

УДК: 551.465

## ДИФФУЗИОННО-РОТАЦИОННАЯ ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ВИХРЕВЫХ ПОТОКОВ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ВИХРЯ: БАРОТРОПНОЕ ТЕЧЕНИЕ В ЗОНАЛЬНОМ КАНАЛЕ

© 2019 г. В.О. Ивченко<sup>1</sup>, В.Б. Залесный<sup>2,\*</sup>

<sup>1</sup> Национальный океанографический центр, Саутгемптон, Англия (на пенсии)

<sup>2</sup> Институт вычислительной математики РАН им. Г.И. Марчука

199333 Москва, ул. Губкина, 8

\* E-mail: zalesny@inm.ras.ru

Поступила в редакцию 26.04.2018 г.

Принята к печати 25.06.2018 г.

Обсуждается проблема параметризации вихревого потока потенциального вихря. Традиционная диффузионная параметризация дополняется включением ротационного компонента. Для анализа новой схемы используется квазигеострофическая модель динамики баротропного течения в зональном канале с неплоским дном. Находится аналитическое решение задачи и обсуждается влияние топографии на возмущения потока. Показано, что уравнение для вихревой потенциальной энтропии, позволяет связать диффузионные и "ротационные" коэффициенты.

**Ключевые слова:** параметризация вихрей, потенциальный вихрь, квазигеострофическое приближение, диффузионно-ротационная параметризация, вихревое течение в зональном канале

**DOI:** <https://doi.org/10.31857/S0002-35155313-16>

### ВВЕДЕНИЕ

Энергетические спектры показывают наличие локального максимума на синоптических масштабах [1]. Это означает, что, моделируя движения в океане, мы обязаны разрешить эти масштабы или параметризовать их. Несмотря на грандиозный прогресс в вычислительной технике расчеты по глобальным вихреразрешающим моделям на длительный период времени остаются нереализуемыми из-за малости внутреннего радиуса деформации Россби, особенно в высоких широтах. Особенно трудно изучать и моделировать вихревые структуры в высоких широтах [2], прибрежных зонах [3, 4], динамически активных акваториях [5, 6]. Помимо такого практического аспекта имеет место и другой, чисто научный аспект важности исследования параметризации синоптических движений в океане: физически разумные параметризации вихрей позволяют лучше понять динамику океана, взаимодействие вихрей со средним потоком и др.

Проблеме параметризации вихрей в океане посвящены многочисленные исследования [2, 8–25]. Вихревые потоки в океане можно разделить на потоки трассеров (температура, соленость и т. д.) и потоки импульса (рейнольдсов-

ские напряжения). Большой прогресс в последние 20 лет достигнут в параметризации трассеров с помощью метода предложенного в [26]. Благодаря этому методу было улучшено воспроизведение целого ряда особенностей циркуляции Мирового океана в моделях с грубым разрешением.

Наибольшие проблемы связаны с параметризацией вихревых потоков импульса. Хорошо известно, что параметризация подсеточных процессов в уравнениях движения в виде гармонического или бигармонического оператора от средней скорости не является параметризацией синоптических вихрей [27, 28]. Модели используют такого рода операторы для вычислительной устойчивости и не связаны с физикой взаимодействия вихрей со средним потоком.

Наиболее популярным подходом для параметризации вихревых потоков является "диффузионная параметризация" – пропорциональность вихревого потока некоторой субстанции  $A$  ее среднему градиенту

$$\overline{A'v_j'} = -K \frac{\partial \bar{A}}{\partial x_j}, \quad (1)$$

где  $v_j$  – компонент скорости,  $j$  – координата, черта сверху означает осреднение, штрихами

помечены вихревые компоненты,  $K$  – коэффициент переноса, в общем случае тензор, для простоты – скаляр.

Оказывается, что диффузионная параметризация может применяться только к сохраняющимся величинам. Она не должна применяться к импульсу, который не сохраняется из-за градиента давления. Использование диффузионной параметризации для импульса как раз ведет к гармоническому оператору от средней скорости.

Перспективным направлением в параметризации вихревых потоков в моделях динамики океана является диффузионная параметризация потоков потенциального вихря. Поскольку потенциальный вихрь является сохраняющейся величиной, то применение для него диффузионной параметризации физически разумно. Важно отметить, что если мы можем использовать диффузионную параметризацию потенциального вихря, то нет необходимости отдельно параметризовать рейнольдсовские напряжения, т. к. они уже учтены в этой схеме.

Проблема параметризации синоптических вихрей была существенно продвинута для случая зонального канала для зонально-осредненных величин. Важными проблемами параметризации являются формулировка интегральных ограничений (и, соответственно, ограничений на коэффициенты) и вывод основных определяющих параметров, от которых зависит решение. Интегральные ограничения базируются на основных законах сохранения импульса и энергии [10], [13]. Дело в том, что такие законы сохранения при использовании вводимой параметризации не будут автоматически выполняться, а требуют некоторых дополнительных интегральных ограничений на используемые коэффициенты [15, 17, 18]. Этот аспект исключительно важен для формулировки корректных схем параметризации, т. к. если параметризация даже приводит к решениям близким к экспериментальным, например из "вихреразрешающих расчетов", но не удовлетворяет этим интегральным ограничениям, она (схема параметризации) должна быть исключена из рассмотрения, как нефизическая.

Положение с вихревыми потоками потенциального вихря существенно усложняется из-за наличия ротационного компонента в этих потоках, напрямую не влияющих на средний поток. Т. е. любой вектор  $\vec{E}$ , в нашем случае вихревой поток потенциального вихря, может быть разложен на дивергентную и ротационную составляющую

$$\vec{E} = \vec{E}_{div} + \vec{E}_{rot}, \quad (2)$$

где  $rot(\vec{E}_{div}) = 0$ ,  $div(\vec{E}_{rot}) = 0$ .

Таким образом, ротационный компонент исключается из динамического баланса (т. к. он входит в уравнение под оператором дивергенции), и связь со средним градиентом потенциального вихря надо устанавливать для дивергентного компонента, а не для полного вихревого потока. Принципиальным затруднением в этой проблеме является невозможность однозначного разделения потока для ограниченной области из-за краевых условий [29]. Т. е. бессмысленно говорить о вихревом потоке потенциального вихря как "по градиенту" или "против градиента" среднего потенциального вихря, базируясь на решении вихреразрешающей модели без разделения потока на дивергентную и ротационную компоненту. Такая величина не несет информации о знаке коэффициента переноса и может быть отрицательной, что, казалось бы, исключает возможность ее использования в расчетах. На самом деле это не так.

Мы можем оценить является ли вихревой поток «по градиенту» для среднего потенциального вихря или «против градиента» используя уравнение для вихревой энстрофии. Изучение этой проблемы имеет смысл начинать с простейшей из содержательных моделей – квазигеострофической однослойной (т. е. баротропной) модели. В [30] было показано, что в баротропном зональном канале средний коэффициент вихревой диффузии в квазигеострофическом приближении неотрицателен.

Основная цель данной статьи заключается в формулировке новой диффузионно-ротационной параметризации вихревых потоков потенциального вихря. Полученное решение также важно для понимания динамики зональных потоков и влияния на них топографии.

## ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Запишем уравнения для баротропной модели в квазигеострофическом приближении [7]. Имеем

$$\frac{\partial q}{\partial t} + J(\psi, q) = T + F_B + F_H, \quad (3)$$

где  $q, \psi$  – квазигеострофический потенциальный вихрь (КПВ) и функция тока соответственно. Компоненты скорости  $\vec{v} = (u, v)$  могут быть за-

писаны как  $u = -\frac{\partial}{\partial y}\psi$ ,  $v = \frac{\partial}{\partial x}\psi$  в зональном и меридиональном направлении соответственно,

$$J(a,b) = -\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial y} \quad \text{— якобиан, } T, F_B,$$

$F_H$  — внешнее воздействие, придонное и горизонтальное трение соответственно. КПВ в баротропном потоке представляет собой сумму относительного и планетарного вихря, а также топографического члена и выражается как

$$q = \nabla^2\psi + l + \frac{l_0}{H}B, \quad (4)$$

где  $l$ ,  $l_0$  — параметр Кориолиса и его отсчетное значение,  $B$  — отклонение дна от постоянной средней глубины  $H$ ,  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  — оператор Лапласа.

