ФИЗИКА ЗЕМЛИ, 2024, № 2, с. 98–111

УДК 550.311

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ЕДИНЫЙ ВЫВОД УРАВНЕНИЙ РЕЙССНЕРА ДЛЯ 2D-ИЗГИБА ТОЛСТЫХ ПЛИТ И УРАВНЕНИЙ ТИМОШЕНКО ДЛЯ ИЗГИБА БАЛОК

В. П. Трубицын[1, *], А. П. Трубицын[1]
[1]Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, г. Москва, Россия
*E-mail: vtrubi@yandex.ru

Поступила в редакцию 29.09.2023 г.
После доработки 16.11.2023 г.
Принята к публикации 16.11.2023 г.

В настоящее время расчеты изгибных деформаций литосферных плит проводятся на основе теории изгиба тонких пластин Кирхгофа, сформулированной около 170 лет назад. В работе рассматривается возможность уточнения этих расчетов на основе теории изгиба толстых пластин С.П. Тимошенко и Э. Рейсснера. Дается новый единый вывод уравнений Тимошенко для 2D-изгиба балок и уравнений Рейсснера для изгиба плит непосредственным преобразованием общих уравнений упругости с простой приближенной заменой степенных кубичных функций на эффективные линейные. Такой вывод позволяет более детально и просто понять различие уравнений и смысл делаемых в этих теориях упрощений. Сравнением аналитических решений уравнений Тимошенко и Рейсснера с имеющимися тестовыми аналитическими решениями точных уравнений упругости даются количественные оценки точности этих теорий.

Ключевые слова: теория изгиба, пластины, балки, толстые плиты.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0002333724020089, **EDN:** BKISPJ

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Исторический обзор

Теория изгиба пластин (плит и балок) применяется в технике при инженерных расчетах напряженно-деформированного состояния элементов зданий, для расчета мостов, обшивок судов и самолетов. В геофизике теория изгиба плит применяется для расчета напряжений и деформаций упругого изгиба литосферы, в частности, изгиба океанических плит вблизи зон субдукции [Трубицын, Трубицын, 2022], а также изгиба дна океанов под тяжестью островов [Теркот, Шуберт, 1985]. Теория изгиба балок применяется для расчета изгибных колебаний зданий при землетрясениях. Многие здания можно рассматривать как вертикальные консольные балки, периоды собственных колебаний которых в зависимости от формы и высоты зданий меняются примерно от 0.2 с до 1 с. Периоды колебаний оснований зданий при землетрясениях зависят от механических свойств грунта и находятся в интервале 0.1–1.5 с [Корчинский и др., 1971]. При совпадении периодов возникают наибольшие разрушения.

Проблема теории изгиба пластин состоит в том, чтобы, учитывая малость отношения толщины h пластины к ее длине L, упростить общие уравнения теории упругости для расчета изгиба пластин при воздействии на них нормальной поперечной нагрузки в отсутствии продольных усилий и при условии скольжения на верхней и нижней границах пластины.

Особенность такой задачи состоит в том, что нужно преобразовать 15 взаимосвязанных уравнений Коши, Гука и уравнения равновесия. Поскольку при изгибе пластин поперечные напряжения оказываются много меньше продольных, то уже первые ненулевые члены разложения разных компонент напряжений оказываются малыми разного порядка. При этом разложение продольного напряжения σ_{xx} содержит нечетные степени параметра h или поперечной координаты z, а сдвигового напряжения σ_{xz} – четные. Поэтому при выводе уравнений теории изгиба плит возникают сложности, и приходилось вводить дополнительные упрощения.

Г.Р. Кирхгоф в 1850 г. подытожил результаты предыдущих работ С. Жермен, Ж.-Л. Лагранжа, С.Д. Пуассона, О.Л. Коши, К. Навье и др. по построению теории изгиба тонких пластин первого приближения. Чтобы избежать вопросов математического обоснования теории, Г.Р. Кирхгоф предложил при выводе уравнений основываться на постулатах.

После завершения построения теории изгиба и колебаний тонких пластин и изложении ее в монографии О.Э.Х. Лява она стала классической. Ее называют теорией Кирхгофа или Кирхгофа–Лява, или элементарной теорией. На протяжении уже более 170 лет она используется в науке и технике. Благодаря сведению трехмерной задачи к двумерной, расчеты по теории Кирхгофа очень просты, имея при этом хорошую точность.

Завершая построение теории, Г.Р. Кирхгоф поставил проблему ее уточнения путем учета эффектов поперечного сдвига и сжатия и строгого математического обоснования вывода уравнений изгиба толстых пластин. Однако долгое время многочисленные попытки уточнения теории оказывались или недостаточно точными, или слишком сложными (чтобы имело смысл заменять ими решение исходных точных уравнений упругости). Только через почти 70 лет были построены оптимальные варианты уточненных теорий в 1921 г. С.П. Тимошенко [Timoshenko, 1921] для 2D-изгиба и колебаний балок (позже обобщенных на 3D Р.Д. Миндлиным) и в 1945 г. Э. Рейсснером [Reissner, 1945] для 3D-изгиба толстых плит. Эти теории изгиба толстых пластин учитывают указанный Г.Р. Кирхгофом эффект влияния поперечного сдвига на функцию изгиба, и поэтому их называют сдвиговыми теориями Тимошенко–Рейсснера. (см. исторические обзоры [Challamel, Elishakoff, 2019; Elishakoff, 2019; Szilard, 2004]). Теории Тимошенко и Рейсснера по настоящее время имеют многочисленные применения с обобщением для расчетов изгиба многослойных композиционных пластин.

Вместо того, чтобы последовательно учитывать все члены разложения, пропорциональные z^3, С.П. Тимошенко для упрощения предложил искать решение для продольного смещения в виде эффективной линейной функции $u_x(x, y, z) = \theta(x, y) \cdot z$ с коэффициентом – эффективным углом поворота поперечного сечения пластины, являющимся неизвестной функцией. Для определения угла поворота $\theta(x, y)$ и функции изгиба (поперечного смещения срединной линии) $w(x, y)$ им используется вариационный метод с условием минимума потенциальной энергии деформации. Так же поступают и в 3D-теории Уфлянда–Миндлина, обобщающей теорию Тимошенко.

В теории Рейсснера в качестве исходного искомого берется не смещение, а продольное напряжение, и оно также ищется в виде линейной функции $\sigma_{xx}(x, y, z) = M(x, y) \cdot z$ с коэффициентом – неизвестным изгибным моментом $M(x, y)$.

Теории Тимошенко и Рейсснера используются уже около ста лет. О них обычно пишут, как о разных, но схожих теориях (см. работы [Васильев, 1988; Сухотерин, 2008]), однако до настоящего времени их детальное сравнение не проведено. В данной работе для 2D-моделей дается новый единый простой вывод уравнений Тимошенко и Рейсснера, позволяющий четче проследить сходство и различие теорий.

1.2. 2D-уравнения упругости для плит и балок

Направим координатные оси x, y и z соответственно длине, ширине и толщине тела. При этом ось z направим вниз от срединной линии или плоскости. Обычно тело называют пластиной, если отношение ее толщины к длине $h/L < 1/3$. При $h/L < 1/10$ пластина считается тонкой, при $1/10 < h/L < 1/5$ – умеренной толщины, при $1/5 < h/L < 1/3$ – толстой.

При ширине пластины, сравнимой с ее длиной, ее называют плитой. При ширине пластины, много меньшей ее длины, пластину называют балкой. Как будет видно в дальнейшем, малым параметром теории фактически является не h, а полутолщина плит или балок $c = h/2$. Для балок на свободных боковых сторонах балки обычно используются граничные условия нулевого напряжения, а для плит – условия нулевого нормального смещения.

