля Меркурия (равно как и других планет Солнечной системы) в виде суперпозиции полей, создаваемых глубоко залегающими магнитными диполями. Количество таких диполей может достигать нескольких сот миллионов. Авторы метода не всегда применяют методы регуляризации при решении систем линейных алгебраических уравнений, описываю-



**Рис. 3.** Карта изолиний компоненты  $B_z$  магнитного поля.  $S$ -аппроксимация в стандартном варианте (лапласова векторного поля).  $N=10000$ .

щих связь между входными данными и неизвестными магнитными свойствами среды. Относительно глубины залегания эквивалентных по внешнему полю магнитных диполей можно сказать лишь, что источники должны быть сосредоточены в ядре или поблизости. Кроме того, авторы метода ESD полагают, что разложение магнитного поля планеты по сферическим гармоникам целесообразно находить только при наличии данных в глобальном масштабе, с охватом всей планеты. В противном случае, обратную задачу по нахождению магнитных масс решить нельзя.

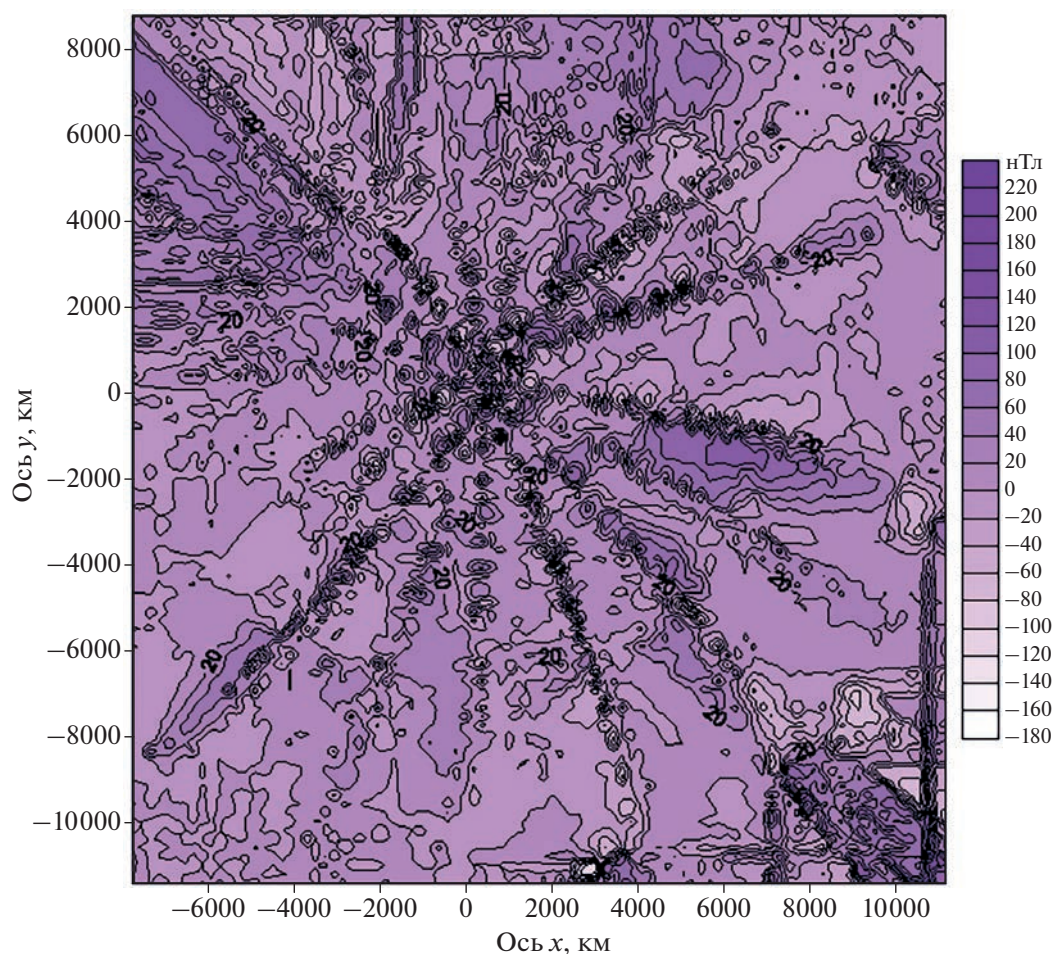
Предлагаемый в настоящей работе подход, как нам кажется, лишен недостатков метода ESD.