### ГЕНЕРАЦИЯ ВИХРЕВОЙ ЭНСТРОФИИ И ФОРМУЛИРОВКА СХЕМЫ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ

В [30] было введено частично-зонально-временное осреднение:

$$\bar{A}(x,y) = \frac{1}{2\delta_x T} \int_{t-\delta_x}^{t+\delta_x} \int_{x-\delta_x}^{x+\delta_x} A(x',t') dx' dt', \quad (5)$$

где  $\delta_x$ ,  $T$  — масштабы осреднения по  $x$ ,  $t$  соответственно. Такое осреднение больше подходит для исследования динамики потоков в зональном периодическом канале, чем простое осреднение по времени. При использовании только временного осреднения вихревое сопротивление давления на рельефе равно нулю, поскольку рельеф дна не меняется во времени, а компонента вихревого потока КПВ, связанная с топографией равна нулю.

Важную роль в параметризации вихрей играет уравнение для вихревой квазигеострофической потенциальной энтропии (ВКПЭ). Чтобы получить это уравнение следует осреднить (3) по времени и вычистить его из (3). Получаем уравнение для флуктуации КПВ  $q'$ . Умножая его на  $q'$  и осредняя, получаем уравнение для ВКПЭ:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{q'^2}}{\partial t} + \frac{1}{2} \operatorname{div}(\overline{\bar{v}q'^2}) + \frac{1}{2} \operatorname{div}(\overline{\bar{v}'q'^2}) = \\ = -\overline{\bar{v}'q'} \cdot \nabla \bar{q} + \overline{T'q'} + \overline{F'_B q'} + \overline{F'_H q'} \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь и далее черта сверху означает осреднение согласно (5), а штрихом помечены вихревые компоненты. Второй член в левой части (6) описывает перераспределение ВКПЭ средним потоком, а третий член — перераспределение ВКПЭ вихревым потоком. Первый член в правой части (6) описывает генерацию ВКПЭ. Второй — четвертый члены в правой части описывают приток ВКПЭ от внешнего источника и его диссипацию придонным и горизонтальным трением. Заметим, что генерация ВКПЭ необязательно положительна в каждой точке. Важно, чтобы интеграл от нее по всей площади был неотрицательным.

Представим вихревой поток КПВ  $\overline{\bar{v}'q'}$  в виде суммы дивергентной компоненты, направленной по градиенту среднего КПВ (т. е.  $-k\nabla\bar{q}$ ) и ротационной компоненты  $\bar{s} = (s_x, s_y)$ . Тогда генерация ВКПВ может быть записана так:

$$\overline{\bar{v}'q'} \cdot \nabla \bar{q} = -k(\nabla\bar{q})^2 + \bar{s} \cdot \nabla \bar{q}, \quad (7)$$

где  $k$  — коэффициент диффузии КПВ. Для корректного решения коэффициент  $k$  должен быть неотрицательным.

Множество численных экспериментов с вихреразрешающими моделями демонстрируют, что генерация КПВ (левая часть (7)) локально может иметь оба знака ([31], Й. Вольф персональное сообщение). При заданной схеме (7) это может быть достигнуто только при наличии нетривиальной ротационной компоненты  $\bar{s}$ , поскольку генерация ВКПЭ дивергентной компонентой (первый член в правой части (7)) всегда положительна.

Формулируя ротационную компоненту мы предполагаем ее связь с компонентой ротора горизонтальной скорости, т. е.  $(\partial\bar{v}/\partial x - \partial\bar{u}/\partial y)$ , пропорциональной вращению элемента жидкости. При этом необходимо, чтобы

$$\operatorname{div} \bar{s} \equiv \frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial s_y}{\partial y} = 0. \quad (8)$$

Предположим, что

$$s_x = -\alpha_0 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial\bar{v}}{\partial x} - \frac{\partial\bar{u}}{\partial y} \right), \quad (9)$$

$$s_y = \alpha_0 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial\bar{v}}{\partial x} - \frac{\partial\bar{u}}{\partial y} \right), \quad (10)$$

где  $\alpha_0 = \text{const}$  — коэффициент, который мы называем ротационным.

На твердых стенках, при  $y=0$ ,  $y=L$  мы требуем выполнение условия непротекания:  $\bar{v} = 0$ .

Мы определяем коэффициент  $k$  таким образом, чтобы он равнялся постоянному значению  $k_0$  внутри области с требуемой точностью и уменьшался до нуля на твердом контуре, обеспечивая отсутствие нормального вихревого потока КПВ через границу. Это можно обеспечить, полагая

$$k = k_0 \left[ 1 + e^{-L/\Delta} - e^{-y/\Delta} - e^{(y-L)/\Delta} \right], \text{ где } \Delta \ll L. \quad (11)$$

Видно, что  $k$  близко к константе  $k_0$  внутри области и быстро уменьшается до нуля на границе. Причем, его отличие от  $k_0$  легко оценить.

Где и каким образом дополнительный ротационный компонент влияет на поток? Коэффициенты  $k$  и  $\alpha_0$  вообще говоря, не являются независимыми друг от друга, поскольку они входят в уравнение баланса ВКПЭ. Однако требуются значительные усилия для записи остальных членов в уравнении для ВКПЭ в терминах основных переменных. Это касается члена "тройной корреляции" и диссипации ВКПЭ мелкомасштабной турбулентностью, т. е. благодаря придонному трению и горизонтальной вязкости, отсутствующей у нас, но, вообще говоря, имеющей место.

## ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

**Постановка задачи.** Уравнение для КПВ (3) после осреднения (см. (5)) и с учетом параметризации может быть записано так

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} k \frac{\partial q}{\partial y} + \varepsilon \nabla^2 \psi = \\ = \frac{1}{H} \left( \frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь  $\tau_x$ ,  $\tau_y$  – компоненты тангенциального трения ветра, придонное трение предполагается линейным с коэффициентом  $\varepsilon$ , черта сверху над функциями  $q$ ,  $\psi$  опущена. Уравнение (12) решается в периодическом канале по  $x$ , длиной  $L_x$ , и шириной  $L$ .

Предположим, что в исследуемом зональном канале рельефа дна имеет большой меридиональный масштаб соизмеримый с шириной канала.

Зональный же рельеф дна может иметь совокупность масштабов, как больших, так и малых. Решение будем искать в виде рядов Фурье

по координатам. Топография дна является главным фактором возмущения потока. В ряду Фурье по меридиональной координате сохраним только первую моду. По зональной координате у нас не будет ограничений на количество мод. Детальное разрешение по зональной координате важно для динамики зонального канала, т. к. позволяет лучше описать важный механизм сопротивления давления на рельефе. Это – невязкий эффективный механизм, благодаря которому зональный перенос уменьшается на порядок и более по сравнению с аналогичным каналом с плоским дном (при одинаковом внешнем воздействии [17, 18]).

**Метод решения.** Будем искать решение задачи в виде суммы зонального потока, со скоростями  $U = const$  и «возмущенной» функции тока  $\Phi$ , умноженной на первую меридиональную моду:

$$\psi = -U y + \Phi(x) \sin(\pi y / L), \quad (13)$$

$$B = h(x) \sin(\pi y / L), \quad (14)$$

где  $h(x)$  – амплитуда возмущения рельефа дна,  $\Phi(x)$ ,  $h(x)$  – периодические достаточно гладкие функции по  $x$ . Такой подход использован в [32] для атмосферного баротропного зонального канала. Отметим, что полный зональный перенос зависит только от средней скорости  $U$ , т. к. возмущенная функция тока  $\Phi \cdot \sin(\pi y / L)$  изменяет лишь локальные скорости из-за особенностей рельефа и диффузии КПВ. Подставим (13), (14) в уравнение (12). С учетом (4), полагаем  $\tau_x = \tau_0 \sin(\pi y / L)$ ,  $\tau_y = 0$  (т. е. зональная компонента напряжения ветра, принимает максимальное значение в центре канала и синусоидально уменьшается до нуля на стенках). Получаем

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi y}{L} \left[ \begin{aligned} &U \left( \Phi_{xxx} - \frac{\pi^2}{L^2} \Phi_x + \frac{l_0}{H} h_x \right) + \\ &+ \beta \Phi_x - k \left( \Phi_{xxx} - \frac{\pi^2}{L^2} \Phi_{xx} + \frac{l_0}{H} h_{xx} \right) \end{aligned} \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{v}' q') + \\ + \frac{\pi}{L} \sin \frac{\pi y}{L} \cos \frac{\pi y}{L} \left[ \begin{aligned} &-\Phi \Phi_{xxx} - \frac{l_0}{H} (\Phi h_x - \Phi_x h) + \\ &+ \Phi_x \Phi_{xx} \end{aligned} \right] = \\ = -\frac{\pi \tau_0}{HL} \cos \frac{\pi y}{L} - \varepsilon \sin \frac{\pi y}{L} \left( \Phi_{xx} - \frac{\pi^2}{L^2} \Phi \right). \quad (15)$$

Здесь и далее нижним индексом "x" помечены производные по x от  $\Phi$ ,  $h$ .