При ненулевом коэффициенте Пуассона упругие деформации в разных плоскостях взаимно связаны. Поэтому двумерные модели напряженно-деформированного состояния, не зависящие от третьей координаты y, возможны только в случае, когда не только свойства тела и внешние силы не зависят от координаты y, но и на боковых поверхностях, кроме условия скольжения, задано либо условие нулевого нормального смещения, либо условие нулевого нормального напряжения.

В первом случае модель напряженно-деформированного состояния называется плоской деформацией. В этом случае общие 3D-уравнения упругости для 15 компонент напряженного состояния сводятся к 9 уравнениям плоской деформации для двух компонент смещений, трех деформаций и четырех напряжений, являющихся функциями x и z, [Тимошенко, Гудьер, 1975]. Уравнения равновесия имеют вид:

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}=0, \tag{1}$$

соотношения Коши

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u_x}{\partial x},\ \ \varepsilon_{zz}=\frac{\partial u_z}{\partial z},\ \ \varepsilon_{xz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}\right), \tag{2}$$

соотношения Гука

$$E\varepsilon_{xx}=\left(1-\nu^2\right)\sigma_{xx}-\nu\left(1+\nu\right)\sigma_{zz},$$
$$E\varepsilon_{zz}=\left(1-\nu^2\right)\sigma_{zz}-\nu\left(1+\nu\right)\sigma_{xx},$$
$$E\varepsilon_{xz}=\left(1+\nu\right)\sigma_{xz},\quad \sigma_{yy}=\nu\left(\sigma_{xx}+\sigma_{zz}\right). \tag{3}$$

Нулевыми являются компоненты u_y, ε_{yy}, ε_{yx}, ε_{yz}, σ_{xy}, σ_{zy}. Несмотря на то, что напряжение σ_{yy} не равно нулю, оно не влияет на все другие компоненты напряженно-деформированного состояния, так как скомпенсировано внешними силами, обеспечивающими нулевое смещение $u_y=0$. Поэтому в 2D-модели плоской деформации переменная y исключается. Эта модель применима к пластинам любой ширины (но при соблюдении граничного условии $u_y=0$).

Если граничные условия по y заданы в напряжениях и $\sigma_{yy}=0$, то 3D-уравнения также можно свести к 2D-уравнениям, но только приближенно (для очень узких балок, см. подробнее ниже). Это состояние называется плосконапряженным, и уравнения для него имеют несколько иной вид [Тимошенко, Гудьер, 1975]. Уравнения равновесия остаются прежними:

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}=0, \tag{4}$$

к соотношениям Коши добавляется ε_{yy}

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u_x}{\partial x},\quad \varepsilon_{yy}=\frac{\partial u_y}{\partial y},\quad \varepsilon_{zz}=\frac{\partial u_z}{\partial z},$$
$$\varepsilon_{xz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}\right), \tag{5}$$

а соотношения Гука принимают вид:

$$E\varepsilon_{xx}=\sigma_{xx}-\nu\sigma_{zz},\quad E\varepsilon_{zz}=\sigma_{zz}-\nu\sigma_{xx},$$
$$E\varepsilon_{xz}=\left(1+\nu\right)\sigma_{xz}. \tag{6}$$

При этом $E\varepsilon_{yy}=-\nu\left(\sigma_{xx}+\sigma_{zz}\right)$, а остальные компоненты напряжений и деформаций равны нулю: $\sigma_{yy}=0$, $\sigma_{xy}=0$, $\sigma_{zy}=0$, $\varepsilon_{yx}=0$, $\varepsilon_{yz}=0$.

При сравнении систем уравнений (1)–(3) и (4)–(6) видно, что все уравнения для плоской деформации (1)–(3) можно формально получить из уравнений для плоского напряжения (4)–(6) простой заменой в них параметров E и ν:

$$E\to E\big/\left(1-\nu^2\right),\quad \nu\to\nu/\left(1-\nu\right). \tag{7}$$

При этом модуль сдвига $G=E\big/\left(2+2\nu\right)$ не меняется. Для плоской деформации эффективный модуль E становится больше, так как закрепленную с боков плиту труднее изогнуть, чем балку, с боков свободную.

Как видно по (1)–(3) и (4)–(6), уравнения плоского напряжения оказываются несколько более простыми. Поэтому при длинных преобразованиях удобно сначала пользоваться уравнениями плоского напряжения, а затем уже конечный результат перевести в уравнения плоской деформации простой заменой (7).

При ненулевом коэффициенте Пуассона упругие деформации в разных плоскостях взаимно связаны. Поэтому в плоском напряженном состоянии ненулевая деформация ε_{yy} (которая в отличие от напряжения ничем не скомпенсирована) вызывает смещение и деформацию и по другим осям (эффект распирания или сплющивания). В результате к ним возникают поправки, зависящие от координаты y, и задача остается трехмерной. При этом, чем больше ширина пластины, тем больше величина смещения по оси y и тем больше эти поправки. Поэтому модель плоского напряжения строго применима только к бесконечно узким балкам (более подробно см. работу [Тимошенко, Гудьер, 1975], с. 284).

Продифференцировав соотношения Коши по x и z и учитывая соотношения Гука и уравнения равновесия, можно исключить смещения и деформации и привести обе системы 2D-уравнений в напряжениях к одинаковому виду:

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}=0,$$
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\sigma_{xx}+\sigma_{xz}\right)=0, \tag{8}$$

где третье дифференциальное уравнение второй степени является условием совместности Бельтрами–Митчелла. При решении задачи в напряжениях оно необходимо, так как три неизвестных напряжения нельзя однозначно найти из двух уравнений равновесия (10).

Три уравнения (8) оказываются одинаковыми для обеих моделей – и плоского напряжения, и плоской деформации. Найдя эти напряжения, по уравнениям (2), (3) или (5), (6) можно найти деформации и смещения, которые для моделей плоской деформации и плоского напряжения уже будут иметь разный вид.

Если сделать замену переменных и ввести функцию напряжения $\varphi(x, z)$ по условию:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \quad \sigma_{zz} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2},$$

$$\sigma_{xz} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}, \tag{9}$$

то система уравнений (8) сведется к одному уравнению четвертой степени:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} = 0. \tag{10}$$

При этом для модели плоской деформации это уравнение получается точно, а для плоского напряжения приближенно, так как функция напряжения в этом случае остается функцией трех переменных $\varphi = \varphi(x, y, z)$. Однако ее зависимость от y-координаты уменьшается с уменьшением ширины балки [Тимошенко, Гудьер, 1975].

При изучении упругого изгиба помимо напряжений удобно использовать их интегральные характеристики: поперечную силу Q и изгибающий момент M:

$$Q = \int_{-c}^{c} \sigma_{xz} dz, \quad M = \int_{-c}^{c} \sigma_{xx} z dz. \tag{11}$$

Для 2D-изгиба с граничными условиями скольжения на верхней и нижней границе и заданной нормальной нагрузкой сверху

$$\sigma_{xz}(x, z = -c) = 0, \quad \sigma_{xz}(x, z = c) = 0,$$
$$\sigma_{zz}(x, z = -c) = -q(x), \quad \sigma_{zz}(x, z = c) = 0 \tag{12}$$

дифференциальные уравнения равновесия (8) можно проинтегрировать по z в общем виде. Умножая первое уравнение упругого равновесия (8) на z и интегрируя второй член по частям с учетом (12), получим:

$$M' = Q. \tag{13}$$

Интегрируя по z второе уравнение упругого равновесия (8) с учетом (12), получим:

$$Q' = -q, \tag{14}$$

где штрихом обозначена производная по x. Из уравнений (13), (14) можно найти изгибающий момент и поперечную силу в случае, когда граничные условия заданы именно для них.

2. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ 2D-ИЗГИБА ТОЛСТЫХ ПЛАСТИН, С УЧЕТОМ ЭФФЕКТОВ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА И ЧАСТИЧНО ПОПЕРЕЧНОГО СЖАТИЯ

Как указывалось во ВВЕДЕНИИ, после завершения теории изгиба тонких пластин Г.Р. Кирхгоф указал, что при построении теории изгиба толстых пластин нужно учесть влияние поперечного сдвига и поперечного сжатия на продольные смещения и напряжения. Чтобы выяснить, в какой мере эти эффекты учитываются в теориях Тимошенко и Рейсснера, приведем новый единый вывод уравнений изгиба толстых пластин без обычно используемого вариационного метода.

Рассмотрим изгиб пластин (плит и балок), вызванный поперечной нагрузкой $q(x)$ с граничными условиями на верхней и нижней поверхностях по (12) и условием отсутствия продольных усилий:

$$\int_{-c}^{c} \sigma_{xx} dz = 0. \tag{15}$$

Заметим, что условие (15) ставится для того, чтобы разделить задачи об изгибе, вызванном поперечной нагрузкой с нулевым продольным усилием, и об изгибе, вызванным продольным усилием с нулевыми условиями на верхней и нижней поверхностях.

Поскольку 2D-уравнения для плоской деформации и плоского напряжения переходят друг в друга простой заменой параметров (7), а соотношения Гука (3) и (6) для плоского напряжения выглядят более просто, то основные преобразования ниже будем проводить на модели плоского напряжения.

Для задачи изгиба пластин с учетом $c/L < 1$ сначала преобразуем точные 2D-уравнения равновесия (4), (8) для напряжений $\sigma_{xx}(x, z)$, $\sigma_{xz}(x, z)$ и $\sigma_{zz}(x, z)$.

2.1. Напряжения в теориях Кирхгофа, Тимошенко, Рейсснера

Будем искать напряжение $\sigma_{xx}(x, z)$ в виде ряда по степеням z, ограничившись в первом приближении линейным членом, т.е. в виде $\sigma_{xx} = f(x) \cdot z$, где $f(x)$ – неизвестная искомая функция одной переменной (поскольку z меняется в пределах толщины пластины, то она является малой величиной порядка c). В это выражение можно явно ввести интегральную характеристику напряжения, момент $M(x)$. Подставим искомое выражение для σ_{xx} в формулу – определение момента (11). После интегрирования найдем неизвестную функцию $f = (3/2)Mc^{-3}$. В результате продольное напряжение запишется в виде:

$$\sigma_{xx} = \frac{3}{2c^3}Mz = \frac{M}{I}z, \tag{16}$$

где $I = 2c^3/3$ – момент инерции квадратного сечения, используемый в теории балок.

Подставим выражение (16) в первое дифференциальное уравнение равновесия (8). Проинтегрируем его с учетом граничного условия $\sigma_{xz}(x, z = \pm c) = 0$ и найдем напряжение σ_{xz}:

$$\sigma_{xz} = \frac{3}{4c}Q\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) = \frac{1}{2I}Q\left(c^2 - z^2\right). \tag{17}$$

Напряжение σ_{zz} найдем из второго уравнения равновесия (8). Постоянную интегрирования найдем из условия $\sigma_{zz}(x, z = -c) = -q$

$$\begin{aligned}\sigma_{zz} &= -\frac{q}{2}\left(1 - \frac{3}{2}\frac{z}{c} + \frac{1}{2}\frac{z^3}{c^3}\right) = \\ &= -\frac{1}{I}q\left(\frac{1}{3}c^3 - \frac{1}{2}c^2 z + \frac{1}{6}z^3\right).\end{aligned} \tag{18}$$

Эта часть преобразований одинакова и для теории Кирхгофа, и для теорий Тимошенко и Рейсснера. Из (16)–(18) видно, что напряжение σ_{xx} является по z линейной функцией, σ_{xz} – квадратичной и σ_{zz} – кубичной, и, соответственно, они являются малыми первого, второго и третьего порядка по параметру c. Заметим, что фактически малой величиной является относительная толщина пластины, и поэтому надо было бы ввести безразмерную переменную z/c, меняющуюся от нуля до единицы. Однако для упрощения записи общепринято это только подразумевать.

2.2. Смещения в теориях Кирхгофа, Тимошенко, Рейсснера

Обычно общие уравнения упругости записывают для всех компонент напряженно-деформированного состояния, включая деформации. Однако поскольку граничные условия обычно ставятся только для напряжений и смещений, то удобно пользоваться соотношениями Коши–Гука с исключенными деформациями. Для плоского напряжения по (4)–(6) они будут иметь вид :

$$\sigma_{xx} = E\frac{\partial u_x}{\partial x} + \nu\sigma_{zz}, \quad E\frac{\partial u_z}{\partial z} = \sigma_{zz} - \nu\sigma_{xx},$$
$$\sigma_{xz} = G\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right). \tag{19}$$

В теориях Тимошенко и Рейсснера, кроме приближения линейной зависимости от z для продольного смещения или напряжения, вводятся еще два приближения. Для упрощения вывода искомых уравнений изгиба толстых пластин пренебрегается зависимостью поперечного смещения от координаты z, т.е. приближенно полагается :

$$u_z(x, z) \approx u_z(x, z = 0) = w(x), \tag{20}$$

где $w(x)$ – функция изгиба срединной линии пластины.

Кроме того, в этих теориях вместо граничного условия нулевых продольных усилий (15) принимается более простое условие нулевого продольного смещения точек срединной линии:

$$u_x(x, z = 0) \approx 0. \tag{21}$$

Однако как будет видно ниже, последнее упрощение можно не вводить и соответственно уравнения изгиба толстых пластин можно записать в более точном виде.

2.3. Приближенная линеаризация степенных функций

Как указывалось во Введении, чтобы найти уравнения для смещений, С.П. Тимошенко и Э. Рейсснер использовали вариационный метод. При этом С.П. Тимошенко искал решение в классе линейных функций для продольного смещения, а Э. Рейсснер для продольного напряжения. Соответственно и вывод, и вид самих уравнений Тимошенко и Рейсснера несколько различаются между собой.

В настоящей работе выясняется математический смысл делаемых в теориях Тимошенко и Рейсснера упрощений с использованием единого подхода. Показывается, что суть упрощений этих теорий сводится к приближенной замене степенных кубичных функций на эффективные линейные.

На интервале толщины пластины от $-c$ до c заменим произвольную нечетную $f(z)$ функцию на линейную $f \approx \overline{f} = az$ с условием минимального квадратичного отклонения $\int_{-c}^{c}\left(f - \overline{f}\right)^2 dz = \min.$

Приравнивая нулю вариацию этого интеграла, т.е. дифференцируя по параметру a, получим:

$$a=\frac{3}{2c^3}\int_{-c}^{c} zf(z)dz, \quad \bar{f}=\frac{3z}{2c^3}\int_{-c}^{c} zf(z)dz. \quad (22)$$

При такой линеаризации линейная функция остается линейной без изменения, а кубичная $f=z^3$ заменяется на линейную $\bar{f}=3c^2z/5$ с эффективным коэффициентом $a=3c^2/5$.

Аналогично отметим, что четные функции при условии минимального квадратного отклонения можно заменить на средние постоянные $\bar{f}=\frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(z)dz$. При этом постоянная функция не изменится, а квадратичная функция $f=z^2$ заменится на постоянную $\bar{f}=c^2/3$.