Он позволяет восстановить эквивалентные источники при наличии любой информации об изучаемом поле. Чем более детальной является съемка, тем точнее получается регуляризованное решение обратной задачи. Наша методика позволяет реконструировать как глобальное, так и аномальное поля. Последнее можно достаточно точно

восстановить, если из “сырых” данных, получаемых с помощью космических аппаратов, вычесть длинноволновые компоненты, соответствующие полю ядра. Однако можно аппроксимировать и исходные, “сырые”, данные.

Построение аналитических моделей магнитного поля Меркурия является в связи с вышеизложенным весьма актуальной проблемой.

В дальнейшем предполагается развить описанный в статье подход и изучить влияние геометрии орбит спутников на точность, получаемую при решении обратной задачи. Планируется также рассмотреть постановки для отдельных компонент магнитного поля Меркурия: для этой цели необходимо сначала разделить поля, генерируемые источниками различной природы. Поле литосферного происхождения может быть исследовано в локальном варианте (в этом случае носители магнитных масс можно располагать на некоторых телах известной формы и ограниченного размера). Глобальное поле предполагается



**Рис. 4.** Карта изолиний магнитного поля Меркурия вблизи поверхности, построенного с помощью региональных  $S$ -аппроксимаций.

изучать с помощью разработанной нами методики изменения топологии носителей в зависимости от структуры магнитного поля. Перспективным нам представляется также исследование временных вариаций поля на основе версии метода линейных интегральных представлений для дифференциальных операторов, зависящих от пространственных переменных и времени.

### ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В настоящей работе мы построили аналитические аппроксимации  $B_z$ -компоненты магнитного поля Меркурия в декартовой системе координат, начало которой жестко связано с центром масс планеты, а также региональные модифицированные  $S$ -аппроксимации радиальной компоненты магнитного поля. При аппроксимации поля в декартовой системе координат предполагалось, что поверхность планеты — это плоскость, а при рассмотрении региональных моделей — сфера задан-

ного радиуса. Эллиптичность планеты не учитывалась. Измерения выполнялись с помощью аппаратуры, установленной на станции MESSENGER, при ее пролетах вокруг Меркурия (мы постарались учесть результаты наблюдений на не слишком больших расстояниях от поверхности планеты). Также была предпринята попытка аналитического продолжения магнитного поля, измеренного на орбите спутником, вниз, в сторону источников. Таким образом, мы воссоздали поле на поверхности планеты и на расстоянии, приблизительно равном 100 км от Меркурия. Относительная точность математического моделирования поля на спутниковой орбите оказалась достаточно высокой — она не превышала  $1.1 \times 10^{-3}$ . Магнитометры, установленные на MESSENGER, могли измерять поле с точностью до 0.0004 нТл, но при оценке показателя качества решения,  $\Delta = \frac{\|Ax - f_\delta\|_E}{\|f_\delta\|_E}$ , необходимо учитывать

