

## ПОПРАВКИ К ТЕОРИИ УПРУГОГО ИЗГИБА ТОНКИХ ПЛИТ ДЛЯ 2D-МОДЕЛЕЙ В ПРИБЛИЖЕНИИ РЕЙСНЕРА

© 2023 г. А. П. Трубицын<sup>1</sup>, \*, В. П. Трубицын<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, г. Москва, Россия

\*E-mail: atrub@yandex.ru

Поступила в редакцию 18.02.2022 г.

После доработки 07.02.2023 г.

Принята к публикации 01.03.2023 г.

Расчеты упругих изгибных напряжений и деформаций в литосфере обычно проводятся на основе теории Кирхгофа–Лява для тонких плит. Критерием ее применимости является малость отношения толщины плиты к ее длине. В океанических плитах благодаря выталкивающей силе мантии основные деформации распределены не равномерно вдоль плиты, а сосредоточены вблизи зоны субдукции. Поэтому эффективная длина изгибающейся части плиты в несколько раз меньше реальной длины, и критерий тонкости плит частично нарушается. В работе анализируется возможность применения уравнений изгиба толстых плит. Имеющиеся вариационные теории 3D-изгиба толстых плит намного более сложные по сравнению с теорией Кирхгофа–Лява, так как требуют решения не одного дифференциального уравнения, а трех, и из-за трудоемкости имеют ограниченное применение. Поскольку в геофизических приложениях часто используются 2D-модели, то в работе детально анализируются возможности и точность теории изгиба толстых пластин для 2D-моделей. Оригинальные уравнения 3D-изгиба толстых плит Рейснера после перехода к 2D для плоской деформации и плоского напряжения выписываются в форме, аналогичной уравнениям Кирхгофа с аддитивными поправками, и дополняются явными выражениями для продольного смещения. Сравнение аналитических решений 2D-уравнений Рейснера с точными решениями показывает, что она дает поправку только для функции изгиба плиты. Но эта поправка уточняет теорию Кирхгофа–Лява почти на порядок. При этом решение уравнений оказывается практически таким же простым, как и уравнений тонких плит.

*Ключевые слова:* океанические плиты, изгибы, деформации.

**DOI:** 10.31857/S0002333723040129, **EDN:** TMLDDQ

### 1. ВВЕДЕНИЕ

#### 1.1. Изгибы океанических плит

Теория упругого изгиба тонких пластин широко используется при изучении тектоники литосферы. Примером может служить расчет изгиба литосферных плит в зоне субдукции. На рис. 1 изображен профиль океанической плиты толщиной  $h$  вблизи зоны субдукции.

Величину вертикального смещения срединной линии плиты, называемую функцией изгиба, обозначают через  $w(x)$ . Ось  $z$  обычно направляют вниз и  $x$  – вправо. Верхнюю и нижнюю поверхности плиты обычно принимают скользящими, с нулевыми касательными напряжениями

$$\sigma_{xz}(x, z = -h/2) = \sigma_{xz}(x, z = h/2) = 0. \quad (1)$$

При двух сжимающих нагрузках с абсолютной величиной  $q_1$  на верхней и  $q_2$  на нижней поверхности плиты граничное условие для нормальных напряжений имеет вид (положительными считаются растягивающие напряжения):

$$\sigma_{zz}(x, z = -h/2) = -q_1(x), \quad (2)$$

$$\sigma_{zz}(x, z = h/2) = -q_2(x). \quad (3)$$

На концах плиты  $x = 0$  и  $x = L$  обычно задают заранее неизвестные поперечные силы и изгибающие моменты [Теркот, Шуберт, 1985]. Однако удобнее задавать известные по измерениям вертикальное смещение  $w_0$  (глубина субдукции) и его производную  $\varphi = dw/dx$  (угол погружения плиты) [Трубицын, Трубицын, 2022]

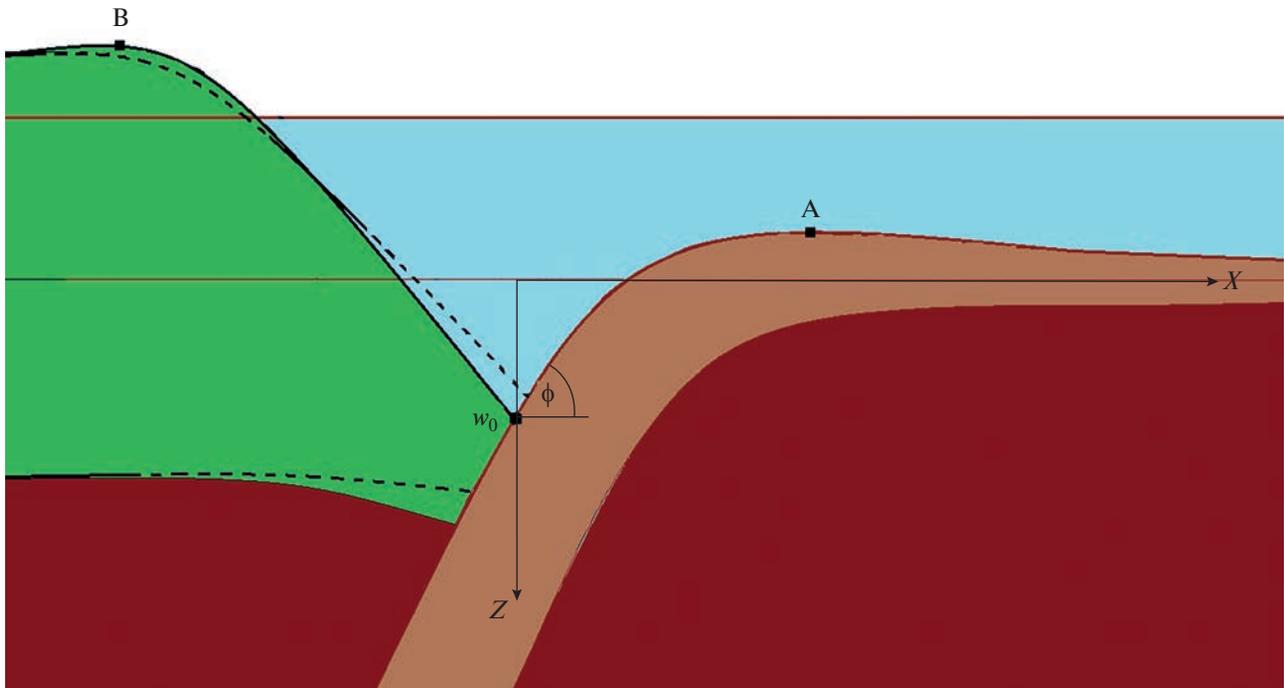
$$w(x = 0) = w_0, \quad (4)$$

$$w'(x = 0) = w'_0, \quad (5)$$

$$w(x = L) = w_L, \quad (6)$$

$$w'(x = L) = w'_L. \quad (7)$$

Океанические плиты изгибаются в основном вдоль направления от хребта до зоны субдукции, по оси  $x$ . В перпендикулярном направлении по



**Рис. 1.** Изогнутая океаническая плита (коричневый цвет) и край континентальной плиты (зеленый цвет) вблизи желоба. Пунктиром показан континентальный край, выпрямляющийся после землетрясения при уменьшении силы трения с погружающейся океанической плитой. Глубина желоба –  $w_0$ , угол субдукции –  $\phi$ , внешнее поднятие (выгиб) океанической плиты – А, континентального края – В. Масштаб по вертикальной оси преувеличен.

оси  $y$  соседние плиты разделены трансформными разломами, для которых можно приближенно принять условие касательного скольжения и нулевого нормального смещения. Тогда, если все свойства плиты и граничные условия на торцах не зависят от координаты  $y$ , то напряженное состояние плиты будут соответствовать плоской деформации. В настоящее время напряженное состояние океанических плит изучают, в основном, на такой модели цилиндрического изгиба [Теркот, Шуберт, 1985], хотя есть работы и по трехмерным моделям океанических плит.

Тело называют пластиной, если отношение ее толщины к длине  $h/L < 1/3$ . При  $h/L < 1/10$  пластина считается тонкой,  $h/L < 1/10 - 1/5$  – умеренной толщины, при  $1/5 < h/L < 1/3$  – толстой. В геофизике расчеты напряженного состояния океанических плит по настоящее время проводятся только на основе теории изгиба тонких пластин Кирхгофа. Длины океанических плит имеют порядок  $L \sim 1000$  км, и при толщине  $h \sim 50$  км их отношение  $h/L \sim 1/20$ . Поэтому ранее не было сомнений в высокой точности расчетов при использовании теории Кирхгофа. Однако нужно учесть, что деформации изгиба океанических плит распределены не равномерно по их длине, а сосредоточены вблизи зоны субдукции. Типичная эффективная длина плит (размер области сосредоточения деформаций)  $L_{ef} < 200$  км. Поэтому при толщине упругого слоя плиты  $h \approx 50$  км отноше-

ние  $h/L \sim 1/4$ , и в теории изгиба литосферных плит возникает необходимость нахождения поправок. Их величина может быть порядка  $(h/L)^2 \sim 10\%$ .