Проинтегрируем (15) по y от 0 до L. Слагаемое  $\int_0^L \frac{\partial}{\partial y} \overline{v'q'} dy$  равно нулю, так как нормальный вихревой поток через твердый контур равен нулю.

Замечая, что интеграл от слагаемого, пропорционального  $\sin(\pi y/L)\cos(\pi y/L)$  также равен нулю, имеем

$$U \left( \Phi_{xxx} - \frac{\pi^2}{L^2} \Phi_x + \frac{l_0}{H} h_x \right) + \beta \Phi_x - k_0 \left( \Phi_{xxx} - \frac{\pi^2}{L^2} \Phi_{xx} + \frac{l_0}{H} h_{xx} \right) \left[ 1 - \frac{\pi^2 \Delta^2 (1 + e^{-L/\Delta})}{L^2 + \pi^2 \Delta^2} \right] + \varepsilon \left( \Phi_{xx} - \frac{\pi^2}{L^2} \Phi \right) = 0. \quad (16)$$

Легко показать, что слагаемые с коэффициентом  $\Delta$  малы и могут быть опущены. Поэтому в (16) и в последующих уравнениях мы ими пренебрегаем. Умножая (15) на  $\cos(\pi y/L)$ , и интегрируя по y от 0 до L и по x от 0 до  $L_x$  получим:

$$\int_0^{L_x} \left[ \Phi \Phi_{xxx} - \Phi_x \Phi_{xx} + \frac{l_0}{H} (\Phi h_x - \Phi_x h) \right] dx + 3\beta k_0 L_x = \frac{3\pi L_x \tau_0}{4H}. \quad (17)$$

Интегральное соотношение (17) позволяет найти неизвестную величину  $U$  при условии  $h \neq const$ . Если  $h \equiv const$ , то задача может иметь решение только при  $\tau_0 = 0$ . Отметим, что необходимым условием разрешимости задачи является  $\int_0^{L_x} \Phi dx = 0$ . В [30] теорема Брезертонна (о равенстве нулю полного меридионального вихревого потока КПВ в канале с плоским дном) обобщена на случай зонального канала с изменяющейся топографией. Показано, что

$$\int_0^{L_x} \int_0^L \overline{v'q'} dx dy = \int_0^{L_x} \int_0^L \frac{l_0}{H} \overline{v'B'} dx dy. \quad (18)$$

Правая часть (18) описывает сопротивление давления на рельефе, оказываемое вихрями. При выводе (18) в [30] учитывалась только дивергентная компонента вихревого потока КПВ. Нетрудно показать, что учет ротацион-

ной компоненты не меняет обобщенную теорему Брезертонна (18), т. к.

$$\int_0^{L_x} \int_0^L s_y dx dy = 0, \quad (19)$$

в силу условия периодичности по x.

Полный (проинтегрированный по x) нормальный вихревой поток КПВ через твердый контур должен обращаться в ноль. В общем случае это не означает равенства нулю полного потока каждой из компонент. В нашей постановке в ноль обращаются полные вихревые потоки обеих компонент, поскольку  $k = 0$  при  $y = 0, L$ , а также  $\int_0^{L_x} s_y |_{y=0,L} dx = 0$  из-за условия периодичности.

Выпишем полезное энергетическое соотношение. Умножая (16) скалярно на  $\Phi(x)$ , после преобразований получим

$$\{E, \tau\} = \{E, k\} + \{E, h\} + \{E, \varepsilon\} + \{E, \beta\}, \quad (20)$$

$$\{E, \tau\} = \frac{3\pi}{8H} U \tau_0,$$

$$\{E, k\} = \frac{k_0}{L_x} \int_0^{L_x} \left[ (\Phi_{xx})^2 + \frac{\pi^2}{L^2} (\Phi_x)^2 \right] dx > 0,$$

$$\{E, h\} = -\frac{k_0}{L_x} \int_0^{L_x} \frac{l_0}{H} \Phi_x h_x dx,$$

$$\{E, \varepsilon\} = \frac{\varepsilon}{L_x} \int_0^{L_x} \left[ (\Phi_x)^2 + \frac{\pi^2}{L^2} (\Phi)^2 \right] dx > 0,$$

$$\{E, \beta\} = \frac{3Uk_0\beta}{2} > 0, \text{ при } k_0 > 0.$$

Соотношение (20) является уравнением баланса кинетической энергии возмущенного течения в стационарном режиме. Член  $\{E, \tau\}$  описывает генерацию энергии ветром, остальные члены описывают диссипацию. Причем член  $\{E, k\}$  описывает диссипацию за счет перемешивания КПВ,  $\{E, h\}$  – диссипацию при перемешивании КПВ, связанную с топографией,  $\{E, \varepsilon\}$  из-за придонного трения,  $\{E, \beta\}$  – из-за топографического сопротивления давления на рельефе, благодаря параметризуемым вихрям ([30]). В правой части (20) слагаемые  $\{E, k\}$  и  $\{E, \varepsilon\}$  включают квадраты величин, поэтому они положительны и диссипативны.  $\{E, h\}$  тоже положительно согласно сохранению КПВ. Отметим, что задача рассматривается для южного полушария, где  $l_0 < 0$ . При зональном движении над

поднятием рельефа ( $h_x > 0$ ), меридиональная скорость направлена к экватору, т. е.  $\Phi_x > 0$ . Знак у этого члена сохраняется в северном полушарии, поскольку изменение знака параметра Кориолиса сопровождается также изменением знака меридиональной скорости.

Слагаемое  $\{E, \beta\}$ , описывая потерю энергии при взаимодействии вихрей с топографией может быть только неотрицательной величиной. Таким образом, слагаемые  $\{E, k\}$ ,  $\{E, h\}$  и  $\{E, \beta\}$  требуют положительности  $k_0$  [30].

Перейдем к решению уравнения (16) с ограничением (17). Представим  $\Phi$ , а также топографию  $h(x)$  в виде рядов Фурье

$$\Phi = \sum_n a_n \cos(2\pi x / L_x) + \sum_n b_n \sin(2\pi x / L_x), \quad (21)$$

$$h = \sum_n c_n \cos(2\pi x / L_x) + \sum_n d_n \sin(2\pi x / L_x), \quad (22)$$

где константы  $a_n$ ,  $b_n$  являются неизвестными, а  $c_n$  и  $d_n$  — заданы.

Подставляя (21), (22) в (16), (17) и собирая коэффициенты при  $\sin(2\pi x / L_x)$  и  $\cos(2\pi x / L_x)$  получаем:

$$a_n \left( UM^{(n)} - \beta \frac{2\pi}{L_x} n \right) - b_n N^{(n)} - c_n U \frac{l_0}{H} \frac{2\pi}{L_x} n + d_n k_0 \frac{l_0}{H} \left( \frac{2\pi}{L_x} \right)^2 n^2 = 0, \quad (23)$$

$$-a_n N^{(n)} - b_n \left( UM^{(n)} - \beta \frac{2\pi}{L_x} n \right) + c_n k_0 \frac{l_0}{H} \left( \frac{2\pi}{L_x} \right)^2 n^2 + d_n U \frac{l_0}{H} \frac{2\pi}{L_x} n = 0, \quad (24)$$

$$\sum_n n(a_n d_n - b_n c_n) + \frac{3\beta k_0 L_x H}{2l_0 \pi} = \frac{3L_x \tau_0}{8l_0}, \quad (25)$$

где

$$M^{(n)} = \left( \frac{2\pi}{L_x} \right)^3 n^3 + \frac{2\pi^3}{L^2 L_x} n,$$

$$N^{(n)} = k_0 \left( \frac{2\pi}{L_x} \right)^4 n^4 + k_0 \frac{4\pi^4}{L^2 L_x^2} n^2 + \varepsilon \left( \frac{2\pi}{L_x} \right)^2 n^2 + \varepsilon \left( \frac{\pi}{L} \right)^2.$$

В результате получаем систему  $(2n+1)$  уравнений с  $(2n+1)$  неизвестными  $a_n, b_n, U$ . Не вы-

писывая, из-за громоздкости, решение задачи, отметим его важное свойство. Оно состоит в том, что для любого  $U \neq 0$ , от нуля отличны только те  $a_n, b_n$ , для которых оба коэффициента  $c_n$  и  $d_n$  не обращаются в ноль. Таким образом, если ряды в (22) конечны, то конечны и ряды в (21).