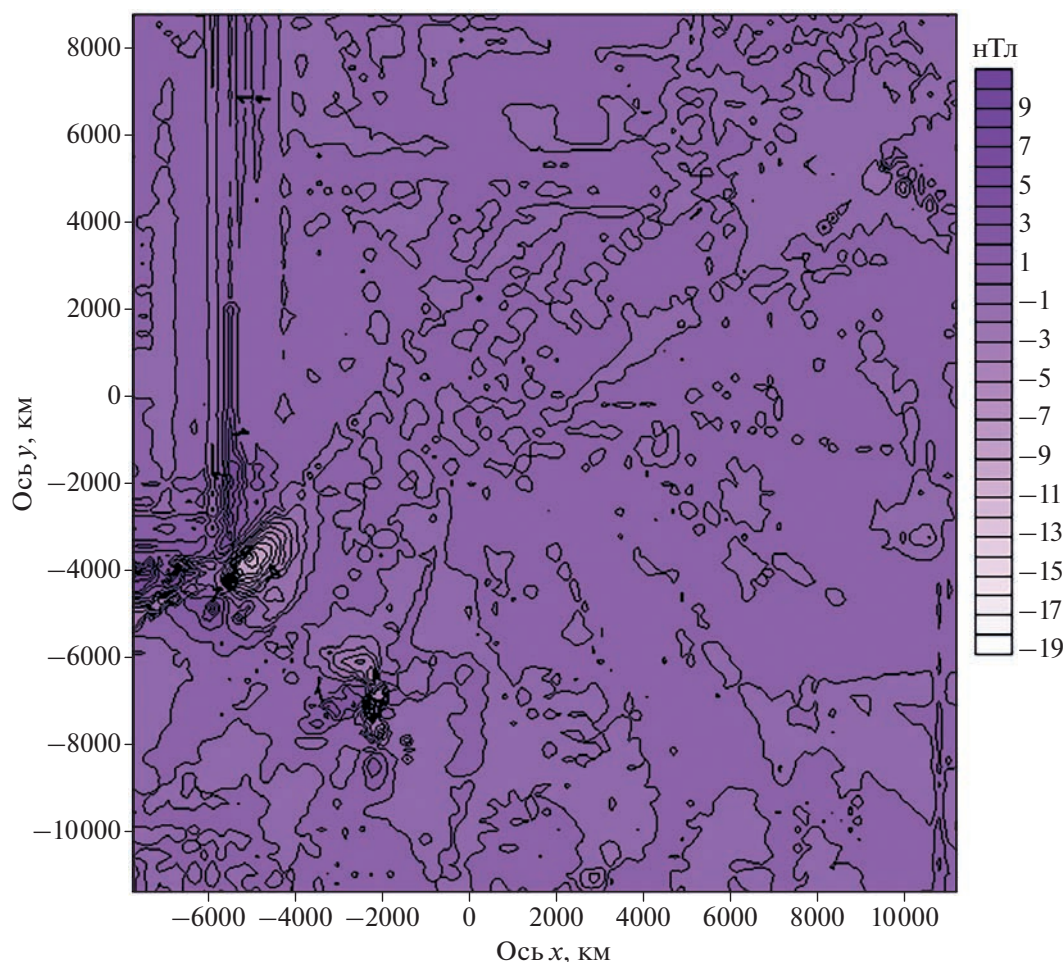


Рис. 5. Магнитное поле Меркурия на расстоянии 100 км от поверхности планеты.

множество факторов: ошибки позиционирования, систематические ошибки приборов, взаимодействие магнитных полей, наведенных в аппаратуре, и солнечного ветра и т.п. Поэтому хотелось бы подчеркнуть, что главным моментом при разработке методики математического моделирования физических полей Земли и планет должно быть соответствие полученных результатов реальным, “сырым”, данным. Аппроксимированное поле не должно “разваливаться” при приближении к поверхности планеты. Ввиду существенной неоднозначности решения обратных задач геофизики, нахождение эквивалентных по внешнему полю распределений масс является одним из возможных способов интерпретации разнородных и разноточных данных.

#### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках госзадания ИФЗ им. О.Ю. Шмидта РАН.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Арнольд В.И., Хесин Б.А. Топологические методы в гидродинамике. М.: изд-во МЦНМО. 2007. 393 с.
- Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Наука. 1980. 684 с.
- Владимиров В.В. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1981. 512 с.
- Казанцев С.Г., Кардаков В.Б. Полоидально-тороидальное разложение соленоидальных векторных полей в шаре // Сибирский журн. индустриальной математики. 2019. Т. 22. № 3. С. 74–95.
- Раевский Д.Н., Степанова И.Э. О решении обратных задач гравиметрии с помощью модифицированного метода S-аппроксимаций // Физика Земли. 2015а. № 2. С. 44–54.
- Раевский Д.Н., Степанова И.Э. Модифицированный метод S-аппроксимаций. Региональный вариант // Физика Земли. 2015б. № 2. С. 55–66.
- Степанова И.Э., Щепетилов А.В., Погорелов В.В., Михайлов П.С. Структурно-параметрический подход при построении цифровых моделей рельефа и гравитационного поля Земли с использованием аналитических

- S-аппроксимаций // Геофизические процессы и биосфера. 2020. Т. 19. № 2. С. 107–116.
- Титов В.В., Степанов Р.А., Соколов Д.Д. Переходные режимы винтового динамо // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2020. Т. 157. № 10. С. 849–857.
- Фрик П.Г., Соколов Д.Д., Степанов Р.А. Вейвлет-анализ пространственно-временной структуры физических полей // Успехи физических наук. 2021. Т. 191.
- Ягола А.Г., Степанова И.Э., Ван Янфей, Титаренко В.Н. Обратные задачи и методы их решения. Приложения к геофизике. М.: Бином. 2014. 214 с.
- Acuna M., Connerney J., Ness N., Lin R., Mitchell D., Carlson C., McFadden J., Anderson K., Reme H., Mazelle C., Vignes D., Wasilewski P., Cloutier P. Global distribution of crustal magnetism discovered by the Mars Global Surveyor/MAG/ERExperiment // Science. 1999. V. 284. P. 790–793.
- Alexeev I.I. et al. Mercury's magnetospheric magnetic field after the first two MESSENGER flybys // Icarus. 2010. V. 209. P. 23–39.  
<https://doi.org/10.1016/j.icarus.2010.01.024>
- Alken P., Thébaud E., Beggan C.D., Amit H., Aubert J., Baerenzung J. et al. International Geomagnetic Reference Field: the thirteenth generation // Earth, Planets, and Space. 2021. V. 73.
- Anderson B.J., Acuña M.H., Lohr D.A., Scheifele J., Raval A., Korth H., Slavin J.A. The magnetometer instrument on MESSENGER // Space Sci. Rev. 2007. V. 131. P. 417–450.  
<https://doi.org/10.1007/s11214-007-9246-7>
- Anderson B.J., Acuña M.H., Korth H., Purucker M.E., Johnson C.L., Slavin J.A., Solomon S.C., McNutt R.L. The structure of Mercury's magnetic field from MESSENGER's first flyby // Science. 2008. V. 321. P. 82–85.  
<https://doi.org/10.1126/science.1159081>
- Anderson B. J. et al. The magnetic field of Mercury // Space Sci. Rev. 2010. V. 152. P. 307–339.  
<https://doi.org/10.1007/s11214-009-9544-3>
- Anderson B.J., Johnson C.L., Korth H., Purucker M.E., Winslow R.M., Slavin J.A., Solomon S.C., McNutt R.L., Raines J.M., Zurbuchen T.H. The global magnetic field of Mercury from MESSENGER orbital observations // Science. 2011. V. 333. P. 1859–1862.  
<https://doi.org/10.1126/science.1211001>
- Anderson B.J. et al. Low-degree structure in Mercury's planetary magnetic field // J. Geophys. Res. 2012. V. 117. P. E00L12.  
<https://doi.org/10.1029/2012JE004159>