Отметим, что кроме океанических плит, теорию изгиба можно применить и к активным окраинам континентальных плит (см. рис. 2), которые благодаря сцеплению с погружающейся океанической плитой продольно сжимаются и изгибаются перед землетрясением с профилем, аналогичным океанической плите, а после землетрясения частично восстанавливаются [Трубицын, 2012].

## 1.2. Общие 2D-уравнения теории упругости

При ненулевом коэффициенте Пуассона упругие деформации в разных плоскостях взаимно связаны. Поэтому двумерные модели напряженно-деформированного состояния, не зависящие от третьей координаты  $y$ , возможны только в двух случаях, когда не только свойства среды и внешние силы не зависят от координаты  $y$ , но на боковых поверхностях, кроме условия скольжения, задано условие или нулевого нормального напряжения, или нулевого нормального смещения.

В моделях плоского напряженного состояния принимается равным нулю нормальное напряжение  $\sigma_{yy} = 0$ , касательные напряжения  $\sigma_{xy} = 0$ ,  $\sigma_{zy} = 0$  и деформации  $\epsilon_{yx} = 0$ ,  $\epsilon_{yz} = 0$ . Обычно эта модель

относится к узким балкам со свободными на боках граничными условиями. При этом, хотя, строго говоря, условия совместности выполняются только при стремлении ширины балки к нулю, эта модель имеет большое применение. В модели плоского напряжения общие уравнения упругости для 15 компонент напряженного состояния сводятся к 11 уравнениям для четырех компонент смещений, четырех деформаций и трех напряжений (являющихся функциями  $x$  и  $z$ ) [Тимошенко, 1937; 1972]. Соотношения Коши:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Соотношения Гука:

$$\begin{aligned} E\varepsilon_{xx} &= \sigma_{xx} - \nu\sigma_{zz}, \quad E\varepsilon_{zz} = \sigma_{zz} - \nu\sigma_{xx}, \\ E\varepsilon_{xz} &= (1 + \nu)\sigma_{xz}, \quad E\varepsilon_{yy} = -\nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{zz}), \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_{zz} + \nu\varepsilon_{xx}), \\ \sigma_{xz} &= \frac{E}{1 + \nu} \varepsilon_{xz}, \quad \sigma_{yy} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнения равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0. \quad (11)$$

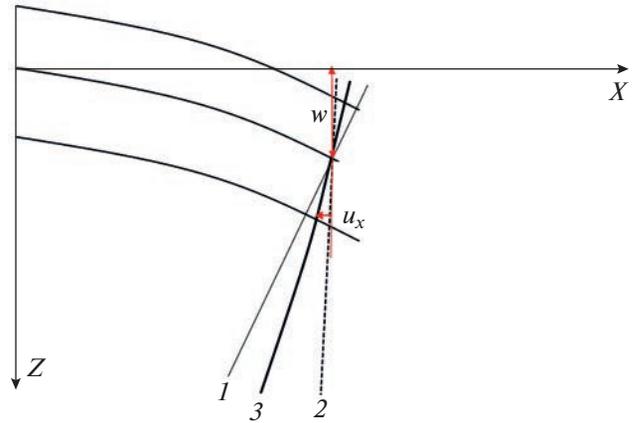
В моделях плоской деформации принимается равным нулю смещение  $u_y = 0$ , то есть все смещения лежат в одной плоскости  $u_x = u_x(x, z)$ ,  $u_z = u_z(x, z)$ . Также равны нулю деформации  $\varepsilon_{yy} = 0$ ,  $\varepsilon_{yx} = 0$ ,  $\varepsilon_{yz} = 0$  и напряжения  $\sigma_{xy} = 0$ ,  $\sigma_{zy} = 0$ . В этой модели условия совместности выполняются при любой ширине, и она применяется для плит, которые стеснены по нормали с боков, а также могут быть защемлены по торцам. Общие уравнения упругости для 15 компонент напряженного состояния при плоской деформации сводятся к 9 уравнениям для двух компонент смещений, трех деформаций и четырех напряжений (являющихся функциями  $x$  и  $z$ ) [Тимошенко, 1972].

Из общего соотношения Гука  $E\varepsilon_{yy} = \sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx} - \nu\sigma_{zz}$  при  $\varepsilon_{yy} = 0$  следует, что

$$\sigma_{yy} = -\nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}). \quad (12)$$

Формулы Коши остаются теми же:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (13)$$



**Рис. 2.** Схематическое представление деформаций изгиба плиты: 0 – вертикальное начальное положение поперечного сечения; 1 – поворот сечения без учета сдвига с сохранением перпендикулярности к средней линии; 2 – поворот с учетом дополнительного поворота благодаря поперечному сдвигу с сохранением прямолинейности; 3 –  $\partial u_x / \partial z$  полный поворот поперечного сечения с учетом поворота прямого сечения и с учетом его изгиба. Ось  $x$  направлена вправо, ось  $z$  – вниз, продольное смещение в нижней половине плиты (вдоль оси  $z$ ) направлено влево (против оси  $x$ ).

С учетом (12) остальные формулы закона Гука упрощаются:

$$\begin{aligned} E\varepsilon_{xx} &= (1 - \nu^2)\sigma_{xx} - \nu(1 + \nu)\sigma_{zz}, \\ E\varepsilon_{zz} &= (1 - \nu^2)\sigma_{zz} - \nu(1 + \nu)\sigma_{xx}, \\ E\varepsilon_{xz} &= (1 + \nu)\sigma_{xz}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} (1 + \nu)(1 - 2\nu)\sigma_{xx} &= E[(1 - \nu)\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{zz}], \\ (1 + \nu)(1 - 2\nu)\sigma_{zz} &= E[(1 - \nu)\varepsilon_{zz} + \nu\varepsilon_{xx}], \\ (1 + \nu)\sigma_{xz} &= E\varepsilon_{xz}. \end{aligned} \quad (15)$$

Уравнения равновесия сохраняют прежний вид:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0. \quad (16)$$

При сравнении (8)–(11) и (12)–(16) видно, что все уравнения для плоской деформации (для изгиба плиты, *plate*) можно получить из уравнений для плоского напряжения (для изгиба балки *beam*) заменой:

$$E \rightarrow E/(1 - \nu^2), \quad \nu \rightarrow \nu/(1 - \nu), \quad (17)$$

Свободную с боков узкую балку изогнуть легче, чем закрепленную с боков плиту.

Продифференцировав соотношения Коши по  $x$  и  $z$  и учитывая соотношения Гука и уравнения равновесия, можно исключить смещения и деформации и привести обе системы 2D-уравнений в напряжениях к одинаковому виду:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0,$$

где первое уравнение является условием совместности Сен-Венана. Оно необходимо, так как три неизвестных напряжения нельзя однозначно найти из двух уравнений равновесия. Три уравнения (18) оказываются одинаковыми для обеих моделей, плоского напряжения и плоской деформации. Зная эти напряжения, по уравнениям (8)–(11) и (12)–(16) находятся деформации и смещения, которые для модели плоской деформации и плоского напряжения уже будут разными.

Если сделать замену переменных и ввести функцию напряжения  $\phi(x, z)$  по формулам:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}, \quad \sigma_{zz} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xz} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z}, \quad (19)$$

то система уравнений (18) сведется к одному уравнению:

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial z^4} = 0. \quad (20)$$

Кроме переменных напряжения, деформации и смещения в описание изгиба включают также интегральные переменные: изгибный момент и поперечную силу:

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} z dz, \quad Q = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz. \quad (21)$$

## 2. УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОГО ИЗГИБА ПЛИТ И БАЛОК

Общую систему 3D-уравнений упругости для расчета изгиба плит и балок можно упростить, учитывая, что для них толщина  $h$  намного меньше длины  $L$  и разлагая смещения, деформации и напряжения в ряды по параметру  $h/L$ . При этом обычно теория строится для изгиба плит с нулевыми касательными и произвольными нормальными напряжениями на верхней и нижней поверхностях плит, а также без учета эффектов сжатия плиты продольными усилиями. В 1811 г., еще до формулировки теории упругости в виде уравнений Навье, Софи Жермен вариационным методом показала, что приближенно расчет изгиба тонких пластин можно свести к решению одного дифференциального уравнения для функции изгиба срединной линии плиты  $w(x, y)$ . Компоненты смещений, деформаций и напряжений как функции трех переменных  $x$ ,  $y$  и  $z$  могут быть найдены по явным алгебраическим выражениям, содержащими производные от функции двух переменных  $w(x, y)$ . Это соответствует тому, что для рассматриваемой тонкой плиты удается в общем

виде проинтегрировать уравнения упругости по переменной  $z$ .