Соотношение (25) выражает баланс интегрального импульса. Импульс, привнесенный в канал извне под действием ветра (правая часть (25)), балансируется сопротивлением давления на рельефе дна благодаря среднему течению (первый член в левой части (25)), а также параметризованным вихрям (второй член в левой части (25)).

Как уже отмечалось, сопротивление давления на рельефе дна является главным механизмом баланса притока импульса от ветра для Антарктического циркумполярного течения (АЦТ) [33–35].

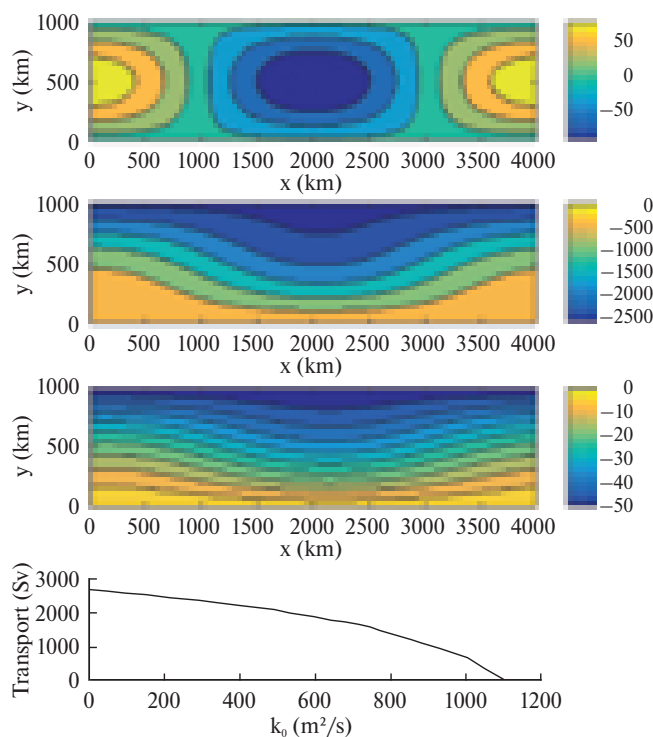
**Численные эксперименты.** Была проведена серия экспериментов для различных видов топографии. Расчеты сделаны для "периодического" зонального канала протяженностью  $L_x = 4 \cdot 10^6$  м, шириной  $L = 10^6$  м, глубиной  $H = 5 \cdot 10^3$  м. Канал находится в Южном полушарии с планетарной завихренностью (параметром Кориолиса)  $l_0 = -1 \cdot 10^{-4} \text{ c}^{-1}$  и параметром  $\beta = 1.4 \cdot 10^{-11} \text{ м}^{-1} \text{ c}^{-1}$ . В серии экспериментов использовались различные значения коэффициентов диффузии потенциального вихря  $k_0$ .

Алгоритм решения задачи был следующим. Для некоторой заданной скорости  $U$ , используя аналитическое решение системы (23)–(24), находятся  $a_n, b_n$ , при известных  $\tau_0, k_0, \varepsilon$ . Затем из (25) определяется соответствующая амплитуда тангенциального напряжения ветра  $\tau_0$ . Методом "пристрелки" мы находим то  $U$ , которое соответствует нужному значению  $\tau_0$ .

Возмущения топографии задавались как амплитуды для соответствующей моды, т. е.  $c_n$  и  $d_n$ . Данная методика позволяет использовать любое количество зональных мод.

Эксперимент 1 использует одну косинусоидальную топографическую моду  $n = 1$ , с амплитудой  $c_1 = 100$  м (рис. 1, верхняя панель).

В первой и четвертой четвертях по зональной переменной имеет место поднятие с амплитудой 100 м, уменьшающееся до нуля на северной и южной границах (из-за множителей  $\sin(\pi y / L)$  см. (14)) (рис. 1, верхняя панель). Во второй и



**Рис. 1.** Топография  $h$  (м), функция тока, умноженная на толщину слоя  $H\psi$  (Св) и график зависимости переноса зонального течения от  $k_0$ . Сверху вниз:  $h$ ,  $H\psi$  при  $k = 0$  и  $k = 1.1 \cdot 10^3$  (м<sup>2</sup>/с), зависимость переноса от  $k_0$ . Эксперимент 1,  $c_1 = 100$  м.

третьей четвертях находится впадина. Результирующий поток обтекает препятствия согласно сохранению потенциального вихря, т. е. смещение потока при уменьшении глубины должно быть в сторону экватора (рис. 1, вторая и третья панели).

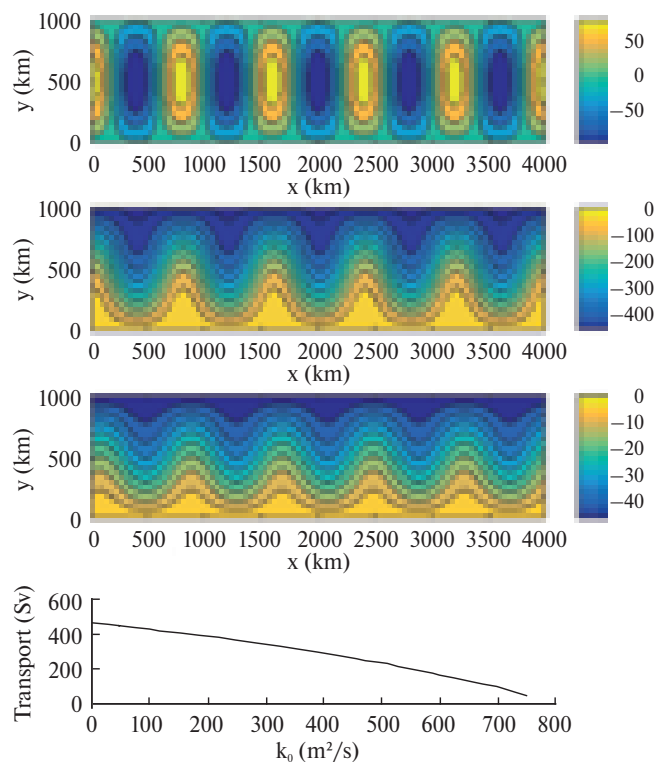
Поскольку топография в этом эксперименте весьма гладкая, а ее амплитуда всего 100 м, то зональный перенос при  $k_0 = 0$  составляет значительную величину 2665 Св. Надо осторожно сравнивать зональный расход в нашем идеализированном канале с расходом АЦТ, который составляет около 135 Св по данным наблюдений. Тем не менее мы используем геофизические параметры и амплитуду тангенциального напряжения ветра близкими к реальным параметрам в АЦТ, поэтому сравнение расходов представляет интерес. По мере увеличения коэффициента  $k_0$  расход течения заметно уменьшается (см. рис. 1, нижняя панель) и при  $k_0 = 1100$  м<sup>2</sup>с<sup>-1</sup> составляет 50 Св.

В эксперименте 2 задавалась амплитуда  $c_3 = 100$  м (рис. 2, верхняя панель). В этом случае имеют место 5 холмов и 5 впадин с амплиту-

дами 100 м. Результирующий поток в обоих случаях обтекает эти топографические особенности (рис. 2, 2-я и 3-я панели). Используемая топография представляет собой более значительный по сравнению с экспериментом 1 барьер для зонального потока, увеличивая топографическое сопротивление, а перенос падает. Функции тока для  $k_0 = 0$  и для  $k_0 = 750$  похожи (рис. 2, 2-я и 3-я панели). С увеличением  $k_0$  расход продолжает уменьшаться (рис. 2, нижняя панель). Так, при  $k_0 = 0$  расход составляет 460 Св, а при  $k_0 = 750$  он равен 45 Св.

Очевидно, что использование ненулевых коэффициентов (амплитуд) для синусоидальной моды (т. е.  $d_n$  вместо  $c_n$ ) приведет к сдвигу топографических особенностей по зональной координате на  $\delta x = L_x / (4n)$ . Использование одинаковых амплитуд для одинаковых мод (как например, при  $c_1 = 400$  м и  $d_1 = 400$  м) не приводит к качественному изменению режима потока, а ведет к сдвигу по зональной координате, при этом переносы у них совпадают.