- Anderson B.J., Johnson C.L., Korth H. A magnetic disturbance index for Mercury's magnetic field derived from MESSENGER magnetometer data // Geochem. Geophys. Geosyst. 2013. V. 14. P. 3875–3886.  
<https://doi.org/10.1002/ggge.20242>
- Arkani-Hamed J. An improved 50-degree spherical harmonic model of the magnetic field of Mars derived from both high-altitude and low-altitude data // J. Geophysical Research (Planets). 2002. V. 107. P. 5083.  
<https://doi.org/10.1029/2001JE001835>
- Benkhoff J., van Casteren J., Hayakawa H., Fujimoto M., Laakso H., Novara M., Ferri P., Middleton H.R., Ziethe R. BepiColombo—Comprehensive exploration of Mercury: Mission overview and science goals // Planet. Space Sci. 2010. V. 58. P. 2–20.  
<https://doi.org/10.1016/j.pss.2009.09.020>
- Cain J. C., Wang Z., Kluth C., Schmitz D. R. Derivation of a geomagnetic model to  $N = 63$  // Geophys. J. 1989. V. 97. P. 431–441.
- Cao H., Aurnou J. M., Wicht J., Dietrich W., Soderlund K. M., Russell C. T. A dynamo explanation for Mercury's anomalous magnetic field // Geophys. Res. Lett. 2014. V. 41. P. 4127–4134.  
<https://doi.org/10.1002/2014GL060196>
- Christensen U. R. A deep dynamo generating Mercury's magnetic field // Nature. 2006. V. 444. P. 1056–1058.  
<https://doi.org/10.1038/nature05342>
- Christensen U. R., Tilgner A. Power requirement of the geodynamo from ohmic losses in numerical and laboratory dynamos // Nature. 2004. V. 429. P. 169–171.  
<https://doi.org/10.1038/nature02508>
- Connerney J. E. P., Ness N. F., Acuna M. H. Zonal harmonic model of Saturn's magnetic field from Voyager 1 and 2 observations // Nature. 1982. V. 298. P. 44–46.  
<https://doi.org/10.1038/298044a0>
- Dietrich W., Wicht J. A hemispherical dynamo model: Implications for the Martian crustal magnetization // Phys. Earth Planet. Inter. 2013. V. 217. P. 10–21.  
<https://doi.org/10.1016/j.pepi.2013.01.001>
- Dyment J., Arkani-Hamed J. Equivalent source magnetic dipoles revisited // Geophys. Res. Lett. 1998. V. 25(11). P. 2003–2006.  
<https://doi.org/10.1029/98GL51331>
- Emilia D. A. Equivalent sources used as an analytic base for processing total magnetic field profiles // Geophysics. 1973. V. 38. P. 339–348.  
<https://doi.org/10.1190/1.1440344>
- Gudkova T., Stepanova I., Batov A., Shchepetilov A. Modified method S- and R-approximations in solving the problems of Mars's morphology // Inverse Problems in Science and Engineering. 2021. V. 29. P. 790–804.  
<https://doi.org/10.1080/17415977.2020.1813125>
- Gudkova T., Stepanova I., Batov A. Density anomalies in subsurface layers of Mars: model estimates for the Site of the InSight Mission Seismometer // Solar System Research. 2020. V. 54. P. 15–19.  
<https://doi.org/10.1134/S0038094620010037>
- Gubbins D. Time Series Analysis and Inverse Theory for Geophysicists. Cambridge Univ. Press. Cambridge. 2004. 272 p.
- Holme R., Bloxham J. The magnetic fields of Uranus and Neptune: Methods and models // J. Geophys. Res. 1996. V. 101. P. 2177–2200.  
<https://doi.org/10.1029/95JE03437>
- Hood L. L., Oliveira J. S., Galluzzi V. D., Rothery A. Investigating sources of Mercury's crustal magnetic field: further mapping of Messenger magnetometer data, JGR Planets. 29 August. 2018.  
<https://doi.org/10.1029/2018JE005683>
- Hulot G., Le Mouél J. L. A statistical approach to the Earth's main magnetic field // Phys. Earth Planet. Inter. 1994. V. 82. P. 167–183.  
[https://doi.org/10.1016/0031-9201\(94\)90070-1](https://doi.org/10.1016/0031-9201(94)90070-1)