Полученные С. Жермен выражения содержали некоторые ошибки, которые исправил в 1813 г. Г. Лагранж. В 1850 г. Ж. Кирхгоф предложил упростить вывод уравнения изгиба тонких пластин первого приближения по  $h/L$  с помощью постулатов, которые были систематизированы в монографии Лява. При этом Ж. Кирхгоф объяснил физический смысл делаемых допущений: а именно теория изгиба тонких плит не учитывает влияния поперечного сдвига и поперечного сжатия на напряжения и смещения. Хотя эти уравнения были получены усилиями многих ученых, для краткости их часто называют уравнениями Кирхгофа–Лява или уравнениями классической теории пластинок, или элементарной теорией пластинок. Эти уравнения рассматриваются как первое приближение общих уравнений упругости для изгиба тонких плит с точностью до первых ненулевых членов по малому параметру  $h$  (обычно длину  $L$  опускают) для каждой переменной.

В дальнейшем для расчета изгиба толстых пластин были построены варианты уточненной теории: в 1921 г. это сделал С.П. Тимошенко, в 1945 г. Е. Рейснер и в 1951 г. Р. Миндлин. Эти теории часто называют теориями Тимошенко–Рейснера. В этих теориях несколько различными способами учитывались поперечные сдвиговые деформации. По сравнению с теорией тонких плит первого приближения теории изгиба толстых пластин оказываются намного сложнее, так как требуют решения не одного уравнения для функции изгиба срединной линии  $w(x, z)$ , а еще и дифференциального уравнения для поперечных сил, учитывающего эффект деформации поперечного сдвига при изгибе плиты (см. исторический обзор [Challamel, Elishakoff, 2019]). Эти теории строго математически нельзя называть теориями второго (по сравнению с теорией Кирхгофа) приближения, поскольку, как будет видно ниже, они учитывают не все члены следующего порядка малости по  $h/L$ , а только их часть. Работы по систематизации, дальнейшему уточнению и математическому обоснованию теорий изгиба толстых плит продолжаются по настоящее время [Рябенков, 2012].

Еще раз отметим, что в рассматриваемых теориях тонких и толстых пластин при выводе уравнений для упрощения дополнительно принимается условие нулевой нормальной силы, приложенной к торцам плиты. Поэтому эти теории описывают изгиб пластин, вызванный только поперечной нагрузкой, без учета возможного коблечения продольными усилиями.

Уравнения Кирхгофа–Лява могут рассматриваться как первое приближение в разложении уравнений упругости для изгиба тонких плит по малому параметру – толщине плиты. Стандартной процедурой получения второго приближения является учет членов следующего порядка малости. Однако такая задача оказывается слишком

сложной благодаря тому, что нужно преобразовать 15 взаимосвязанных уравнений Коши, Гука и уравнения равновесия. При этом уже первые ненулевые члены разных компонент деформации и напряжений оказываются малыми разного порядка. Вдобавок разложение для продольного напряжения  $\sigma_{xx}$  содержит нечетные степени малого параметра  $h$ , а сдвигового напряжения  $\sigma_{xz}$  – четные. Поэтому при выводе уравнений теории толстых плит вводятся дополнительные математические упрощения. Обычно в теориях толстых пластин решение, уточняющее уравнения Кирхгофа, ищется не методом разложения в ряды по малому параметру  $h$ , а вариационным методом. В теории Е. Рейснера решения для продольного напряжений  $\sigma_{xx}$  как функции  $x, y, z$  ищутся в классе функций, являющихся произведениями функции от  $z$  и функции от  $x, y$ . Более того, зависимость напряжения  $\sigma_{xx}$  от  $z$  принимается, подобно выражениям Кирхгофа–Лява, линейной с коэффициентом пропорциональности, равным изгибающему моменту  $\sigma_{xx} \sim M(x, y)z$  (определение момента см. ниже (22)). Кроме того, явно пренебрегается зависимостью вертикального смещения от  $z$ -координаты  $u_z(x, y, z) \approx w(x, y)$ . Функция изгиба  $w(x, y)$ , определяющая изгибающие моменты и поперечные силы, считается неизвестной, и дифференциальное уравнение для нее находится из условия минимума виртуальной работы Кастильяно [Szilard, 2004].

В теории С.П. Тимошенко решение также ищется вариационным способом, но в виде линейной зависимости от  $z$  продольного смещения  $u_z(x, y, z)$  с коэффициентом пропорциональности, равным среднему по толщине углу поворота поперечного сечения изгибаемой балки. Поэтому эти теории близки, хотя уравнения имеют несколько различный вид.

При плоской деформации система 3D-уравнений теории Рейснера [Reissner, 1945] по работе [Тимошенко, Войновский-Кригер, 1966, С. 195] состоит из соотношений:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{12M_x}{h^3} z, & \sigma_{yy} &= \frac{12M_y}{h^3} z, \\ \sigma_{xy} &= \frac{12M_{xy}}{h^3} z, & \sigma_{xz} &= \frac{6Q_x}{h^3} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right), \\ \sigma_{yz} &= \frac{6Q_y}{h^3} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right), & \sigma_{zz} &= -\frac{1}{2} q \left( 1 - \frac{3z}{h} + \frac{4z^3}{h^3} \right), \end{aligned} \quad (22)$$

где  $M$  и  $Q$  – моменты и поперечные силы:

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} z dz, & M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} z dz, \\ M_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} z dz, & Q_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} z dz, \\ Q_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz} z dz \end{aligned} \quad (23)$$

находимые из дифференциальных уравнений:

$$Q_x - \frac{h^2}{10} \nabla^2 Q_x = -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) - \frac{h^2}{10(1-\nu)} \frac{\partial q}{\partial x}, \quad (24)$$

$$Q_y - \frac{h^2}{10} \nabla^2 Q_y = -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) - \frac{h^2}{10(1-\nu)} \frac{\partial q}{\partial y},$$

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial w^2}{\partial y^2} \right) + \frac{h^2}{5} \frac{\partial Q_x}{\partial x} - \frac{\nu}{1-\nu} \frac{qh^2}{10},$$

$$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial w^2}{\partial x^2} \right) + \frac{h^2}{5} \frac{\partial Q_y}{\partial y} - \frac{\nu}{1-\nu} \frac{qh^2}{10}, \quad (25)$$

$$M_{xy} = (1-\nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{h^2}{10} \left( \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right)$$

и уравнения для функции изгиба  $w$ :

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = q - \frac{(2-\nu)h^2}{(1-\nu)10} \nabla^2 q, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (26)$$

Система 3D-уравнений Е. Рейснера (22)–(26) позволяет найти функцию изгиба  $w(x, y)$  и компоненты напряженного состояния плиты  $\sigma_{ik}$ . При пренебрежении членами с  $h^2$  в уравнениях (24)–(26) система уравнений (22)–(26) переходит в уравнения Кирхгофа–Лява. В отличие от последней система уравнений Рейснера оказывается намного сложнее, так как кроме уравнения в частных производных второго порядка для функции  $w(x, y)$  включает еще два уравнения второго порядка для поперечных сил  $Q_x(x, y)$  и  $Q_y(x, y)$ .

Несмотря на то, что уравнения Рейснера были получены более 70 лет назад, они продолжают анализироваться до настоящего времени. Даже для простой тестовой модели 3D-изгиба защемленной прямоугольной пластины с равномерной нагрузкой численные решения уравнений (22)–(26) все еще продолжают уточняться [Сухотерин и др., 2017].

Поскольку для геофизических приложений часто используются двумерные модели изгиба плит, то в настоящей работе детально анализируются двумерные уравнения изгиба толстых плит. Так как для некоторых 2D-задач имеются точные решения общих уравнений упругости в аналитическом виде, то возможно детальное сравнение. Несмотря на то, что, как будет показано ниже, расчет функции изгиба толстых двумерных плит и балок оказывается очень простым и в то же время почти на порядок более точным, теория изгиба толстых плит в геофизических приложениях еще остается невостребованной.