2.4. Продольное смещение и продольное напряжение

Чтобы найти продольное смещение u_x, подставим напряжение σ_{xz} по (17) в третье соотношение Коши–Гука (19). С учетом условия (20) получим:

$$\frac{\partial u_x}{\partial z}=-\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{1+\nu}{EI}Q\left(c^2-z^2\right). \quad (23)$$

Откуда, интегрируя по z, находим :

$$u_x=-w'z+\frac{1+\nu}{EI}Q\left(c^2z-\frac{z^3}{3}\right)+u_x(x,0), \quad (24)$$

где $u_x(x,\ z=0)$ – произвольная функция интегрирования. Эту функцию в теории Тимошенко и Рейсснера для упрощения обычно находят из условия нулевого смещения срединной линии пластины (21), т.е. полагают $u_x(x,\ z=0)\approx 0$, а возникающей при этом неточностью пренебрегают. Однако, как будет показано ниже, можно это упрощение не вводить, а найти функцию интегрирования непосредственно из условия (15), пользуясь полученным далее выражением для σ_{xx}.

Чтобы получить основное дифференциальное уравнение для функции изгиба, С.П. Тимошенко и Э. Рейсснер применяют вариационный метод, ограничиваясь классом линейных функций. Покажем, что это уравнение для функции изгиба можно получить без вариационного метода простой приближенной заменой $z^3\approx 3c^2z/5$ в выражениях для продольного смещения и поперечного напряжения. При такой замене выражения (24) для u_x и (18) для σ_{zz} примут вид:

$$u_x\approx\bar{u}_x=-w'z+\frac{4(1+\nu)}{5EI}Qc^2z+u_x(x,0),$$

$$\sigma_{zz}\approx\bar{\sigma}_{zz}=-\frac{q}{2}\left(1-\frac{6}{5}\frac{z}{c}\right). \quad (25)$$

Для нахождения продольного напряжения σ_{xx} подставим (25) в первое соотношение Коши–Гука (19). С учетом (14) найдем напряжение σ_{xx}, выраженное через функцию изгиба:

$$\bar{\sigma}_{xx}=-Ew''z-\frac{2(2+\nu)}{5I}qc^2z+E\frac{\partial u_x(x,0)}{\partial x}-\frac{\nu}{2}q. \quad (26)$$

Подставляя это выражение в условие (15), найдем производную функции интегрирования:

$$E\frac{\partial}{\partial x}u_x(x,0)=\frac{\nu}{2}q. \quad (27)$$

В результате продольные смещение и напряжение будут равны:

$$\bar{u}_x=-w'z+\frac{6(1+\nu)}{5E}Q\frac{z}{c}+\frac{\nu}{2E}\int_0^x qdx=$$

$$=-w'z+\frac{3Q}{5Gc}z+\frac{\nu}{2E}\int_0^x qdx.$$

$$\bar{\sigma}_{xx}=-Ew''z-\frac{2(2+\nu)}{5I}qc^2z, \quad G=\frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (28)$$

Смещение u_x при $x=0$, $z=0$, являющееся постоянной интегрирования, было принято за нуль отсчета. Последний член в выражении (28) для u_x описывает растяжение срединной линии за счет поперечного сжатия, которым, как указывалось выше, в оригинальных теориях Тимошенко и Рейсснера пренебрегают.

Соответственно средний угол поворота поперечного сечения будет равен:

$$\bar{\theta}=-\frac{\partial\overline{u_x}}{\partial z}=w'-\frac{4(1+\nu)}{5EI}Qc^2. \quad (29)$$

Выражение (24) для продольного смещения u_x до линеаризации позволяет проследить, как при изгибе пластины должно искажаться поперечное сечение пластины. Первый член (24) соответствует повороту сечения на угол, равный углу изгиба срединной линии (производной w'). При этом сечение остается прямым. Первая часть второго члена (со знаком противоположным первому члену) уменьшает этот поворот. Вторая часть второго члена (пропорциональная z^3)

опять увеличивает поворот, но при этом изгибает сечение.

Однако в приближениях Тимошенко–Рейсснера после линеаризации выражение для продольного смещения (24) переходит в (28). Последнее описывает поворот пластины без изгиба ее поперечного сечения на эффективный, независящий от z угол (29). Такая замена фактически и является основной идеей теории Тимошенко в виде линейной аппроксимации продольного смещения, которая затем была использована и Э. Рейсснером для аппроксимации продольного напряжения.

2.5. Изгибный момент и поперечная сила

Подставив линеаризованное выражение (28) для продольного напряжения в определение изгибного момента (11), получим:

$$M = -EIw'' - bq, \quad Q = M' = -EIw''' - bq',$$
$$b = 0.4(2+\nu)c^2. \tag{30}$$

Продифференцировав выражение (30) для поперечной силы Q, с учетом, что $Q' = -q$, получим основное дифференциальное уравнение теории изгиба толстых пластин, а именно уравнение для функции изгиба:

$$EIw'''' = q - bq''. \tag{31}$$

Дифференцируя по x три раза выражение для угла поворота поперечного сечения (29) и подставляя в него выражение для параметра b по (30) с учетом уравнения (31) для функции изгиба $w(x)$, получим дифференциальное уравнение для угла поворота поперечного сечения $\theta(x)$

$$EI\bar{\theta}''' = q + \frac{2}{5}\nu c^2 q''.$$

В результате полную систему 2D-уравнений изгиба пластин в плоском напряженном состоянии (для изгиба балок) с учетом упрощений Тимошенко–Рейсснера можно записать в виде:

$$EIw'''' = q - bq'',\ M = -EIw'' - bq,\ Q = -EIw''' - bq',$$
$$b = 0.4(2+\nu)c^2, \quad \sigma_{xx} = \frac{M}{I}z, \quad \sigma_{xz} = \frac{Q}{2I}\left(c^2 - z^2\right),$$
$$\sigma_{zz} = -\frac{q}{I}\left(\frac{1}{3}c^3 - \frac{1}{2}c^2 z + \frac{1}{6}z^3\right),$$
$$\bar{u}_x = -w'z + \frac{3Q}{5Gc}z + \frac{\nu}{2E}\int_0^x q\,dx, \quad u_z = w,$$
$$\bar{\theta} = w' - \frac{3Q}{5Gc}, \quad EI\bar{\theta}''' = q + \frac{2}{5}\nu c^2 q''. \tag{32}$$

Решив обыкновенное дифференциальное уравнение для функции изгиба $w(x)$, далее по алгебраическим соотношениям можно найти изгибный момент $M(x)$ и поперечную силу $Q(x)$, три напряжения σ_{xx}, σ_{xz}, σ_{xz}, а также линеаризованное продольное смещение $\bar{u}_x(x,z)$ и средний угол поворота поперечного сечения $\bar{\theta}(x)$. Отметим, что благодаря дополнительному исходному упрощению (21) зависимость поперечного смещения $u_z(x, z)$ от координаты z в теориях Тимошенко и Рейсснера не находится.

Чтобы от этих уравнений изгиба балок в плоском напряженном состоянии перейти к уравнениям для изгиба плит в состоянии плоской деформации (для плит), сделаем замену (7) при неизменном G. В результате получим уравнения изгиба толстых плит для плоской деформации в виде:

$$Dw'''' = q - b_R q'', \quad M = -Dw'' - b_R q,$$
$$Q = -Dw''' - b_R q', \quad b_R = \frac{2-\nu}{10(1-\nu)}h^2,$$
$$\sigma_{xx} = \frac{12}{h^3}Mz, \quad \sigma_{xz} = \frac{6}{h^3}Q\left(c^2 - z^2\right),$$
$$\sigma_{zz} = -\frac{q}{2}\left(1 - \frac{3z}{h} + \frac{4z^3}{h^3}\right),$$
$$\bar{u}_x = -w'z + \frac{Qh^2}{5(1-\nu)D}z + \frac{\nu h^3}{24(1-\nu)D}\int_0^x q\,dx, \quad u_z = w,$$
$$\bar{\theta} = w' - \frac{h^2 Q}{5(1-\nu)D}, \quad D\bar{\theta}''' = q + \frac{1}{10}\nu h^2 q'',$$
$$D = \frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}, \tag{33}$$

где D – изгибная жесткость.