- Johnson C.L. et al. MESSENGER observations of Mercury's magnetic field structure // *J. Geophys. Res.* 2012. V. 117. P. E00L14.  
<https://doi.org/10.1029/2012JE004217>
- Katanforoush A., Shahshahani M. (2003), Distributing points on the sphere // *Exp. Math.* 2003. V. 12. P. 199–209.
- Kolotov I.I., Lukyanenko D.V., Stepanova I.E., Wang Y., Yagola A.G., Recovering the magnetic properties of Mercury from satellite observations // *Eurasian J. Mathematical and Computer Applications*, 2022. V. 10. № 2. P. 26–41.
- Kutzner C., Christensen U.R. From stable dipolar towards reversing numerical dynamos // *Phys. Earth Planet. Inter.* 2002. V. 131. P. 29–45.  
[https://doi.org/10.1016/S0031-9201\(02\)00016-X](https://doi.org/10.1016/S0031-9201(02)00016-X)
- Langlais B., Purucker M. A polar magnetic paleopole associated with Apollinaris Patera, Mars // *Planet. Space Sci.* 2007. V. 55. P. 270–279.  
<https://doi.org/10.1016/j.pss.2006.03.008>
- Langlais B., Purucker M.E., Mandea M. Crustal magnetic field of Mars // *J. Geophys. Res.* 2004. V. 109. P. E02008.  
<https://doi.org/10.1029/2003JE002048>
- Lhuillier F., Aubert J., Hulot G. Earth's dynamo limit of predictability controlled by magnetic dissipation // *Geophys. J. Int.* 2011. V. 186. P. 492–508.  
<https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2011.05081.x>
- Margot J.L., Peale S.J., Jurgens R.F., Slade M.A., Holin I.V. Large longitude libration of Mercury reveals a molten core // *Science*. 2007. V. 316. P. 710–714.  
<https://doi.org/10.1126/science.1140514>
- Maus S., Rother M., Stolle C., Mai W., Choi S., Lühr H., Cooke D., Roth C. Third generation of the Potsdam Magnetic Model of the Earth (POMME) // *J. Geophys. Res.* 2006. V. 7. P. Q07008.  
<https://doi.org/10.1029/2006GC001269>
- Mayhew M.A. Inversion of satellite magnetic anomaly data // *J. Geophys.* 1979. V. 45. P. 119–128.
- Messenger Mission: Magnetometer (MAG) Instrument. — URL: <https://pds-ppi.igpp.ucla.edu/search/view/?f=yes&id=pds://PPI/mess-mag-calibrated/data/mbf/2011>
- Milillo A., Fujimoto M., Murakami G., Benkhoff J., Zender J., Aizawa, S. et al. Investigating Mercury's Environment with the Two-Spacecraft BepiColombo Mission // *Space Science Reviews*. 2020. V. 216. P. 93.
- Mittelholz A., Johnson C.L., Feinberg J.M., Langlais B., Philips R.J. Timing of the martian dynamo: New constraints for a core field 4.5 and 3.7 Ga ago // *Science Advances*. 2020. V. 6.
- Ness N.F., Behannon K.W., Lepping R.P., Whang Y.C., Schatten K.H. Magnetic field observations near Mercury: Preliminary results from Mariner 10 // *Science*. 1974. V. 185. P. 151–160.  
<https://doi.org/10.1126/science.185.4146.151>
- Ness N.F., Behannon K.W., Lepping R.P., Whang Y.C. The magnetic field of Mercury, 1 // *J. Geophys. Res.* 1975. V. 80. P. 2708–2716.  
<https://doi.org/10.1029/JA080i019p02708>