Для перехода к 2D-уравнениям Рейснера для плоской деформации изгиба плит положим равными нулю все производные по  $y$  и равными нулю напряжения  $\sigma_{yx} = \sigma_{yz} = 0$ . В результате для определения функции изгиба  $w(x)$  и напряжений  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xz}$  и  $\sigma_{zz}$  получим систему уравнений:

$$\sigma_{xx} = \frac{12}{h^3} M z, \quad \sigma_{xz} = \frac{3}{2h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) Q, \quad (27)$$

$$\sigma_{zz} = -\frac{q}{2} \left(1 - \frac{3z}{h} + \frac{4z^3}{h^3}\right), \quad \sigma_{yy} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}), \quad (28)$$

$$M_x = M = -Dw'' - \frac{2-\nu}{10(1-\nu)} h^2 q, \quad (29)$$

$$M_y = \nu M + \nu \frac{qh^2}{10}, \quad M_{xy} = 0,$$

$$Q_x = Q = -Dw''' - \frac{2-\nu}{10(1-\nu)} h^2 q', \quad Q_y = 0, \quad (30)$$

$$Dw'''' = q - \frac{2-\nu}{10(1-\nu)} h^2 q''. \quad (31)$$

Полученная простым переходом к 2D-моделям система уравнений Рейснера все еще остается сложнее уравнений Кирхгофа, так как дополнительно требует решения дифференциального уравнения (30) для момента  $Q(x)$ . Однако это уравнение можно проинтегрировать в общем виде и заменить алгебраическим соотношением, если воспользоваться общими уравнениями равновесия. Интегрируя по  $z$  второе уравнение равновесия (16) с учетом (27), (28) и граничного условия (2), получим  $Q' = \sigma_{zz}(z = -h/2) - \sigma_{zz}(z = h/2)$ , то есть

$$Q' = -q. \quad (32)$$

Формула (32) является известным уравнением баланса сил по вертикали. Подставляя ее в (29) и (30), перепишем уравнения (29)–(31) в более простом виде:

$$M = -Dw'' - bq, \quad Q = M', \quad Q' = -q, \quad (33)$$

$$Dw'''' = q - bq'',$$

где

$$b = \frac{1}{10} \frac{2-\nu}{1-\nu} h^2. \quad (34)$$

Систему 2D-уравнений Рейснера можно записать в более полной форме, добавив явные выражения для продольного смещения  $u_x(x, z)$ . Поперечное смещение  $u_z$  в соответствии с исходными предположениями полагается равным изгибной функции  $u_z(x, z) = w(x)$ . Используя этот факт, можно найти  $u_x(x, z)$  по соотношениям Гука и Коши для плоской деформации (13), (14). Учитывая выражение для модуля сдвига

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad (35)$$

получим

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{1}{G} \sigma_{xz} - \frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{1}{G} \sigma_{xz} - w'.$$

Далее используем  $\sigma_{xz}$  из (27):

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{3Q}{2Gh} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) - w'$$

и интегрируем по  $z$

$$u_x = \frac{3Q}{2Gh} \left(z - \frac{4z^3}{3h^2}\right) - w'z + C(x).$$

Поскольку в теории Рейснера, как и в теории Кирхгофа, не учитываются продольные смещения точек срединной линии и считается, что  $u_x(x, 0) = 0$ , то  $C(x) = 0$ . В результате:

$$u_x = -w'z + \frac{3Q}{2Gh} \left(z - \frac{4z^3}{3h^2}\right). \quad (36)$$

В этом выражении можно выделить первый член и две поправки к нему:  $u_x(x, z) = -u_0 + \delta_1 - \delta_2$ . Первый член  $-u_0$  соответствует приближению Кирхгофа для тонких пластинок, при котором продольное смещение зависит от поперечной координаты  $z$  линейно с коэффициентом, равным  $dw/dx$ . Это означает, что поперечное сечение плиты при изгибе поворачивается, всюду оставаясь все время перпендикулярным срединной линии. Поправка  $\delta_1$ , тоже линейная по  $z$ , уменьшает поворот сечения. Другая поправка  $\delta_2$ , пропорциональная  $z^3$ , несколько увеличивает поворот сечения, но при этом добавляет его изгиб. Обе поправки обращаются в нуль при бесконечном модуле сдвига  $G$ , то есть в отсутствие сдвига слоев.

При учете изгиба сечения необходимо ввести средний угол поворота  $\theta(x)$ , который по Рейснеру [Reissner, 1945] определяют методом наименьших квадратов, то есть из условия:

$$\int_{-h/2}^{h/2} (u_x - \theta z)^2 dz = \min. \quad (37)$$

Приравнивая вариацию (дифференцируя по переменной  $\theta$ ) этого интеграла нулю

$$\frac{d}{d\theta} \int_{-h/2}^{h/2} (u_x - \theta z)^2 dz = 0, \quad (38)$$

получим выражение, определяющее в общем виде средний угол поворота сечения

$$\theta = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} u_x z dz = \frac{1}{I} \int_{-c}^c u_x z dz, \quad (39)$$

где  $I = h^3/12$  – момент инерции поперечного сечения плиты или балки. Подставляя (36) в (39), получим конкретное выражение  $\theta$  в приближении Рейснера:

$$\theta = -w' + \frac{6Q}{5Gh} = -w' + \frac{12(1+\nu)Q}{5Eh}. \quad (40)$$

В результате полная система уравнений изгиба толстых плит при плоской деформации с задан-

ной нагрузкой сверху  $q(x)$  в приближении Рейснера принимает вид

$$\begin{aligned} Dw'''' &= q - bq'', \quad M = -Dw'' - bq, \\ Q &= -Dw''' - bq', \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{12}{h^3} M z, \quad \sigma_{xz} = \frac{3}{2h} \left( 1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) Q, \\ \sigma_{zz} &= -\frac{q}{2} \left( 1 - \frac{3z}{h} + \frac{4z^3}{h^3} \right), \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} u_x &= -w' z + \frac{3Q}{2Gh} \left( z - \frac{4z^3}{3h^2} \right), \quad u_z = w, \\ \theta &= -w' + \frac{6Q}{5Gh}. \end{aligned} \quad (43)$$

Чтобы найти все характеристики напряженно-деформированного состояния изгибаемой плиты как функций  $x$  и  $z$ , достаточно решить только одно дифференциальное уравнение четвертого порядка для функции изгиба  $w(x)$ . Далее напряжения и смещения находятся по алгебраическим соотношениям. По сравнению с системой уравнений (27)–(31), полученной переходом от 3D-уравнений Рейснера к 2D-уравнениям плоской деформации, система уравнений (41)–(43) дополнена явными выражениями для продольного смещения и угла поворота поперечного сечения.

Поскольку граничные условия на поверхностях плиты уже были использованы при выводе уравнений (33), то нужны граничные условия лишь на ее торцах. Как и для уравнений Кирхгофа, при выводе уравнений (33) также предполагалось, что торцы свободны от действия продольных сил. Поэтому уравнения (41)–(43) позволяют рассчитывать изгибы плиты, вызванные только поперечными силами и изгибающими моментами, но не описывают коробление плиты, вызванное продольным сжатием.

При строгой постановке для единственности решения на торцах нужно задавать напряжения или смещения как функции  $z$ . Однако обычно такие функции заранее не известны, и уже в общей теории изгиба плит ограничиваются более простой постановкой задач, когда на торцах вместо напряжений как функций  $z$  задаются их интегральные характеристики – изгибные моменты и поперечные силы. Строго говоря, в такой постановке решение будет не единственным. Но по принципу Сен-Венана разные решения будут отличаться только вблизи торцов. На удалении от торцов более толщины плиты все решения с различными распределениями напряжений по торцу, но с одинаковыми моментами и поперечными силами, становятся близкими.

При решении уравнений изгиба плит (41)–(43) для свободно опертых плит в качестве граничных условий на торцах достаточно задавать условие нулевого вертикального смещения  $w(0) = 0$  и нулевого момента  $M(0) = 0$ , для защемленной плиты –

условие заданного вертикального смещения  $w(0) = w_0$  и заданного среднего угла защемления сечения плиты  $\theta(0) = \theta_0$ .