При этом увеличение амплитуды рельефа увеличивает топографическое сопротивление давления и тем самым уменьшает перенос. Так,



**Рис. 2.** То же, что на рис. 1. Сверху вниз:  $h$ ,  $H\psi$  при  $k = 0$  и  $k = 750$  (м<sup>2</sup>/с), зависимость переноса от  $k_0$ . Эксперимент 2,  $c_3 = 100$  м.

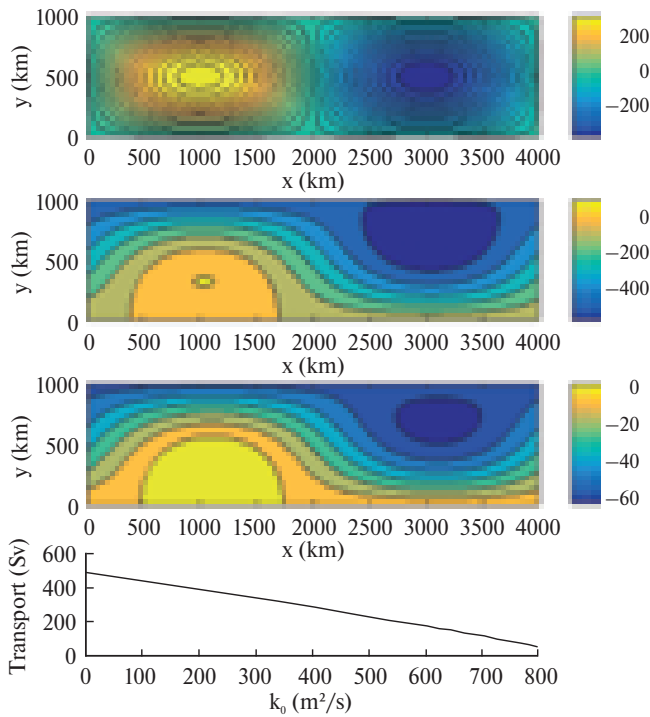


Рис. 3. То же, что на рис. 1. Сверху вниз:  $h$ ,  $H\psi$  при  $k = 0$  и  $k = 800$  ( $\text{м}^2/\text{с}$ ), зависимость переноса от  $k_0$ . Эксперимент 3,  $d_1 = 400$  м.

если в эксп. 1 при  $c_1 = 100$  м (для  $k_0 = 0$ ) перенос составляет 2665 Св, то в эксп. 3, при  $d_1 = 400$  м (для  $k_0 = 0$ ) перенос составляет 492.5 Св (см. рис. 3). С увеличением  $k_0$  перенос в эксп. 3 уменьшается и при  $k_0 = 800 \text{ м}^2\text{с}^{-1}$  он равен 55 Св.

Использование разных амплитуд для синусоидальной и косинусоидальной мод вносит значительные изменения в режим потока. Одинаковая амплитуда возмущения топографии, но для разных разнесенных мод приводит к появлению высокочастотных колебаний функции тока (из-за высокочастотной компоненты топографии), наложенной на низкочастотную изменчивость. При этом амплитуда высокочастотной компоненты заметно меньше амплитуды низкочастотной компоненты.

Мы видим, что топография играет исключительно важную роль в динамике зонального баротропного канала. В эксперименте 4 (рис. 4) задавались одинаковые по высоте топографические возмущения в 40 м для всех первых десяти мод, т. е.  $c_1 = c_2 = \dots = c_{10} = d_1 = \dots = d_{10} = 40$  м (рис. 4, верхняя панель).

В этом случае наиболее значительные препятствия находятся в начале и конце канала

(рис. 4, 2-я и 3-я панели), а также видна серия топографических особенностей по амплитуде, разнесенных по всей длине канала. В результате зональный перенос составляет 139.5 Св. при  $k_0 = 0$  и уменьшается до 2.5 Св при  $k_0 = 370 \text{ м}^2\text{с}^{-1}$ .

В [30] показано, что  $k_0$  должен быть положительным и ограниченным сверху. Во-первых,  $k_0 < k_{\text{max}}$ , где  $k_{\text{max}} = \pi\tau_0 / (4\beta H)$ , что составляет для наших параметров  $1.12 \cdot 10^3 \text{ м}^2\text{с}^{-1}$ . Это ограничение следует из того факта, что сток кинетической энергии, осуществляемый за счет параметризации вихрей должен быть меньше генерации кинетической энергии ветром (это — единственный источник). Заметим, что для всех рассматриваемых экспериментов имеет место более сильное ограничение сверху  $k_0 < k_{\text{eff}}$ , где  $k_{\text{eff}} < k_{\text{max}}$ , а  $k_{\text{eff}}$  зависит от конкретной топографии (разумеется и от других внешних параметров). Так  $k_{\text{eff}}$  можно оценить, примерно:  $1.11 \cdot 10^3 \text{ м}^2\text{с}^{-1}$ ,  $810 \text{ м}^2\text{с}^{-1}$ ,  $770 \text{ м}^2\text{с}^{-1}$  и  $375 \text{ м}^2\text{с}^{-1}$  в эксп. 1–4, соответственно.

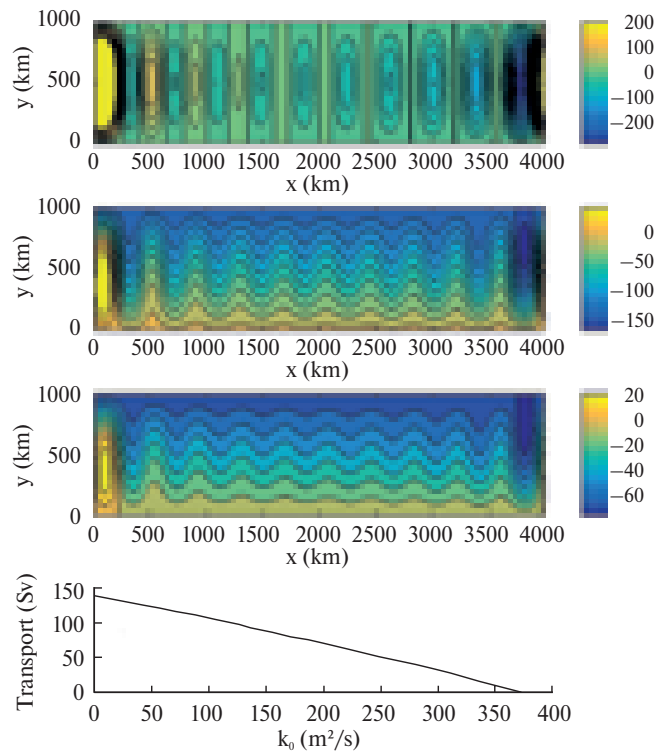


Рис. 4. То же, что на рис. 1. Сверху вниз:  $h$ ,  $H\psi$  при  $k = 0$  и  $k = 200$  ( $\text{м}^2/\text{с}$ ), зависимость переноса от  $k_0$ . Эксперимент 4,  $c_1 = c_2 = \dots = c_{10} = d_1 = \dots = d_{10} = 40$  м.



### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕНЕРАЦИИ ВКПЭ ДЛЯ ДИФфуЗИОННО-РОТАЦИОННОЙ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ

В предыдущем разделе было построено решение для "возмущенной" функции тока  $\Phi$ . Это открывает возможность расчета генерации ВКПЭ – как его дивергентного, так и ротационного компонентов. Будем рассчитывать три компонента генерации ВКПЭ: генерацию дивергентной части вихревого потока КПВ (GENER DIV), генерацию ротационной части (GENER ROT) и их сумму (GENER SUM).

Во всех расчетах GENER DIV положительна, поскольку это – произведение положительного  $k_0$  на квадрат градиента КПВ (рис. 5–8, верхние панели). GENER ROT и GENER SUM могут быть как положительны, так и отрицательны. В экс. 1 ( $c_1 = 100$  м) наибольшие значения GENER DIV наблюдаются в северной окрестности поднятий или южной окрестности впадин, где сужается поток и увеличивается кинетическая энергия возмущенного течения (рис. 5, верхняя панель).