После замены модулей упругости (7) параметр b для балок заменился на b_R для плит. Эти уравнения (33) соответствуют 2D-уравнениям изгиба теории Рейсснера. В работе [Трубицын, Трубицын, 2023] они получены, исходя из общих 3D-уравнений теории Рейсснера в форме, приведенной в работе [Тимошенко, Войновский-Кригер, 1966]. При этом в (33) выражение для продольного смещения u_x уточнено нами последним членом, учитывающим эффект сплющивания под нагрузкой, поскольку это оказалось сделать просто. В оригинальных уравнениях Рейсснера этот эффект не учитывался.

Если при нахождении продольного напряжения σ_{xx} в первом соотношении Коши–Гука (19) пренебречь влиянием поперечного нормального напряжения, т.е. положить $\sigma_{zz}=0$, то вместо (27) получим несколько иное выражение для σ_{xx}, а именно $\sigma_{xx}=-Ew''z-\frac{3(1+\nu)}{2}q\left(\frac{z}{c}-\frac{1}{3}\frac{z^3}{c^3}\right)$ и после линеаризации новое σ_{xx} будет равно $\bar{\sigma}_{xx}=-Ew''z-\frac{4(1+\nu)}{5I}qc^2z$. При этом в силу исходного условия (15) автоматически оказывается, что $\partial u_x(x,0)/\partial x=0$, и поэтому зависящий от x член сплющивания выпадает не только из продольного напряжения, но и из продольного смещения.

В результате система уравнений изгиба балок в плоском напряженном состоянии (32) перейдет в

$$EIw''''=q-b_Tq'',\quad M=-IEw''-b_Tq,$$

$$Q=-IEw'''-b_Tq',\quad b_T=0.4(2+2\nu)c^2,$$

$$\sigma_{xx}=\frac{M}{I}z,\quad \sigma_{xz}=\frac{Q}{2I}\left(c^2-z^2\right)\approx\frac{Q}{2c},\quad \sigma_{zz}=0,$$

$$u_x=-w'z+\frac{3Q}{5Gc}z=-\theta z,\quad u_z=w. \tag{34}$$

Полученная система уравнений изгиба балок (34) с учетом поперечного сдвига и при пренебрежении поперечным напряжением совпадает с системой преобразованных уравнений Тимошенко (П.9).

Уравнения Тимошенко отличаются от уравнений Рейсснера в основном тем, что при выводе уравнения для функции изгиба пренебрегается влиянием поперечного напряжения на продольное напряжение. В результате этого в дифференциальном уравнении для функции изгиба изменяется выражение для параметра b. А, это ведет в свою очередь, и к изменению (упрощению) дифференциального уравнения и для угла поворота.

Таким образом, уравнения Рейсснера уточняют уравнения Тимошенко учетом эффекта поперечного сжатия, хотя, как будет показано ниже, при сравнении с тестовыми аналитическими решениями, уточнения Рейсснера все еще остаются неполными, т.к. поперечное смещение по (20) полагается постоянным по толщине пластины $u_z(x,z)\approx u_z(x,z=0)=w(x)$.

Напомним, что в теории Тимошенко (см. Приложение) еще усредняется сдвиговое напряжение, а именно вместо квадратичной функции z по (17) берется его усредненное выражение $\sigma_{xz}=\frac{Q}{2I}\left(c^2-z^2\right)\approx\overline{\sigma_{xz}}=\frac{Q}{c}$, но затем вводится поправочный коэффициент k. При выводе уравнений (34) выражение для параметра b_T и, соответственно, величина поправочного коэффициента сдвига Тимошенко $k=5/6$ получаются автоматически.

Вопрос о роли поперечного сжатия был поставлен еще Г.Р. Кирхгофом и обсуждается во многих работах по настоящее время. Чтобы проанализировать его в общем виде (но оставаясь в рамках приближения линеаризации Тимошенко—Рейсснера), найдем уравнения изгиба пластин с учетом только поперечного сжатия, пренебрегая поперечным сдвигом. Полагая в соотношении Коши (2) деформацию $\varepsilon_{xz}\simeq 0$ и учитывая, что $u_z(x,z)=w(x)$, получим $\partial u_x/\partial z=-\partial u_z/\partial x=-w'$. При сравнении этого выражения с (28) видно, что пренебрежение поперечным сдвигом формально соответствует бесконечно большому значению модуля сдвига, препятствующему поперечному сдвигу слоев пластины при ее изгибе.

При $G\to\infty$ $(\nu\to-1)$ система уравнений (32) упрощается и переходит в

$$EIw''''=q-b_1q'',\quad M=-EIw''-b_1q,$$

$$Q=-EIw'''-b_1q',\quad b_1=-\frac{2\nu}{5}c^2,$$

$$\sigma_{xx}=\frac{M}{I}z,\quad \sigma_{xz}=\frac{Q}{2I}\left(c^2-z^2\right),$$

$$\sigma_{zz}=-\frac{q}{I}\left(\frac{1}{3}c^3-\frac{1}{2}c^2z+\frac{1}{6}z^3\right),$$

$$u_z=w,\quad u_x=-w'z. \tag{35}$$

Уравнения (35) отличаются от уравнений Рейсснера (32) и уравнений Тимошенко (34) только другим выражением для параметра $b_1=0.4c^2=-0.4\nu c^2$. При сравнении уравнений (32), (34), (35) видно, что параметр b_R в уравнениях Рейсснера равен сумме $b_R=b_T+b_1$ параметра b_T уравнений Тимошенко, учитывающих только эффект поперечного сдвига без сжатия, и параметра b_1 новых полученных в настоящей работе уравнений, учитывающих только эффект поперечного сжатия без сдвига.

Если в уравнениях (32) пренебречь обоими эффектами и поперечного сдвига и поперечного сжатия, а именно при нахождении продольного напряжения σ_{xx} в первом соотношении Коши—Гука (25) положить $\sigma_{zz}=0$, а в третьем и, соответственно, в выражении для u_x положить $G\to\infty$, то, вместо (29), для σ_{xx} получим $\sigma_{xx} = -Ew''z$. При этом параметр b обратится в нуль, и уравнения (32) перейдут в уравнения Кирхгофа для 2D-изгиба тонких плит. При данном выводе уравнений Кирхгофа кубичные члены в выражениях для продольного смещения не учитываются и поэтому линеаризация не требуется. При этом вывод уравнений Кирхгофа по сравнению с традиционным, основанном на постулатах, оказывается более простым и не вызывающим вопросов.

Таким образом, различия между дифференциальными уравнениями для функции изгиба в теориях Кирхгофа, Тимошенко и Рейсснера в основном сводятся к различию выражений для параметра b.