Как было отмечено выше, 2D-уравнения теории упругости для плоского напряжения (для изгиба балок) и плоской деформации (для изгиба плит) имеют одинаковый вид только для напряжений, но не смещений. Однако нужные соотношения для плоского напряжения можно получить из соответствующих соотношений для плоской деформации простой заменой эффективных параметров. С учетом (17) надо сделать замену:

$$\begin{aligned} D &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \rightarrow EI, \\ b &= \frac{1}{10} \frac{2-\nu}{1-\nu} h^2 \rightarrow \frac{2+\nu}{10} h^2. \end{aligned} \quad (44)$$

В результате получим явные уравнения для 2D-изгиба толстой балки толщиной  $h = 2c$ :

$$\begin{aligned} EIw'''' &= q - bq'', \quad M = -EIw'' - bq, \\ Q &= -EIw''' - bq', \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{M}{I} z, \quad \sigma_{xz} = \frac{Q}{2I} (c^2 - z^2), \\ \sigma_{zz} &= -\frac{q}{2I} \left( \frac{2}{3} c^3 - c^2 z + \frac{1}{3} z^3 \right), \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} u_x &= -w' z + \frac{Q}{2GI} \left( c^2 z - \frac{z^3}{3} \right), \quad u_z = w, \\ \theta &= -w' + \frac{3Q}{5Gc}. \end{aligned} \quad (47)$$

### 3. СРАВНЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ 2D-УРАВНЕНИЙ РЕЙСНЕРА С ТОЧНЫМИ РЕШЕНИЯМИ ОБЩИХ УРАВНЕНИЙ УПРУГОСТИ НА ТЕСТОВЫХ МОДЕЛЯХ

В литературе [Тимошенко, Гудьер, 1979] для нескольких тестовых моделей известны точные решения 2D-уравнений изгиба балок в плоском напряженном состоянии. Шире всего используются модели балки, свободно опертой на торцах с заданной нагрузкой  $q(x)$  сверху при  $q = \text{const}$  и  $q = q_0 \sin ax$ .

#### 3.1. Свободно опертая балка с постоянной нагрузкой

При рассмотрении модели  $q = \text{const}$  в работе [Тимошенко, Гудьер, 1979] начало координат помещено в середину балки (рис. 3). Ее длина обозначена через  $L = 2l$ , а толщина  $h = 2c$ , причем  $I = 2c^3/3$ .

Граничные условия в работе [Тимошенко, Гудьер, 1979] записаны в виде заданного нормального напряжения на верхней поверхности балки

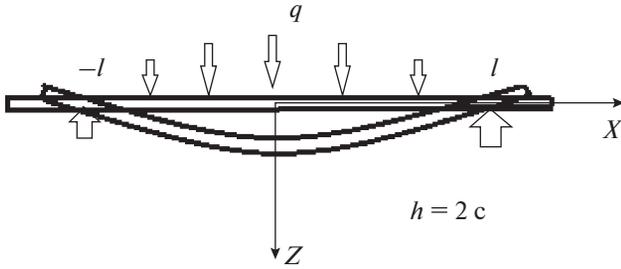


Рис. 3. Изгиб свободно опертой балки, торцы которой фиксированы по вертикали, но могут свободно поворачиваться и перемещаться по горизонтали.

и нулевого — на нижней, нулевых касательных напряжений на горизонтальных поверхностях, нулевых торцевых сил и моментов, а также равенства нагрузке суммы двух торцевых поперечных сил

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(x, -c) = -q, \quad \sigma_{zz}(x, c) = 0, \\ \sigma_{xz}(x, \pm c) = 0, \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \int_{-c}^c \sigma_{xx}(\pm l, z) dz = 0, \quad \int_{-c}^c \sigma_{xx}(\pm l, z) z dz = 0, \\ \int_{-c}^c \sigma_{xz}(\pm l, z) dz = -ql. \end{aligned} \quad (49)$$

Кроме того, для нахождения смещений по дифференциальным уравнениям Коши нужны еще граничные условия для вертикального и горизонтального смещения, а именно нулевое вертикальное смещение срединной линии в точках опоры и, благодаря симметрии, нулевое продольное смещение срединной линии в центре балки

$$u_z(\pm l, 0) = w(\pm l) = 0, \quad u_x(0, z) = 0., \quad (50)$$

### 3.1.1. Точное решение

Точное решение задачи плоского напряженного состояния с граничными условиями (48)–(49) находится из уравнения для функции напряжений (20). Для прямоугольных плит сначала составляются полиномы  $k$ -й степени  $\sum C_{nm} x^n z^m$ , где  $n + m = k$ , а коэффициенты выбираются из условия удовлетворения уравнению (20). Затем из них составляется комбинация, коэффициенты в которой находятся из граничных условий. При этом берется минимальное число полиномов, но достаточное, чтобы удовлетворить всем граничным условиям. Для рассматриваемой модели достаточно полиномов до 5-й степени.

Простой подстановкой легко убедиться, что так найденное решение [Тимошенко, Гудьер, 1979]:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{q}{2I} (l^2 - x^2) z + \frac{q}{2I} \left( -\frac{2}{5} c^2 z + \frac{2}{3} z^3 \right), \\ \sigma_{zz} &= -\frac{q}{2I} \left( \frac{2}{3} c^3 - c^2 z + \frac{1}{3} z^3 \right), \\ \sigma_{xz} &= -\frac{q}{2I} x (c^2 - z^2) \end{aligned} \quad (51)$$

точно удовлетворяет 2D-уравнениям равновесия (18) с граничными условиями (48), (50).

Зная напряжения по соотношениям Гука и Коши, (8), (9) с граничным условием (50), находятся выражения для смещений. Подстановкой в соотношение Коши (9) для плоского напряжения  $E \partial u_x / \partial x = \sigma_{xx} - \nu \sigma_{zz}$  выражения (51) для напряжений  $\sigma_{xx}$  и  $\sigma_{zz}$  находится производная продольного смещения. Интегрируя ее по  $x$  с граничным условием симметрии балки  $u_x(0, z) = 0$ , находится продольное смещение:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{q}{2EI} x \left( l^2 - \frac{x^2}{3} \right) z + \\ &+ \frac{q}{2EI} x \left( -\frac{2}{5} c^2 z + \frac{2}{3} z^3 \right) - \frac{\nu}{E} x \sigma_{zz} = \frac{q}{2EI} x \times \\ &\times \left[ \left( l^2 - \frac{x^2}{3} \right) z + \left( -\frac{2}{5} c^2 z + \frac{2}{3} z^3 \right) + \right. \\ &\left. + \nu \left( \frac{2}{3} c^3 - c^2 z + \frac{1}{3} z^3 \right) \right], \end{aligned} \quad (52)$$

где вся группа членов с коэффициентом Пуассона фактически отражает эффект продольного расширения при поперечном сжатии  $\sigma_{zz}$ , который в теории Рейснера учитывается некорректно из-за допущения о нерастяжимости срединной линии.

Чтобы найти поперечное смещение  $u_z$ , нужно подставить выражения (51) для напряжений во второе соотношение Коши–Гука (9)  $E \partial u_z / \partial z = \sigma_{zz} - \nu \sigma_{xx}$  и проинтегрировать по  $z$ :

$$\begin{aligned} u_z &= \frac{q}{2EI} \left[ \frac{\nu}{2} (l^2 - x^2) z^2 - \frac{2}{3} c^3 z + \right. \\ &\left. + \left( \frac{1}{2} - \frac{\nu}{5} \right) c^2 z^2 - \left( \frac{1}{12} - \frac{\nu}{6} \right) z^4 \right] + \frac{1}{2EI} C(x). \end{aligned} \quad (53)$$

Чтобы найти функцию интегрирования  $C(x)$ , нужно подставить выражения для смещений и напряжений в третье соотношение Коши–Гука (9)  $E (\partial u_x / \partial z + \partial u_z / \partial x) = 2(1 + \nu) \sigma_{xz}$ , из которого находится выражение для производной  $C'(x)$ . После интегрирования находится функция  $C(x)$  с неопределенной постоянной интегрирования  $C(0)$ . Далее так найденная функция интегрирования подставляется в (53), а постоянная  $C(0)$  находится из граничного условия на торцах  $u_z(\pm l, 0) = 0$ . В результате выражение для поперечного смещения принимает вид:

$$u_z = \frac{5}{24EI} q l^4 \left( 1 + \frac{128 + 5\nu c^2}{5 \cdot 10 l^2} \right) - \frac{q}{2EI} x^2 l^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{8 + 5\nu c^2}{10 l^2} - \frac{x^2}{12l^2} \right) - \frac{q}{2EI} z c^3 \times \left[ \frac{2}{3} - \frac{5 + 2\nu z}{10 c} + \frac{\nu(l^2 - x^2)z}{2 c^3} + \frac{1 + 2\nu z^3}{12 c^3} \right]. \quad (54)$$

Отсюда, в частности, находится функции изгиба:

$$w(x) = u_z(x, 0) = \frac{5}{24EI} q l^4 \left( 1 + \frac{128 + 5\nu c^2}{5 \cdot 10 l^2} \right) - \frac{q}{2EI} x^2 l^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{8 + 5\nu c^2}{10 l^2} - \frac{x^2}{12l^2} \right). \quad (55)$$

Для сравнения этого точного решения [Тимошенко, Гудьер, 1979] с решениями уравнений Рейснера требуются также выражения для изгибного момента, поперечной силы и среднего угла поворота поперечного сечения. Интегрирование формул для напряжений (51) дает:

$$M = \frac{q}{2}(l^2 - x^2), \quad Q = -qx. \quad (56)$$

Средний по  $z$  угол поворота сечения находится по (43):

$$\theta = \frac{1}{l} \int_{-c}^c u_x z dz = \frac{q}{2EI} x \left[ \left( l^2 - \frac{x^2}{3} \right) - \frac{4\nu}{5} c^2 \right]. \quad (57)$$

Выражения (50)–(57) дают все характеристики напряженно-деформированного состояния изогнутой балки при точном решении уравнений упругости.