- Oliveira J.S., Langlais B., Pais M.A., Amit H. A modified equivalent source dipole method to model partially distributed magnetic field measurements, with application to Mercury, *JGR Planets*. 15 May. 2015.  
<https://doi.org/10.1002/2014JE004734>
- Philpott L.C., Johnson C.L., Winslow R.M., Anderson B.J., Korth H., Purucker M.E., Solomon S.C. Constraints on the secular variation of Mercury's magnetic field from the combined analysis of MESSENGER and Mariner 10 data // *Geophys. Res. Lett.* 2014. V. 41. P. 6627–6634.  
<https://doi.org/10.1002/2014GL061401>
- Plagemann S. Model of the internal constitution and temperature of the planet Mercury // *J. Geophys. Res.* 1965. V. 70. P. 985–993.  
<https://doi.org/10.1029/JZ070i004p00985>
- Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P. Numerical Recipes in C. The Art of Scientific Computing. 2nd ed. Cambridge Univ. Press. 1992.
- Purucker M., Ravat D., Frey H., Voorhies C., Sabaka T., Acuña M. An altitude-normalized magnetic map of Mars and its interpretation // *Geophys. Res. Lett.* 2000. V. 27. P. 2449–2452.  
<https://doi.org/10.1029/2000GL000072>
- Purucker M., Langlais B., Olsen N., Hulot G., Mandea M. The southern edge of cratonic North America: Evidence from new satellite magnetometer observations // *Geophys. Res. Lett.* 2002. V. 29. P. 1342.  
<https://doi.org/10.1029/2001GL013645>
- Purucker M.E., Sabaka T.J., Langel R.A. Conjugate gradient analysis: A new tool for studying satellite magnetic data sets // *Geophys. Res. Lett.* 1996. V. 23. P. 507–510.  
<https://doi.org/10.1029/96GL00388>
- Purucker M.E., Langel R.A., Rajaram M., Raymond C. Global magnetization models with a priori information // *J. Geophys. Res.* 1998. V. 103. P. 2563–2584.  
<https://doi.org/10.1029/97JB02935>
- Reshetnyak M.Yu. Spatial Spectra of the geomagnetic Field in the Observations and Geodynamo Models // *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*. 2015. V. 51. № 3. P. 354–361.
- Salnikov A., Stepanova I., Gudkova T., Batov A. Analytical modeling of the magnetic field of Mars from satellite data using modified S-approximations // *Doklady Earth Sciences*. 2021. V. 499. P. 575–579.
- Schubert G., Chan K.H., Liao X., Zhang K. Planetary dynamos: Effects of electrically conducting flows overlying turbulent regions of magnetic field generation // *Icarus*. 2004. V. 172. P. 305–315.  
<https://doi.org/10.1016/j.icarus.2004.06.007>
- Smith D. E. et al. Gravity field and internal structure of Mercury from MESSENGER // *Science*. 2012. V. 336. P. 214–217.  
<https://doi.org/10.1126/science.1218809>
- Solomon S. C. et al. The MESSENGER mission to Mercury: Scientific objectives and implementation // *Planet. Space Sci.* 2001. V. 49. P. 1445–1465.  
[https://doi.org/10.1016/S0032-0633\(01\)00085-X](https://doi.org/10.1016/S0032-0633(01)00085-X)
- Stanley S., Elkins-Tanton L., Zuber M.T., Parmentier E.M. Mars' paleomagnetic field as the result of a single-hemisphere dynamo // *Science*. 2008. V. 321. P. 1822–1825.  
<https://doi.org/10.1126/science.1161119>