3. ПРОВЕРКА ТОЧНОСТИ УРАВНЕНИЙ РЕЙССНЕРА И ТИМОШЕНКО СРАВНЕНИЕМ С ТЕСТОВЫМИ ТОЧНЫМИ АНАЛИТИЧЕСКИМИ РЕШЕНИЯМИ ДЛЯ СВОБОДНО ОПЕРТОЙ БАЛКИ

3.1. Постоянная нагрузка $q = \mathrm{const}$

В книге [Тимошенко, Гудьер, 1979] приведено аналитическое решение точных уравнений упругости (8) в напряжениях для модели изгиба горизонтальной балки при продольной нагрузке $q = \mathrm{const}$ с граничными условиями скольжения на верхней и нижней поверхностях, а на торцах условиями нулевого продольного усилия и нулевого изгибного момента (см. рис. 1):

$$\sigma_{xz}(x, z = \pm c) = 0, \quad \sigma_{zz}(x, z = -c) = -q,$$
$$\sigma_{zz}(x, z = c) = 0, \quad \int_{-c}^{c} \sigma_{xx}(x = \pm l, z)\, dz = 0,$$
$$\int_{-c}^{c} \sigma_{xx}(x = \pm l, z) z\, dz = 0. \tag{36}$$

Сначала решается уравнение для функции напряжения (10). Потом по (9) находятся напряжения. Затем по уравнениям Коши–Гука (19) находятся смещения и, в частности, функция изгиба $w(x) = u_z(x, z = 0)$. В результате довольно трудоемких преобразований решение для функции изгиба представляется в виде [Тимошенко, Гудьер, 1979; Трубицын, Трубицын, 2023]:

$$w(x) = u_z(x, z = 0) =$$
$$= -\frac{1}{4}\frac{q}{EI}x^2\left[\left(l^2 - \frac{1}{6}x^2\right) + \frac{4}{5}\left(2 + 1.25\nu\right)c^2\right] +$$
$$+ \frac{5}{24}\frac{ql^4}{EI}\left[1 + \frac{24}{25}l^{-2}\left(2 + 1.25\nu\right)c^2\right]. \tag{37}$$

В работе [Трубицын, Трубицын, 2023] для рассматриваемой модели свободно опертой балки получено также аналитическое решение для уравнений Рейсснера (32). Для функции изгиба это решение получается сразу и очень просто

$$w(x) = u_z(x, z = 0) =$$
$$= -\frac{1}{4}\frac{q}{EI}x^2\left[\left(l^2 - \frac{1}{6}x^2\right) + \frac{4}{5}\left(2 + \nu\right)c^2\right] +$$
$$+ \frac{5}{24}\frac{ql^4}{EI}\left[1 + \frac{24}{25}l^{-2}\left(2 + \nu\right)c^2\right]. \tag{38}$$

Его можно проверить простой подстановкой в (32). Как видно из сравнения (37) и (38), решение уравнений Рейсснера отличается от точного решения только численным коэффициентом при коэффициенте Пуассона ν в малом члене, а именно $2 + \nu$ вместо точного $2 + 1.25\nu$. Как видно по (32), это отличие определяется параметром уравнений Рейсснера $b = 0.4(2 + \nu)c^2$.

Аналитическое решение для уравнений Тимошенко (учитывающих только поперечный сдвиг), представленных в единой с уравнениями Рейсснера в форме (34), находится очевидно

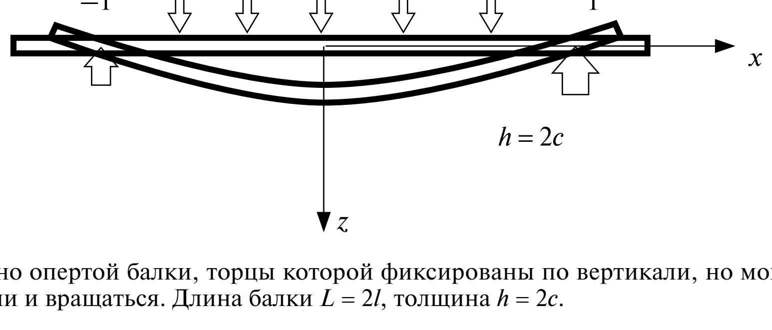

Рис. 1. Изгиб свободно опертой балки, торцы которой фиксированы по вертикали, но могут свободно перемещаться по горизонтали и вращаться. Длина балки $L = 2l$, толщина $h = 2c$.

полностью аналогично уравнениям Рейсснера [Трубицын, Трубицын 2023] с простой заменой параметра b на $b_T = 0.4(2+2\nu)c^2$ и будет иметь вид

$$w(x) = u_z(x, z=0) = \\ = -\frac{1}{4}\frac{q}{EI}x^2\left[\left(l^2 - \frac{1}{6}x^2\right) + \frac{4}{5}(2+2\nu)c^2\right] + \\ + \frac{5}{24}\frac{ql^4}{EI}\left[1 + \frac{24}{25}l^{-2}(2+2\nu)c^2\right]. \quad (39)$$

Так же получается решение для уравнений изгиба с учетом только поперечного сжатия (35)

$$w(x) = u_z(x, z=0) = \\ = -\frac{1}{4}\frac{q}{EI}x^2\left[\left(l^2 - \frac{1}{6}x^2\right) - \frac{4}{5}\nu c^2\right] + \\ + \frac{5}{24}\frac{ql^4}{EI}\left[1 - \frac{24}{25}l^{-2}\nu c^2\right]. \quad (40)$$

Уравнения Кирхгофа для 2D-изгиба тонких пластин получаются из уравнений изгиба толстых пластин в виде (32)–(35) при пренебрежении членами, пропорциональными c^2 и, соответственно, при $b = 0$.

Как видно из решений для функции изгиба (38)–(40) по сравнению с точным решением (37), уравнения Рейсснера занижают поправку к решению Кирхгофа, давая $2 + \nu$ вместо точного значения $2 + 1.25\nu$, а уравнения Тимошенко завышают ее, давая $2 + 2\nu$ вместо точного $2 + 1.25\nu$. Уравнения, учитывающие только поперечное сжатие при изгибе, сильно занижают коэффициент в поправочном члене, давая $-\nu$ вместо точного $2 + 1.25\nu$. Поправка, учитывающая эффект поперечного сдвига, оказывается намного важнее поправки, учитывающей поперечное сжатие.

Отметим, что, в отличие от решения точных уравнений упругости, ни уравнения Тимошенко, ни уравнения Рейсснера, благодаря делаемым упрощениям, поправки к решениям уравнений Кирхгофа для продольного напряжения найти не позволяют [Трубицын, Трубицын, 2023].

3.2. Синусоидальная нагрузка $q = q_0 \sin ax$

В книге [Тимошенко, Гудьер, 1979] приведено также точное аналитическое решение уравнений упругости (10) в напряжениях для модели изгиба балки при нагрузке $q = q_0 \sin ax$ с теми же граничными условиями свободно опертой балки (38). Однако это решение приведено только для напряжений и дано не в виде ряда по z, а в виде сложной комбинации синусов и косинусов, что сильно затрудняет нахождение смещений по уравнениям Гука–Коши. Поэтому в работе [Трубицын, Трубицын, 2023] это решение было разложено в ряд по степеням z до третьего порядка z^3. Затем по соотношениям Гука–Коши было найдено точное решение для функции изгиба. Оно имеет вид [Трубицын, Трубицын, 2023]:

$$w(x) = \frac{3}{2}c^{-3}\frac{q_0}{E}a^{-4}\left[1 + \frac{2}{5}a^2c^2(2+1.25\nu)\right]\sin(ax). \quad (41)$$

В работе [Трубицын, Трубицын, 2023] также было получено аналитическое решение уравнений Рейсснера (32). Запишем его в двух видах: как аналогичном точному решению, так и в виде с использованием основного параметра уравнений b:

$$w(x) = \frac{3}{2}c^{-3}\frac{q_0}{E}a^{-4}\left[1 + \frac{2}{5}a^2c^2(2+\nu)\right]\sin(ax) = \\ = \frac{q_0}{EI}\left(1 + ba^2\right]a^{-4}\sin(ax). \quad (42)$$

Сравнение точного решения (41) с решением в приближении Рейсснера (42) показывает, что решения близки и отличаются лишь численным коэффициентом в поправке, пропорциональной c^2. Запись решения с использованием параметра b удобна тем, что позволяет сразу по аналогии найти решения и для уравнений Тимошенко, и для уравнений, учитывающих только эффект поперечного сжатия, т.к. основное уравнение изгиба во всех этих приближениях имеет одинаковый вид и различается только значением b. Поэтому функция изгиба для уравнений Тимошенко будет равна:

$$w(x) = \frac{3}{2}c^{-3}\frac{q_0}{E}a^{-4}\left[1 + \frac{2}{5}a^2c^2(2+2\nu)\right]\sin(ax) = \\ = \frac{q_0}{EI}\left(1 + b_T a^2\right]a^{-4}\sin(ax), \quad (43)$$

а для уравнений, учитывающих только поперечное сжатие:

$$w(x) = \frac{3}{2}c^{-3}\frac{q_0}{E}a^{-4}\left[1 - \frac{2}{5}a^2c^2\nu\right]\sin(ax) = \\ = \frac{q_0}{EI}\left(1 + b_1 a^2\right]a^{-4}\sin(ax). \quad (44)$$

Таким образом, точность решений уравнений Рейсснера, Тимошенко и полученных в настоящей работе уравнений с учетом поперечного сжатия целиком определяется величиной параметра b.