### 3.1.2. Решение 2D-уравнений Рейснера

В отличие от достаточно трудоемкого решения точных уравнений решение 2D-уравнений в приближении Рейснера получается очень просто, а для функции изгиба фактически в несколько строк. Система уравнений 2D-изгиба в приближении Рейснера для балки была выписана выше (45)–(47).

Граничные условия свободно опертой балки по сравнению с (48)–(50) достаточно записать в более простом виде:

$$w(\pm l) = 0, \quad M(\pm l) = 0, \quad (58)$$

поскольку условия для напряжений на верхней и нижней границах (48), а также условие отсутствия продольных усилий на торцах (50) уже использованы при выводе самих уравнений изгиба тонких и толстых плит и балок.

Решение уравнения четвертого порядка для функции изгиба  $w$  (45) с учетом симметрии модели  $w(x) = w(-x)$  ищем в виде  $EIw'''' = qx^4/24 + c_1 x^2/2 + c_0$ . Тогда  $EIw'''' = qx^2/2 + c_1$ ,

откуда  $M = -EI w'' - bq = -qx^2/2 - c_1 - bq$ . Из граничного условия для момента  $M(\pm l) = 0$  следует  $c_1 = -ql^2/2 - bq$ . Из граничного условия  $w(\pm l) = 0$  следует  $c_0 = q(5l^4/24 + bl^2/2)$ .

В результате получается следующее решение уравнения Рейснера для изгиба:

$$w = \frac{q}{4EI} \left[ \frac{1}{6}(5l^4 + x^4) - l^2 x^2 + 2b(l^2 - x^2) \right], \quad (59)$$

где  $b = \frac{4 + 2\nu}{5} c^2$ , с изгибным моментом и поперечной силой,

$$M = -\frac{q}{2}(x^2 - l^2), \quad Q = -qx. \quad (60)$$

Напряжения, продольные смещения и угол поворота при этом выражаются формулами:

$$\sigma_{xx} = \frac{M}{I} z = \frac{q}{2I} (l^2 - x^2) z, \quad \sigma_{zz} = -\frac{q}{2I} \left( \frac{2}{3} c^3 - c^2 z + \frac{1}{3} z^3 \right), \quad (61)$$

$$\sigma_{xz} = -\frac{q}{2I} x(c^2 - z^2),$$

$$u_x = \frac{q}{2EI} x \left[ \left( l^2 - \frac{1}{3} x^2 \right) z + \left( -\frac{2}{5} c^2 z + \frac{2}{3} z^3 \right) + \nu \left( -\frac{6}{5} c^2 z + \frac{2}{3} z^3 \right) \right], \quad (62)$$

$$\theta = \frac{q}{2EI} x \left[ \left( l^2 - \frac{1}{3} x^2 \right) - \frac{4\nu}{5} c^2 \right]. \quad (63)$$

### 3.1.3 Отличия решений

Сравнение характеристик изгиба балки по решению 2D-уравнений Рейснера (59)–(62) и точному решению (51)–(57) показывает, что вычисленные по простым уравнениям (46) изгибный момент, поперечная сила, угол поворота сечения, напряжения  $\sigma_{zz}$  и  $\sigma_{xz}$  совпадают с точным решением. Напряжение  $\sigma_{xx}$  в отличие от точного решения не имеет поправки к теории тонких балок. Продольное смещение в точном решении

$$u_x = \frac{q}{2EI} x \left[ \left( l^2 - \frac{1}{3} x^2 \right) z + \left( -\frac{2}{5} c^2 z + \frac{2}{3} z^3 \right) + \nu \left( \frac{2}{3} c^3 - c^2 z + \frac{1}{3} z^3 \right) \right]$$

имеет некоторые отличия от выражения в приближении Рейснера

$$u_x = \frac{q}{2EI} x \left[ \left( l^2 - \frac{1}{3} x^2 \right) z + \left( -\frac{2}{5} c^2 z + \frac{2}{3} z^3 \right) + \nu \left( -\frac{6}{5} c^2 z + \frac{2}{3} z^3 \right) \right]$$

только лишь в трех членах, которые пропорциональны  $v$  и описывают продольное расширение от поперечного сжатия под нагрузкой. Поправочный член  $vc^2z$  в точном решении имеет коэффициент 1, а в решении по Рейснеру 6/5. Член  $vc^3$  в точном решении имеет коэффициент 1/3, а по Рейснеру 2/3. В решении по Рейснеру также отсутствует постоянный член  $2vc^3/3$ , смещающий точки срединной линии. Для понимания этих расхождений следует вспомнить, что в исходных допущениях теории Рейснера искусственно обнуляются продольные деформации при  $z = 0$ , которые на самом деле имеют место и влияют на смещения при других значениях  $z$ .

Функция изгиба по 2D-уравнениям Рейснера (59) с учетом  $b = 0.4(2 + v)c^2$  имеет вид:

$$w = \frac{q}{2EI} \left[ \frac{1}{12}(5l^4 + x^4) - \frac{1}{2}l^2x^2 + \frac{8+4v}{10}c^2(l^2 - x^2) \right]$$

и отличается от точного выражения

$$w = \frac{q}{2EI} \left[ \frac{1}{12}(5l^4 + x^4) - \frac{1}{2}l^2x^2 + \frac{8+5v}{10}c^2(l^2 - x^2) \right]$$

только коэффициентом при  $v$ , равным 0.4 вместо точного 0.5. В случае  $v = 0.25$  множитель при  $c^2(l^2 - x^2)$  в точном решении будет равен 0.925, а в приближении Рейснера 0.9 с разницей в 3%.

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что полученное решение уравнений Рейснера в форме (45)–(47) является также решением и уравнений Рейснера до преобразований, в оригинальной форме (27)–(31) с дифференциальным уравнением для функции  $Q(x)$ , поскольку при переходе к (45)–(47) никаких дополнительных приближений не вводилось.

### 3.2. Свободно опертая балка с синусоидальной нагрузкой

Другой часто используемой моделью является модель с нагрузкой  $q = q_0 \sin ax$ , где  $a = \pi/l$ . Для этой модели в работе [Тимошенко, Гудьер, 1979] начало координат помещено на левом конце балки при длине  $L = l$  и толщине  $h = 2c$ . Система уравнений (18) и граничные условия (48)–(50) для рассматриваемой модели в плоском напряженном состоянии остаются такими же, как и для балки с постоянной нагрузкой.

#### 3.2.1. Точное решение

Точное решение уравнений для этой модели более громоздкое и в работе [Тимошенко, Гудьер, 1979] оно приведено только для напряжений. При нагрузке только сверху оно имеет вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= q_0 \times \\ &\times \left[ \frac{(ac \operatorname{ch} ac - \operatorname{sh} ac) \operatorname{ch} az - az \operatorname{sh} ac \operatorname{sh} az}{\operatorname{sh} 2ac + 2ac} - \right. \\ &\left. - \frac{(ac \operatorname{sh} ac - \operatorname{ch} ac) \operatorname{sh} az - az \operatorname{ch} ac \operatorname{ch} az}{\operatorname{sh} 2ac - 2ac} \right] \sin ax, \\ \sigma_{zz} &= q_0 \times \\ &\times \left[ -\frac{(ac \operatorname{ch} ac + \operatorname{sh} ac) \operatorname{ch} az - az \operatorname{sh} ac \operatorname{sh} az}{\operatorname{sh} 2ac + 2ac} + \right. \\ &\left. + \frac{(ac \operatorname{sh} ac + \operatorname{ch} ac) \operatorname{sh} az - az \operatorname{ch} ac \operatorname{ch} az}{\operatorname{sh} 2ac - 2ac} \right] \sin ax, \end{aligned} \quad (64)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} &= q_0 \times \\ &\times \left[ -\frac{ac \operatorname{ch} ac \operatorname{sh} az - az \operatorname{sh} ac \operatorname{ch} az}{\operatorname{sh} 2ac + 2ac} + \right. \\ &\left. + \frac{ac \operatorname{sh} ac \operatorname{ch} az - az \operatorname{ch} ac \operatorname{sh} az}{\operatorname{sh} 2ac - 2ac} \right] \cos ax. \end{aligned}$$