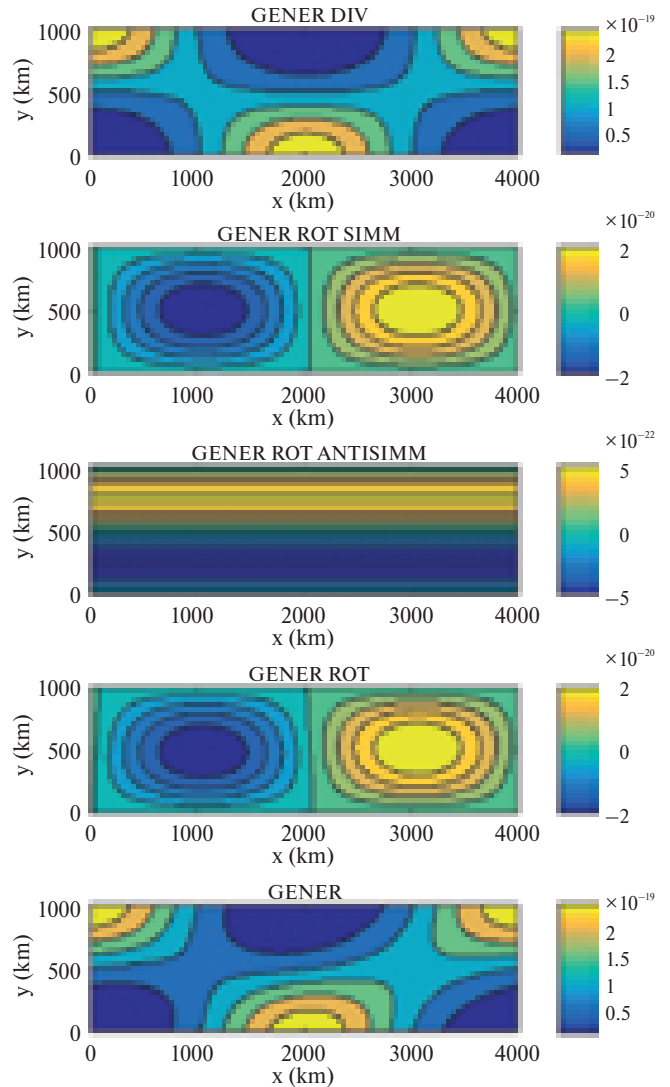
Генерация ВКП ротационной компонентой может быть представлена суммой симметричной и антисимметричной по меридиану (относительно центральной параллели) частей:

$$\begin{aligned} \text{GENER\_ROT} = & -\alpha_0 \beta \sin \frac{\pi y}{L} \left( \Phi_{xxx} - \frac{\pi^2}{L^2} \Phi_x \right) + \\ & + \alpha_0 \frac{\pi}{L} \frac{l_0}{H} \sin \frac{\pi y}{L} \cos \frac{\pi y}{L} \times \\ & \times \left[ \Phi_{xx} h_x - \frac{\pi^2}{L^2} (\Phi h_x - \Phi_x h) - \Phi_{xxx} h \right]. \quad (26) \end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части (26) представляет собой симметричную, а второе – антисимметричную части. В экспериментах 1–4 антисимметричная меридиональная часть заметно меньше симметричной (рис. 5–8), в которой важную роль играет  $\beta$ -член. Нетрудно показать, что интеграл от симметричной части по всему каналу равен нулю из-за периодичности, а от антисимметричной – по определению. Имеем

$$\int_0^L \int_0^L \text{GENER\_ROT} dx dy = 0. \quad (27)$$

Таким образом, GENER ROT генерирует (или является стоком) ВКПЭ локально, но в ин-



**Рис. 5.** Генерация ВКПЭ: дивергентной компонентой (верхняя панель), симметричной меридиональной ротационной компонентой (вторая панель), антисимметричной меридиональной ротационной компонентой (третья панель), полной ротационной компонентой (четвертая панель), и суммарной компонентой (нижняя панель) (в  $\text{с}^{-3}$ ). Эксперимент 1,  $c_1 = 100$  м,  $k_0 = 500 \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\alpha_0 = 10^3 \text{ м}^2/\text{с}$ .

тегральном смысле он лишь перераспределяет ВКПЭ.

При малых значениях ротационного коэффициента  $\alpha_0$  вклад ротационной компоненты в генерацию ВКПЭ меньше по модулю вклада дивергентной компоненты и поэтому их сумма везде положительна (см. рис. 5, 7). С увеличением положительного  $\alpha_0$  вклад ротационной компоненты увеличивается и их сумма становится знакопеременной (см. рис. 6, 8). Нетрудно показать, что из условия сохранения КПВ генерация

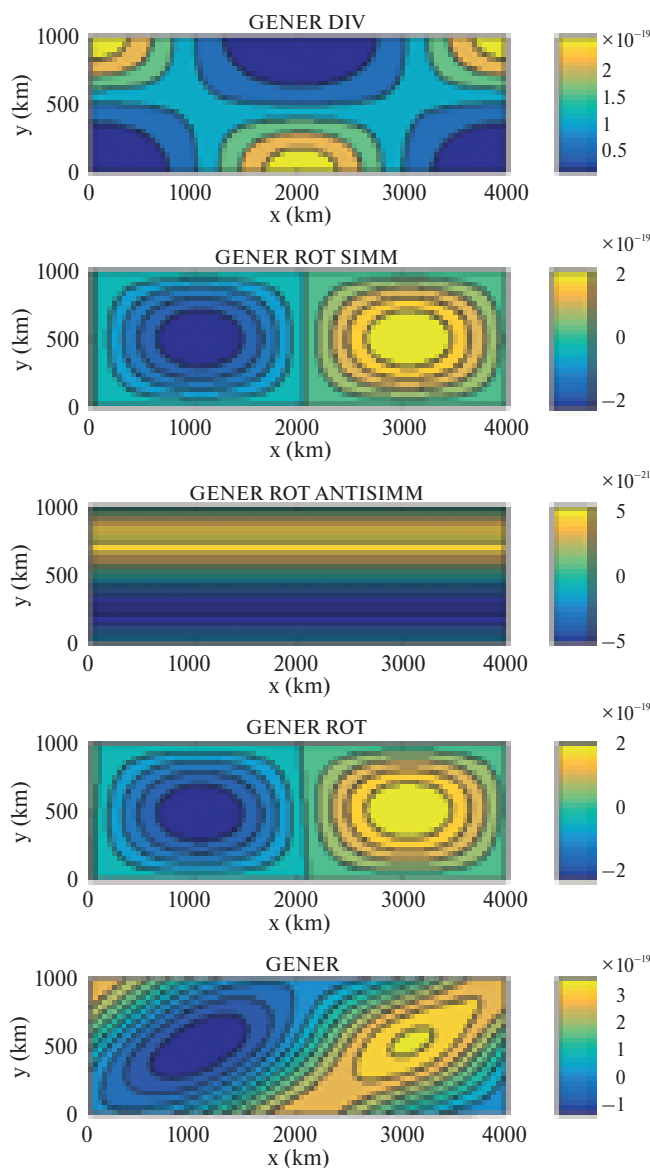


Рис. 6. То же, что на рис. 5. Эксперимент 1,  $c_1 = 100$  м,  $k_0 = 500$  м<sup>2</sup>/с,  $\alpha_0 = 10^4$  м<sup>2</sup>/с.

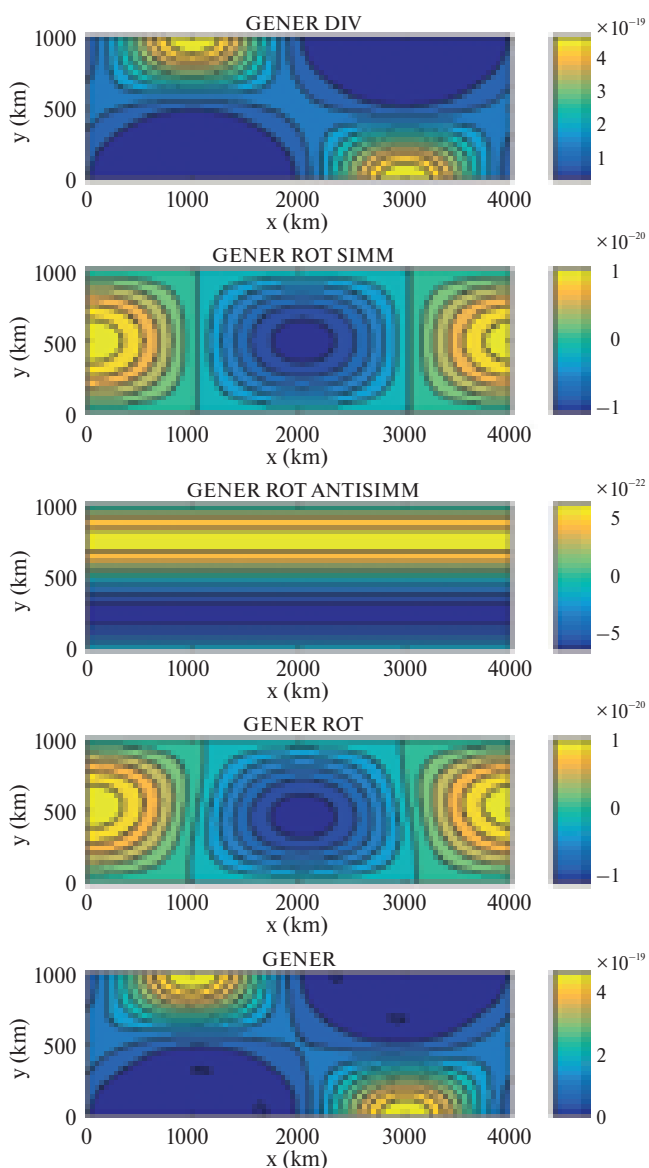


Рис. 7. То же, что на рис. 5. Эксперимент 3,  $d_1 = 400$  м,  $k_0 = 300$  м<sup>2</sup>/с,  $\alpha_0 = 10^3$  м<sup>2</sup>/с.