4. ОБСУЖДЕНИЕ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теорию Кирхгофа называют линейной теорией. Однако, как видно из выражений для компонент напряжений (16)–(18), только продольное напряжение является линейной функцией z. Поэтому точнее можно сказать, что теория Кирхгофа учитывает первые ненулевые члены разложений в ряд по степеням z для компонент напряженно-деформированного состояния при изгибе пластин и является теорией изгиба первого приближения.

Созданная для уточнения теории Кирхгофа теория Тимошенко используется уже в течение столетия при расчете изгиба балок, а теория Рейсснера – при расчете изгиба плит. Их рассматривают как схожие, но независимые теории. Так же полагал и Э. Рейсснер, не ссылаясь на работы Тимошенко, хотя они были опубликованы на 20 лет раньше. Однако, как в частности видно из приведенного единого вывода, в обеих теориях фактически применяется единое приближение. Математически его можно сформулировать очень просто. В обеих теориях при выводе основного дифференциального уравнения для функции изгиба в выражениях для продольного смещения степенные кубичные зависимости от z приближенно заменяются на эффективные линейные, полагая $z^3 \approx (3/5)c^2z$. Отличие же теорий состоит в том, что уравнения Тимошенко учитывают только основной эффект поперечного сдвига, пренебрегая эффектами поперечного сжатия, а уравнения Рейсснера частично учитывают и эффект поперечного сжатия. Это приводит к различию выражений для параметра b в дифференциальном уравнении для функции изгиба, а также к различию выражений для угла поворота поперечного сечения.

Полученные единым способом уравнения изгиба плосконапряженных толстых пластин в форме (32), при замене $E \to E/(1-\nu^2)$, $\nu \to \nu/(1-\nu)$ переходят в уравнения Рейсснера для изгиба плоскодеформированных толстых плит, при пренебрежении влиянием σ_{zz} переходят в уравнения Тимошенко для изгиба балок, при $G \to \infty$ переходят в уравнения изгиба без поперечного сдвига, но с учетом влияния поперечного сжатия, а при пренебрежении членами порядка c^3 переходят в уравнения Кирхгофа. Кроме того, в полученных уравнениях выражения для продольного смещения дополняются членом $\frac{\nu}{2E}\int_0^x q dx$, выражающим продольное растяжение при поперечном сжатии нагрузкой q. Для уравнений Тимошенко, пренебрегающих эффектом поперечного сжатия, этот член можно не учитывать. Для уравнений Рейсснера он принимает вид $\frac{\nu h^3}{24(1-\nu)D}\int_0^x q dx$, и его учитывать нужно, так как теория Рейсснера отличается от теории Тимошенко именно учетом влияния поперечного сжатия. Этот член имеет третий порядок малости по параметру c или второй порядок относительно линейных членов, ради эффективного учета которых теория Рейсснера и создавалась. Без учета этого члена возникает противоречие. Благодаря коэффициенту Пуассона поперечное напряжение должно вызывать или ненулевое продольное смещение при нулевом продольном усилии, или ненулевое продольное усилие при нулевом продольном смещении.

Целью и главным результатом теорий Тимошенко и Рейсснера является получение простого дифференциального уравнения для функции изгиба, по которому при зависящей от времени нагрузке и учете силы инерции находится спектр собственных изгибных колебаний пластин [Timoshenko, 1921; 1922]. Уравнения для функции изгиба в теориях Тимошенко и Рейсснера уточняют соответствующее уравнение Кирхгофа. Однако продольное напряжение при 2D-изгибе остается таким же, как и для уравнений Кирхгофа.

Вопрос о роли поперечного сжатия при изгибе был поставлен еще Кирхгофом, но до сих пор в работах по изгибу пластин обсуждался лишь качественно. Полученные в настоящей работе уравнения изгиба, учитывающие только поперечное сжатие, дают ответ на этот вопрос (оставаясь в рамках приближения Тимошенко–Рейсснера) количественно и в общем виде.

Сравнение решений уравнения Рейсснера и Тимошенко с тестовыми аналитическими решениями точных уравнений упругости показало, что поправка к функции изгиба, вычисленная по уравнениям Тимошенко оказывается завышенной на 8%, а для уравнений Рейсснера – заниженной на 3%. При этом остающаяся неточность уравнений Рейсснера является следствием вводимого в обеих теориях упрощения

$u_z(x,z) \approx w(x)$. Поэтому уравнения Тимошенко и Рейсснера не являются полным вторым приближением теории изгиба толстых пластин.

Поскольку результаты расчета по этим теориям отличаются мало, то обе теории используются по настоящее время параллельно. При этом в уравнениях Тимошенко для изгиба балок подгоночный коэффициент сдвига берется не в виде $k = 5/6$ (получаемом в оригинальном выводе С.П. Тимошенко), а в виде более сложной функции от ν, лучше согласующейся с данными эксперимента в работе [Kaneko, 1975].

Таким образом, с точностью порядка процента для расчетов изгибов зданий при землетрясениях достаточно использовать уравнения Тимошенко с уточненным подгоночным коэффициентом сдвига, а для расчета изгибов литосферных плит – дополненную в настоящей работе систему уравнений Рейсснера. Однако на основе использованного в настоящей работе вывода эти уравнения в принципе можно еще уточнить учетом отличия поперечных смещений от функции изгиба.

В настоящей работе рассматривались только 2D-изгибы пластин, поскольку принципиальные особенности теорий Тимошенко и Рейсснера проявляются уже на 2D-моделях, а их анализ при этом сильно упрощается. В случае 3D уравнения усложняются эффектами кручения [Доннелл, 1982] и особенностями граничных условий в угловых точках. При этом уравнения для поперечных сил, вместо алгебраических будут дифференциальными.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследования выполнены за счет средств бюджетного финансирования Института физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН.

ПРИЛОЖЕНИЕ

РАЗЛИЧНЫЕ ФОРМЫ ЗАПИСИ УРАВНЕНИЙ ТИМОШЕНКО ДЛЯ ИЗГИБА БАЛОК

Уравнения Тимошенко [Timoshenko, 1921; 1922], обычно находимые вариационным методом, получаются также непосредственно из общих уравнений упругости. Их записывают в разных формах, в частности, близкой к уравнениям Рейсснера.