Зная эти напряжения, можно найти точные формулы для изгибающего момента и поперечной силы. Их выражения, в отличие от напряжений, очень просты:

$$M = q_0 a^{-2} \sin ax, \quad Q = q_0 a^{-1} \cos ax. \quad (65)$$

Для анализа и сравнения этого точного решения с приближенными решениями целесообразно представить его в виде разложения по малому параметру толщины пластины. Несмотря на частое использование данной тестовой модели, ее решение как в книге [Тимошенко, Гудьер, 1979], так и в различных монографиях и учебниках по теории упругости, приводится только в форме (62) без разложения. Поэтому разложим выражения для напряжений (62) в ряды по степеням  $z$  и  $c$ . В результате простых, но длинных преобразований получается (члены рядов сгруппированы по сумме степеней малых величин  $z$  и  $c$ ):

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{xx}}{q_0 \sin ax} &= \frac{3z}{2a^2c^3} + \left( -\frac{3z}{10c} + \frac{z^3}{2c^3} \right) + \\ &+ a^2 \left( \frac{c^2}{12} - \frac{87cz}{2800} - \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{40c} + \frac{3z^5}{80c^3} \right) + \\ &+ a^4 \left( -\frac{7c^4}{360} + \frac{c^2z^2}{12} + \frac{389c^3z}{63000} - \frac{61cz^3}{4200} - \frac{z^4}{64} + \frac{z^5}{200c} \right) + \dots \\ \frac{\sigma_{zz}}{q_0 \sin ax} &= \left( -\frac{1}{2} + \frac{3z}{4c} + \frac{z^3}{4c^3} \right) + \\ &+ a^2 \left( -\frac{cz}{40} + \frac{z^3}{20c} + \frac{z^5}{40c^3} \right) + \\ &+ a^4 \left( \frac{c^4}{48} - \frac{17c^3z^3}{5600} - \frac{c^2z^2}{24} + \frac{29cz^3}{56000} + \frac{z^4}{48} - \frac{z^5}{800c} \right) + \\ &+ a^6 \left( \frac{221c^5z}{504000} + \frac{7c^4z^2}{720} - \frac{389c^3z^3}{378000} - \frac{c^2z^4}{144} + \frac{61cz^5}{84000} \right) + \dots \end{aligned} \quad (66)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{xz}}{q_0 \cos ax} = & \frac{1}{a} \left( \frac{3}{4c} - \frac{3z^2}{4c^3} \right) + a \left( -\frac{c}{40} + \frac{3z^2}{20c} - \frac{z^4}{8c^3} \right) + \\ & + a^3 \left( -\frac{17c^3}{5600} - \frac{c^2 z}{12} + \frac{87cz^2}{5600} + \frac{z^3}{12} - \frac{z^4}{160c} \right) + \\ & + a^5 \left( \frac{221c^5}{504000} + \frac{7c^4 z}{360} - \frac{389c^3 z^2}{126000} - \right. \\ & \left. - \frac{c^2 z^3}{36} + \frac{61cz^4}{16800} + \frac{z^5}{120} \right) + \dots \end{aligned}$$

Интегрированием этих разложений находятся изгибный момент и поперечная сила. При обрезании соответствующих рядов получаются выражения:

$$\begin{aligned} M &= q_0 \sin ax \left( \frac{1}{a^2} - \frac{a^4 c^6}{3780} - \frac{37a^6 c^8}{739200} + \dots \right), \\ Q &= q_0 \cos ax \left( \frac{1}{a} + \frac{a^3 c^4}{560} + \frac{41a^5 c^6}{151200} + \dots \right). \end{aligned} \quad (67)$$

Уже первый член каждого из них совпадает с точными формулами (65). Важно, что последующие члены поправочными фактически не являются, так как оказывается, что по мере удлинения обрезанных рядов для напряжений (66) интегралы от “поправок” стремятся к нулю, а  $M$  и  $Q$  стремятся к выражениям (65).

Смещения  $u_x$  и  $u_z$  и функцию изгиба  $w(x)$  найдем, проведя преобразования, подобные проделанным для постоянной нагрузки (52)–(55), то есть подстановкой напряжений в уравнения Гука и Коши. С точностью до членов порядка  $h^2$  функция изгиба будет равна

$$w = \frac{q_0}{a^4 EI} \left[ 1 + a^2 c^2 \left( \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \nu \right) \right] \sin ax. \quad (68)$$

### 3.2.2. Решение 2D-уравнений Рейснера

В отличие от этого достаточно трудоемкого решения точных уравнений решение 2D-уравнений Рейснера (45)–(47) получается очень просто. Для плоского напряжения при  $q = q_0 \sin ax$  с граничными условиями для свободно опертой балки  $w(\pm l) = 0$ ,  $M(\pm l) = 0$  ищем его в виде  $w = c_4 \sin ax + c_3 x^3/6 + c_2 x^2/2 + c_1 x + c_0$ . Подстановка этого выражения в уравнение Рейснера для функции изгиба дает  $c_4 = q_0(1 + ba^2)/a^4 EI$ . Из граничного условия для момента получается  $c_3 = c_2 = 0$ , а из граничного условия для функции изгиба  $c_1 = c_0 = 0$ .

В итоге находим

$$\begin{aligned} w &= \frac{q_0}{a^4 EI} (1 + ba^2) \sin ax = \\ &= \frac{q_0}{a^4 EI} \left[ 1 + a^2 c^2 \left( \frac{4}{5} + \frac{2}{5} \nu \right) \right] \sin ax, \end{aligned} \quad (69)$$

$$M = q_0 a^{-2} \sin ax, \quad Q = q_0 a^{-1} \cos ax. \quad (70)$$

Подставляя найденные выражения для сил и моментов в (46), найдем напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{3q_0 z}{2a^2 c^3} \sin ax, \\ \sigma_{zz} &= q_0 \left( -\frac{1}{2} + \frac{3z}{4c} + \frac{z^3}{4c^3} \right) \sin ax, \\ \sigma_{xz} &= \frac{3q_0}{4ac} \left( 1 - \frac{z^2}{c^2} \right) \cos ax. \end{aligned} \quad (71)$$

### 3.2.3. Отличия решений

При сравнении решения уравнений в приближении Рейснера с точным решением [Тимошенко, Гудьер, 1979], представленным в виде разложений (64), видно, что вычисленные по простым уравнениям (46) изгибный момент, поперечная сила и напряжение  $\sigma_{zz}$  совпадают с точным решением. Напряжения  $\sigma_{xx}$  и  $\sigma_{xz}$  в отличие от точного решения не имеют поправки к теории Кирхгофа. Как и в модели с постоянной нагрузкой, функция изгиба (69), вычисленная по уравнениям Рейснера, отличается от точного решения (68) только коэффициентом при  $\nu$ . В точном решении он равен 0.5, а в приближении Рейснера 0.4. В итоге для  $\nu = 0.25$  множитель при  $a^2 c^2$  в точном решении составит  $0.8 + 0.5\nu = 0.925$ , а по теории Рейснера  $0.8 + 0.4\nu = 0.9$  с разницей всего в 3%.

## 4. ОБСУЖДЕНИЕ

1. Главными критериями теорий является степень точности получаемых результатов и простота расчетов. Несмотря на упрощения, 3D-уравнения теорий толстых пластин все-таки оказываются достаточно трудоемкими. Но, как, в частности, показано в настоящей работе на примере приближения Рейснера, решение 2D-уравнений, наоборот, оказывается столь же простым, как и решение уравнений теории тонких пластин. Однако в приближении Рейснера уточняются не все компоненты напряженно-деформированного состояния, а только функция изгиба. Можно еще уточнить продольное смещение  $u_x(x, z)$ , явное выражение которого и было добавлено выше в (44) и (46) к оригинальным уравнениям Рейснера. В то же время зависимость поперечного смещения  $u_z(x, z)$  от  $z$  в рамках приближения Рейснера не находится, так как одним из исходных приближений теории является пренебрежение зависимостью поперечного смещения от  $z$ . Это допущение вводится в теории для упрощения уравнений, хо-

тя это неизбежно приводит к ее неточности. На примере тестовой модели изгиба свободно опертой балки с постоянной нагрузкой можно видеть (53), (55), насколько выражение для  $w(x)$  проще, чем  $u_z(x, z)$ .

2. Рассчитанное по 2D-уравнениям изгиба плит в приближении Рейснера продольное напряжение  $\sigma_{xx}$  не уточняется из-за того, что в приближении Рейснера вариационное решение ищется в ограниченном классе функций (46), а именно в виде  $\sigma_{xx} = MI^{-1}z$ . К чему это приводит, можно пояснить сравнением с рассмотренным выше точным решением с постоянной нагрузкой. Учитывая выражение для момента (56), преобразуем точное решение для напряжения  $\sigma_{xx}$  (50) к виду  $\sigma_{xx} = MI^{-1}z - qI^{-1}(c^2z/5 - z^3/3)$ . Ясно, что оно содержит, в отличие от решения Рейснера, два дополнительных члена, зависящих от  $z$ . Эти члены имеют тот же порядок малости  $c^3 = (h/2)^3$ , ради учета которого и строилась теория толстых плит Рейснера. Поэтому для уточнения формул для напряжений требуется теория, более полная, чем теории Тимошенко–Рейснера, учитывающая эффекты не только поперечного сдвига, но и поперечного сжатия.