ВКПЭ симметричной ротационной компонентой  $GENER\_ROT < 0$  там, где  $h_x < 0$  и  $GENER\_ROT > 0$  там, где  $h_x > 0$  (см. рис. 5–8).

## ДИСКУССИЯ И ВЫВОДЫ

Не вызывает сомнения важность проблемы параметризации синоптических вихревых потоков. Существующие модели океана, даже с очень высоким разрешением, не описывают таких движений в высоких широтах, где стратификация слабая и радиус Россби мал. С другой стороны, чисто научный интерес диктует най-

ти такие записи параметризованных вихревых потоков, которые позволили бы лучше понять динамику процессов. Можно привести такой пример, подтверждающий важность параметризации мезомасштабных возмущений. Известно, что в зональном канале с плоским дном синоптические возмущения способствуют концентрации среднего зонального импульса в центре струи [7, 36]. Это — в чистом виде пример «отрицательной вязкости» в потоке. Т. е. если мы хотим описать этот эффект, мы должны использовать отрицательные значения коэффициента горизонтальной вязкости (при традиционной

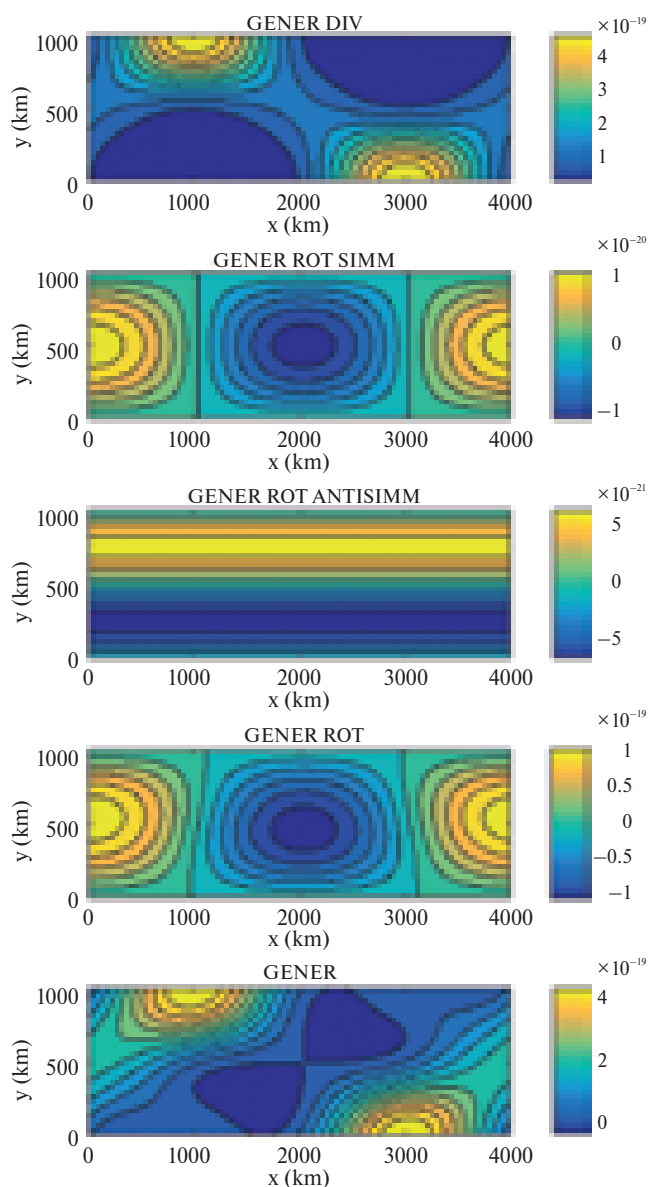


Рис. 8. То же, что на рис. 5. Эксперимент 3,  $d_1 = 400$  м,  $k_0 = 300$  м<sup>2</sup>/с,  $\alpha_0 = 10^4$  м<sup>2</sup>/с.

параметризации вязкости гармоническим оператором от скорости), что приводит к некорректной задаче. Использование диффузионной параметризации для вихревых потоков потенциального вихря позволило описать такой эффект корректным путем: коэффициент для потенциального вихря (разумеется везде положительный) имеет профиль по меридиональной компоненте с локальным минимумом в центре потока [14]. Такой профиль был получен с использованием уравнения для ВКПЭ [19].

Принципиальным вопросом в диффузионной параметризации КПВ является знак гене-

рации ВКПЭ, поскольку численные вихре-разрешающие эксперименты демонстрируют возможность наличия обоих знаков (положительных и отрицательных) у этого члена. Таким образом, в "чистом виде" (т. е. без ротационной компоненты) диффузионная параметризация может быть поставлена под сомнение.

Основной задачей настоящего исследования является введение диффузионно-ротационной параметризации для вихревых потоков КПВ. Такой подход осуществлен в этой статье, где сформулирована как параметризация, так и найдено решение в виде рядов Фурье.

Был использован метод решения, предложенный в [30, 32]. Он позволяет найти любое количество зональных мод. Интересно, что два из трех полученных уравнений (23), (24) описывают форму  $n$  зональных мод, не зависящих явно от других мод. Уравнение (25) – интеграл по зональной координате, описывает баланс импульса. Приток импульса от ветра (правая часть (25)) балансируется сопротивлением давления на рельефе (левая часть (25)), оказываемым средним движением и параметризованными вихрями. Сопротивление давления на рельефе зависит от всех ненулевых мод.

Выведено уравнение баланса кинетической энергии возмущенного движения и показано, что основной источник описывается членом, пропорциональным амплитуде тангенциального напряжения ветра и средней зональной скорости. Имеется два члена, описывающие стоки энергии благодаря придонному трению и диффузии КПВ.

Рельеф дна задается имеющим большой горизонтальный масштаб по меридиональной координате, и набор заданных зональных масштабов, что важно для динамики зональных потоков, позволяя лучше описать важный механизм сопротивления давления на рельефе.

Построенное аналитическое решение было применено к большому набору различных типов рельефа дна, для зональных крупномасштабных, для зональных мелкомасштабных, их комбинации и т. д. Решение описывает смещение функции тока под влиянием рельефа и диффузии потенциального вихря, соответствуя нашим представлениям о сохранении КПВ.

Используя аналитическое решение, рассчитывается генерация ВКПЭ для предложенной диффузионно-ротационной параметризации

для различных типов рельефа дна. Была исследована зависимость генерации ВКПЭ как дивергентного, так и ротационного компонентов. Суммарная генерация ВКПЭ имела оба знака для всех типов рельефа при достаточно большом  $\alpha_0$ , что подтверждает использование корректной параметризации для дивергентной части (т. е. при положительном коэффициенте  $k$ ).

Таким образом ротационный компонент не влияет напрямую на динамику потока, поскольку дивергенция от него равна нулю. Однако он влияет на динамику опосредованно, поскольку выбор коэффициента диффузии КПВ  $k$  зависит от ротационного компонента через баланс ВКПЭ.

Мы показали важность уравнения для ВКПЭ. Во многих исследованиях, в которых вычисляется вертикальная турбулентная вязкость, используется уравнение баланса кинетической турбулентной энергии [37, 38]. Аналогичную роль в нашем случае играет уравнение для ВКПЭ.

Следующим этапом должно быть детальное исследование связи дивергентной и ротационной частей через уравнение для ВКПЭ. При этом дополнительные исследования необходимы для понимания и параметризации «тройных корреляций» и мелкомасштабной диссипации ВКПЭ.