Согласно идее С.П. Тимошенко, ищем решение уравнений упругости (4)–(6) в виде:

$$u_x(x,y,z) \approx -\theta(x)z, \quad u_y(x,y,z) \approx 0,$$
$$u_z(x,y,z) \approx w(x), \quad \sigma_{zz}(x,y,z) \approx 0. \qquad (\text{П}1)$$

Продольное напряжение σ_{xx} найдем из первого соотношения Коши–Гука (19) с учетом, что $\sigma_{zz} = 0$:

$$\sigma_{xx} = E\partial u_x / \partial x = -E\theta'(x)z. \qquad (\text{П}2)$$

Сдвиговое напряжение можно найти из третьего соотношения Коши–Гука (19):

$$\sigma_{xz} = G(\partial u_x / \partial z + \partial u_z / \partial x) = G(-\theta + w'). \qquad (\text{П}3)$$

В приближении Тимошенко сдвиговое напряжение σ_{xz} оказывается не зависящим от z. Фактически это означает, что кроме линеаризации по z поперечного смещения, С.П. Тимошенко аппроксимирует еще и сдвиговое напряжение. Поскольку оно является четной квадратичной функцией z, то его среднее будет постоянным по z и зависеть только от x:

$$\sigma_{xz} = \frac{Q}{2I}(c^2 - z^2) \approx \overline{\sigma_{xz}} = \frac{Q}{2c}.$$

Поскольку это усредненное сдвиговое напряжение становится менее точным даже по сравнению с теорией Кирхгофа, то Тимошенко далее вводит поправочный подгоночный численный коэффициент сдвига k и в результате получает для сдвигового напряжения выражение

$$\sigma_{xzeff} = k\sigma_{xz} = kG(-\theta + w'). \qquad (\text{П}4)$$

Тогда по (11) изгибный момент и поперечная сила будут равны

$$M = \int_{-c}^{c} \sigma_{xx} z dz = -EI\theta',$$

$$Q = \int_{-c}^{c} \sigma_{xzeff} dz = 2c\sigma_{xzeff} = 2kcG(-\theta + w'), \qquad (\text{П}5)$$

где $I = (2/3)c^3$ – момент инерции поперечного сечения балки.

Подставим выражения для изгибного момента M и поперечной силы Q по (П5) в интегральные уравнения равновесия (13) и (14). В результате получим основную систему уравнений Тимошенко в виде двух уравнений второго порядка для функции изгиба $w(x)$ и для угла поворота поперечного сечения $\theta(x)$ в виде:

$$-EI\theta''=2kcG(-\theta+w'),\ 2kcG(-\theta'+w'')=-q. \quad (\text{П6})$$

Уравнения Тимошенко (П6) можно переписать в несколько другой и также часто используемой форме (в виде дифференциального уравнения для функции изгиба первого порядка, а для угла поворота — третьего порядка). Дифференцируя второе уравнение (П6), получим:

$$w'=\theta-\frac{EI}{khG}\theta'', \quad \theta'''=\frac{q}{EI}, \quad (\text{П7})$$

где $h = 2c$ — толщина балки или пластины.

Для сравнения с уравнениями Рейсснера перепишем два уравнения Тимошенко (П6) еще в одном виде, а именно в виде одного дифференциального уравнения для функции $w(x)$ изгиба четвертой степени. Дифференцируя первое уравнений (П7) три раза и подставляя в него выражение для θ''' из второго уравнения, получим:

$$EIw''''=q-\frac{EI}{2kcG}q''. \quad (\text{П8})$$

Обозначим коэффициент при q'' через b_T. С учетом выражений для G и I он будет равен $b_T=\frac{EI}{2ckG}=\frac{2+2\nu}{3k}c^2$.

Выбору поправочного коэффициента сдвига Тимошенко k посвящена большая литература (см. обзор в работе [Kaneko, 1975]). Для квадратного сечения балки Тимошенко приближенно положил его равным $k = 5/6$. В этом случае параметр b_T будет равен $b_T=0.4(2+2\nu)c^2$.

В результате уравнения Тимошенко можно записать в виде, удобном для сравнения с уравнениями Рейсснера:

$$EIw''''=q-b_Tq'', \quad b_T=0.4(2+2\nu)c^2,$$

$$\sigma_{xx}=\frac{M}{I}z, \quad \sigma_{xz}=\frac{Q}{2c}, \quad \sigma_{zz}=0,$$

$$u_x=-\theta z, \quad u_z=w, \quad \theta'''=\frac{q}{EI}. \quad (\text{П9})$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Васильев В.В. Классическая теория пластин история и современный анализ // Механика твердого тела. 1988. № 3. С. 46–58.

Доннелл Л.Г. Балки, пластины, оболочки. М.: Наука. 1982. 567 с.

Корчинский И.Л., Бородин Л.А., Гроссман А.Б., Преображенский В.С., Ржевский В.А., Ципенюк И.Ф., Шепелев В.Ф. Сейсмостойкое строительство зданий. М.: Высшая школа. 1971. 320 с.

Сухотерин М.В., Барышников С.О., Кныш Т.П. Напряженно-деформированное состояние защемленной прямоугольной пластины Рейсснера // Инженерно-строительный журнал. 2017. № 8(76). С. 225–240.

Теркот Д., Шуберт Дж. Геодинамика. М.: Мир. 1985. 360 с.

Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости, М.: Наука. 1975. 550 с.

Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М.: Наука, Физматгиз. 1966. 636 с.

Трубицын В.П., Трубицын А.П. Деформации упругого изгиба в океанических литосферных плитах // Докл. РАН. 2022. Т. 504. № 1. С. 60–64.

Трубицын А.П, Трубицын В.П. Поправки к теории упругого изгиба тонких плит для 2D-моделей в приближении Рейсснера // Физика Земли. 2023. № 4. С. 3–15.

Challamel N., Elishakoff Is. A brief history of first-order shear-deformable beam and plate models // Mechanics Research Communications. Elsevier. 2019. V. 102. P. 103389.

Elishakoff I. Who developed the so-called Timoshenko beam theory? // Mathematics and Mechanics of Solids. 2020. V. 25. 97–116. DOI: 10.1177/1081286519856931

Kaneko T. On Timoshenko's correction for shear in vibrating beams // J. of Physics D: Appl. Phys. 1975. V. 8. P. 1927–1936.

Reissner E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates // J. of Applied Mechanics. 1945. № 1(12). P. 69–77.

Szilard R. Theories and Applications of Plate Analysis: Classical, Numerical and Engineering Methods. John Wiley & Sons, Inc. 2004. 1024 p.

Timoshenko S.P. About transverse vibrations of rods of uniform cross-section // Phil. Mag. 1922. V. 43. P. 125–131.

Timoshenko S.P. On the correction factor for shear of the differential equation for transverse vibrations of bars of uniform cross-section // Philosophical Magazine. 1921. V. 44. P. 744–752.

Comparative Analysis and Unified Derivation of Reissner's Equations For 2D Bending of Thick Plates and Timoshenko's Equations for Bending of Beams

V. P. Trubitsyn[a], * and A. P. Trubitsyn*

[a]Schmidt Institute of Physics of the Earth, Russian Academy of Sciences, Moscow, 123242 Russia

**e-mail: vtrubi@yandex.ru*

Received September 29, 2023
revised November 16, 2023
accepted November 16, 2023

Abstract — Currently, calculations of flexural deformations of lithospheric plates are carried out on the basis of Kirchhoff's theory of bending of thin plates formulated about 170 years ago. The paper examines the possibility of refining these calculations based on the theory of bending of thick plates by Timoshenko and Reissner. A new unified derivation is presented of the Timoshenko equations for 2D bending of beams and the Reissner equations for bending of slabs by direct transformation of the general elasticity equations with a simple approximate replacement of power cubic functions with effective linear ones. This derivation offers a simpler and more detailed understanding of the difference between the equations and the meaning of the simplifications made in these theories. By comparing the analytical solutions of the Timoshenko and Reissner equations with the existing test analytical solutions of the exact elasticity equations, quantitative estimates of the accuracy of these theories are presented.

Keywords: bending theory, plates, beams, thick slabs