3. Сдвиговое напряжение  $\sigma_{xz}$  в приближении Рейснера не содержит поправки, так как уже в первом приближении тонких пластин включает малую величину порядка  $h^2$ . Дальнейшая поправка к нему должна будет иметь порядок  $h^4$ , а теория Рейснера содержит члены не выше порядка  $h^3$ .

4. Из уравнений 2D-приближения Рейснера (45)–(47) может показаться, что момент  $M = -Dw'' - bq$  должен иметь поправку  $-bq$  по сравнению с уравнениями Кирхгофа–Лява. Однако, кроме этого явного члена, сама функция  $w$  согласно уравнению равновесия  $Dw'''' = q - bq''$  тоже имеет поправку к изгибу по Кирхгофу. При вычислении момента обе поправки взаимно сокращаются. В этом можно убедиться, если два раза проинтегрировать выражение для момента и в получившееся выражение вместо  $w''''$  подставить его значение из уравнения равновесия. В результате для момента получается соотношение  $M'' = -q$ , не содержащее поправок.

5. Несмотря на указанную неточность расчета напряжений, приближение Рейснера дает возможность достаточно точно вычислять функцию изгиба плит. Это объясняется тем, что несмотря на грубый выбор класса функций, при использовании вариационного метода функция изгиба находится такой, чтобы лучше соответствовать точному решению. Может возникнуть вопрос, почему функция изгиба  $w(x)$  уточняется по сравнению с теорией Кирхгофа–Лява даже в случае постоянной нагрузки, если дифференциальное уравнение для нее (45) при  $q'' = 0$  совпадает с уравнением изгиба тонких плит Жермен. Причина в изменении

граничных условий, поскольку в силу равенства  $Dw'' = -M - bq$  граничное условие для момента равносильно граничному условию для  $w''$ , в которое входит поправка  $bq$ .

6. Вычисленный в приближении Рейснера средний угол поворота  $\theta(x)$  оказывается достаточно точным и для рассматриваемых моделей даже совпадает с точным решением. Это объясняется тем, что физический смысл приближений Рейснера, Тимошенко и Миндлина состоит именно в том, что они учитывают поперечный сдвиг слоев при изгибе толстых плит, влияющий на угол поворота сечения.

Можно отметить, что главной целью теорий Тимошенко и Рейснера (как и пионерских работ Жермен) был не расчет всех компонент напряженно-деформированного состояния пластин, а приложения теории – при ее минимальном усложнении – к задачам изгибных колебаний, когда достаточно решить уточненное уравнение изгиба пластины с добавлением инерционного члена при зависящей от времени нагрузке.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Чтобы пользоваться уточненной (но все же приближенной) теорией, требуется не только найти поправки к менее точной теории, но и сравнить их с точным решением. Точность 3D-теории толстых пластин до настоящего времени проанализирована недостаточно [Доннелл, 1982]. В 3D-теории Рейснера, в отличие от 2D-теории возникают поправки к двум изгибающим и крутящему моментам и соответственно к напряжениям благодаря взаимному влиянию деформаций по осям  $x$  и  $y$ . Эти поправки велики вблизи угловых граничных точек закрепления пластины.

В отличие от инженерных применений в геофизике более часто используют 2D-модели. Так, теория изгиба океанических литосферных плит в основном строится именно в 2D-приближении [Теркот, Шуберт, 1985]. При этом важным критерием является простота использования теории. Для 2D-моделей имеется ряд точных аналитических решений уравнений теории упругости. Это позволило провести более полный анализ 2D-теорий приближения Рейснера.

В работе выписана полная система уравнений как для изгиба плит (плоская деформация), так и балок (плоское напряжение) со всеми необходимыми явными выражениями для напряжений и смещений. Получены аналитические решения уравнений 2D-приближения Рейснера для двух наиболее используемых тестовых моделей изгиба с постоянной и синусоидальной нагрузкой. Точное решение для модели с синусоидальной нагрузкой, воспроизводимое в ряде книг и неудобное для сравнения, преобразовано в ряды и получено аналитическое решение для функции изгиба. Исследованы не только поправки к клас-

сической теории тонких пластин, но и остающиеся неточности теории Рейснера по сравнению с точными решениями уравнений упругости.

Сравнением с точными решениями в явном аналитическом виде показано, насколько теория Рейснера уточняет функцию изгиба по сравнению с классической теорией и насколько она все еще отличается от точного решения.

Поскольку расчет функции изгиба толстых двумерных плит и балок по приведенным уравнениям оказывается очень простым и в то же время почти на порядок более точным по сравнению с классической теорией изгиба тонких плит, то появляется возможность использования приведенных уравнений теории толстых плит в геофизических приложениях для расчета изгибов литосферы. В частности, можно уточнять оценки толщины упругой океанической литосферы, поскольку для этого достаточно знать только функцию изгиба.

#### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследования выполнены за счет средств бюджетного финансирования Института физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Доннелл Л.Г. Балки, пластины, оболочки. М.: Наука. 1982. 567 с.

Рябенков Н.Г. Асимптотический метод в дискуссии по теории изгиба пластин // Вест. Каз. Энерг. Ун-та. 2012. № 3(14). С. 63–75.

Сухотерин М.В., Барышников С.О., Кныш Т.П. Напряженно-деформированное состояние защемленной прямоугольной пластины Рейснера // Инженерно-строительный журнал. 2017. № 8(76). С. 225–240.

Теркот Д., Шуберт Дж. Геодинамика. М.: Мир. 1985. 360 с.

Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М.: Наука, Физматгиз. 1966. 636 с.

Тимошенко С.П. Теория упругости. Л.-М.: ОНТИ. 1937. 433 с.

Тимошенко С.П. Курс теории упругости. 1972. Киев: Наукова Думка. 498 с.

Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука. 1979. 560 с.

Трубицын В.П. Изгибные деформации плит в моделях сильных субдукционных землетрясений // Физика Земли 2012. № 2. С. 3–13.

Трубицын В.П., Трубицын А.П. Деформации упругого изгиба в океанических литосферных плитах // Докл. РАН. 2022. Т. 504. № 1. С. 60–64.

Challamel N., Elishakoff Is. A brief history of first-order shear-deformable beam and plate models // Mechanics Research Communications. Elsevier. 2019. V. 102. Article 389.

Reissner E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates // J. Applied Mechanics. 1945. № 1(12). P. 69–77.

Szilard R. Theories and Applications of Plate Analysis: Classical, Numerical and Engineering Methods. John Wiley & Sons Inc. 2004. 1024 p.

## Corrections to the Theory of Elastic Bending of Thin Plates for 2D Models in the Reissner Approximation

A. P. Trubitsyn<sup>a, \*</sup> and V. P. Trubitsyn<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Schmidt Institute of Physics of the Earth, Russian Academy of Sciences, Moscow, 123242 Russia

\*e-mail: atrub@yandex.ru

Elastic bending stresses and strains in the lithosphere are typically calculated based on the Kirchhoff–Love (thin) plate theory. The criterion for its applicability is the smallness of plate thickness to length ratio. In oceanic plates, due to the buoyant force of the mantle, the main deformations are not uniformly distributed along the plate but are concentrated in the vicinity of the subduction zone. Therefore, the effective length of the bending part of the plate is a few fractions of the actual length, and the criterion of a thin plate is partially violated. In this paper, we analyze the possibility of applying thick plate bending equations. The existing variational theories of 3D bending of thick plates are much more complicated than the Kirchhoff–Love theory, as they involve solving three differential equations instead of one, and have limited application due to their complexity. Since geophysical applications frequently use 2D models, in this paper we analyze in detail the potential and accuracy of the thick plate bending theory for 2D models. After the conversion to the 2D plane strain and plane stress approximation, the original 3D Reissner thick plate bending equations are written out in the form similar to the Kirchhoff equations with additive corrections and are supplemented with the explicit formulas for longitudinal displacement. The comparison of the analytical solutions of the 2D Reissner equations with the exact solutions shows that the 2D approximation only provides a correction for the plate bending function. However, this correction refines the Kirchhoff–Love theory by almost an order of magnitude. At the same time, the solution of the equations in this case turns out to be almost as simple as the solution of the thin plate equations.

*Keywords:* oceanic plates, bends, deformations