- Stevenson D.J. Saturn's luminosity and magnetism // *Science*. 1980. V. 208. P. 746–748.  
<https://doi.org/10.1126/science.208.4445.746>
- Stevenson D.J. Reducing the non-axisymmetry of a planetary dynamo and an application to Saturn // *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* 1982. V. 21. P. 113–127.  
<https://doi.org/10.1080/03091928208209008>
- Strakhov V., Stepanova I. The S-approximation method and its application to gravity problems // *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*. 2002. V. 16. P. 91–107.
- Strakhov V., Stepanova I. Solution of gravity problems by the S-approximation method (Regional Version) // *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*. 2002. V. 16. P. 535–544.
- Thébault E., Schott J.J., Manda M. Revised spherical cap harmonic analysis (R-SCHA): Validation and properties // *J. Geophys. Res.* 2006. V. 111. P. B01102.  
<https://doi.org/10.1029/2005JB003836>
- Toepfer S., Narita Y., Glassmeier K.H. et al. The Mie representation for Mercury's magnetic field // *Earth Planets Space*. 2021. V. 73. P. 65.  
<https://doi.org/10.1186/s40623-021-01386-4>
- Uno H., Anderson B.J., Korth H., Johnson C.L., Solomon S.C. Modeling Mercury's internal magnetic field with smooth inversions // *Earth Planet. Sci. Lett.* 2009. V. 285. P. 328–339.  
<https://doi.org/10.1016/j.epsl.2009.02.032>
- Verhoeven O., Tarits P., Vacher P., Rivoldini A., van Hoolst T. Composition and formation of Mercury: Constraints from future electrical conductivity measurements // *Planet. Space Sci.* 2009. V. 57. P. 296–305.  
<https://doi.org/10.1016/j.pss.2008.11.015>
- Vilim R., Stanley S., Hauck S.A. Iron snow zones as a mechanism for generating Mercury's weak observed magnetic field // *J. Geophys. Res.* 2010. V. 115. P. E11003.  
<https://doi.org/10.1029/2009JE003528>
- von Frese R.R.B., Hinze W.J., Braile L.W. Spherical Earth gravity and magnetic anomaly analysis by equivalent point source inversion // *Earth Planet. Sci. Lett.* 1981. V. 53. P. 69–83.  
[https://doi.org/10.1016/0012-821X\(81\)90027-3](https://doi.org/10.1016/0012-821X(81)90027-3)
- Wang Y., Kolotov I.I., Lukyanenko D.V., Stepanova I.E., Yagola A.G. Methods of recovering of the magnetic fields using experimental data. Марчуровские научные чтения-2022: Тезисы Междунар. конф., 3–7 октября 2022 г, место издания Ин-т вычислит. математики и матем. геофизики СО РАН. Академгородок, Новосибирск, Россия, тезисы. с. 10.
- Waler K.A., Purucker M.E. A spatially continuous magnetization model for Mars // *J. Geophys. Res.* 2005. V. 110. P. E09001.  
<https://doi.org/10.1029/2004JE002393>
- Wicht J., Heyner D. Mercury's magnetic field in the MESSENGER era. *Planetary Geodesy and Remote Sensing* / S. Jin (ed.). CRC Press. 2014. P. 223–262.  
<https://doi.org/10.1201/b17624-11>

## On Constructing Analytical Models of the Magnetic Field of Mercury from Satellite Data

I. E. Stepanova<sup>a, \*</sup>, A. G. Yagola<sup>b</sup>, D. V. Luk'yanenko<sup>b</sup>, and I. I. Kolotov<sup>b</sup>

<sup>a</sup> *Schmidt Institute of Physics of the Earth, Russian Academy of Sciences, Moscow, 123242 Russia*

<sup>b</sup> *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

\*e-mail: tet@ifz.ru

**Abstract**—A new method is proposed for analytical description of the magnetic field of the Mercury from the data of satellite missions based on the local and regional versions of the linear integral representation method. The inverse problem on finding the sources of the field is reduced to solving ill-conditioned systems of linear algebraic equations with an approximately set right-hand part. The charts of the isolines of the  $z$ -component of the magnetic inductance vector in the Cartesian coordinate system rigidly connected with the planet, as well as the regional S-approximation of the field radial component are plotted. The results of the mathematical experiment on analytic continuation of the magnetic field towards the sources are presented.

**Keywords:** magnetic field, Laplace field, linear integral representations, Biot, Savart field