Данное исследование предполагается продолжить для бароклинной двухслойной модели. Следует ожидать определенной коррекции результатов в связи с появлением бароклинной неустойчивости и ее воздействия на вихревые потоки. В дальнейшем следует попытаться обобщить результаты рассмотренной параметризации на случай примитивных уравнений, отказавшись от квазигеострофического приближения.

**Благодарности.** В.О. Ивченко благодарит Национальный океанографический Центр и Университет Саутгемптона за поддержку работы.

**Источник финансирования.** Работа В.Б. Залесного выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 18-11-00163 и РФФИ, грант № 18-05-00177.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Каменкович В.М., Кошляков М.Н., Монин А.С. Синоптические вихри в океане. Л.: Гидрометеоздат, 1982. 264 с.
2. Ivchenko V.O., Danilov S., Olbers D. Eddies in numerical models of the Southern Ocean // In: Ocean modeling in an eddying regime / Eds. M. Hecht and H. Hasumi. AGU. 2008. P. 177–198.
3. Залесный В.Б., Гусев А.В., Агошков В.И. Моделирование циркуляции Черного моря с высоким разрешением прибрежной зоны // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2016. Т. 52. № 3. С. 316–333.
4. Зацепин А.Г., Кондрашов А.А., Корж А.О. и др. Субмезомасштабные вихри на кавказском шельфе Черного моря и порождающие их механизмы // Океанология. 2011. Т. 51. № 4. С. 592–605.
5. Дианский Н.А., Залесный В.Б., Мошонкин С.Н., Русаков А.С. Моделирование мусонной циркуляции Индийского океана с высоким пространственным разрешением // Океанология. 2006. Т. 46. № 4. С. 421–442.
6. Мошонкин С.Н., Тамсалу Р., Залесный В.Б. Моделирование морской динамики и турбулентных зон на вложенных сетках с высоким пространственным разрешением // Океанология. 2007. Т. 47. № 2. С. 805–815.
7. McWilliams J.C., Holland W.R., Chow J.S. A description of numerical Antarctic Circumpolar Currents // Dyn. Atmos. Oceans. 1978. V. 2. P. 213–291.
8. Green J.S. A. Transfer properties of the large-scale eddies and the general circulation of the atmosphere // Quart. J. R. Meteorol. Soc. 1970. V. 96. № 4. P. 157–185.
9. Welander P. Lateral friction in the ocean as an effect of potential vorticity mixing // Geophys. Fluid Dyn. 1973. V. 5. № 2. P. 173–189.
10. Marshall J.C. On the parameterization of geostrophic eddies in the ocean // J. Phys. Oceanogr. 1981. V. 11. № 2. P. 257–271.
11. Eden C. Parameterising meso-scale eddy momentum fluxes based on potential vorticity mixing and a gauge term // Ocean Modelling. 2010. V. 32. № 1–2. P. 58–71.
12. Eden C., Greatbatch R.J. Towards a mesoscale eddy closure // Ocean Modelling. 2008. V. 20. № 3. P. 223–239.
13. Ивченко В.О. Параметризация вихревых потоков квазигеострофической потенциальной завихренности в зональных потоках // ДАН СССР. 1984. Т. 277. № 4. С. 972–976.

14. *Ивченко В.О.* Вихревые переносы в зонально-осредненных течениях и их параметризация // *Гурецкий В.В., Данилов А.И., Ивченко В.О., Клепиков А.В.* Моделирование циркуляции Южного океана / Ред. В.О. Ивченко. Л.: Гидрометеиздат, 1987. 200 с.
15. *Ивченко В.О.* Влияние топографии дна на коэффициент вихревого переноса // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.* 1987. Т. 23. № 2. С. 200–208.
16. *Ivchenko V.O., Richards K.J., Sinha B., Wolff J.-O.* Parameterization of mesoscale eddy fluxes in zonal ocean flows // *J. Mar. Res.* 1997. V. 55. № 6. P. 1127–1162.
17. *Ivchenko V.O., Sinha B., Zalesny V.B., Marsh R., Blaker A.T.* Influence of bottom topography on integral constraints in zonal flows with parameterized potential vorticity fluxes // *J. Phys. Oceanogr.* 2013. V. 43. № 2. P. 311–323.
18. *Ivchenko V.O., Danilov S., Sinha B., Schroeter J.* Integral constraints for momentum and energy in zonal flows with parameterized potential vorticity fluxes: governing parameters // *J. Phys. Oceanogr.* 2014. V. 44. № 3. P. 922–943.
19. *Ivchenko V.O., Danilov S., Shroeter J.* Comparison of the effect of parameterized eddy fluxes of thickness and potential vorticity // *J. Phys. Oceanogr.* 2014. V. 44. № 9. P. 2470–2484.
20. *Marshall D.P., Adcroft A.J.* Parameterization of ocean eddies: Potential vorticity mixing, energetics and Arnold's first stability theorem // *Ocean Modelling.* 2010. V. 32. № 2–3. P. 188–204.
21. *Marshall D.P., Maddison J.R., Berloff P.S.* A framework for parameterizing eddy potential vorticity fluxes // *J. Phys. Oceanogr.* 2012. V. 42. № 4. P. 539–557.
22. *Olbers D.* On the role of eddy mixing in the transport of zonal ocean currents. In: *Marine turbulence. Theories, Observations, and Models.* Eds. H. Baumert, J. Simpson, J. Suendermann. Cambridge Univ. Press, 2005. 630 p.
23. *Ringler T., Gent P.* An eddy closure for potential vorticity // *Ocean Modelling.* 2011. V. 39. № 1–2. P. 125–134.
24. *Treguier A.M., Held I.M., Larichev V.D.* Parameterization of quasigeostrophic eddies in primitive equation ocean models // *J. Phys. Oceanogr.* 1997. V. 27. № 4. P. 567–580.
25. *Wardle R., Marshall J.* Representation of eddies in primitive equation models by a PV fluxes // *J. Phys. Oceanogr.* 2000. V. 30. № 10. P. 2481–2503.
26. *Gent P.R., McWilliams J. C.* Isopycnal mixing in ocean circulation models // *J. Phys. Oceanogr.* 1990. V. 20. № 1. P. 150–155.
27. *Harrison D.E.* On the diffusion parameterization of mesoscale eddy effects from a numerical ocean experiment // *J. Phys. Oceanogr.* 1978. V. 8. № 9. P. 913–918.
28. *Killworth P.D.* On the parameterization of eddy transfer. Part 1. Theory // *J. Marine Res.* 1997. V. 55. № 6. P. 1171–1197.
29. *Fox-Kemper B., Ferrari R., Pedlosky J.* On the indeterminacy of rotational and divergent eddy fluxes // *J. Phys. Oceanogr.* 2003. V. 33. № 2. P. 478–483.
30. *Ivchenko V.O., Zalesny V.B., Sinha B.* Is the coefficient of eddy potential vorticity diffusion positive? Part 1: barotropic zonal channel // *J. Phys. Oceanogr.* 2018. V. 48. № 6. P. 1589–1607.
31. *Sinha B.* The influence of mesoscale eddies and topography on Southern Ocean Flow // Ph. D. Thesis, Southampton University, 1993. 197 pp.
32. *Charney J.G., Shukla J., Mo K.C.* Comparison of a barotropic blocking theory with observation // *J. Atmos. Sci.* 1981. V. 38. № 4. P. 762–779.
33. *Munk W.H., Palmen E.* Note on the dynamics of the Antarctic Circumpolar Current // *Tellus.* 1951. V. 3. № 1. P. 53–55.
34. *Ivchenko V.O., Richards K.J., Stevens D.P.* The dynamics of the Antarctic Circumpolar Current // *J. Phys. Oceanogr.* 1996. V. 26. № 5. P. 753–774.
35. *Stevens D.P., Ivchenko V.O.* The zonal momentum balance in an eddy-resolving general-circulation model of the Southern Ocean // *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.* 1997. V. 123. P. 929–951.
36. *McWilliams J.C., Chow J.S.* Equilibrium geostrophic turbulence. I. A reference solution in a beta plane channel // *J. Phys. Oceanogr.* 1981. V. 11. № 7. P. 921–949.
37. *Залесный В.Б., Тамсалу Р.* Моделирование морской экосистемы высокого пространственного разрешения с помощью гидроэкологической модели FRESKO // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана.* 2009. Т. 45. № 1. С. 108–122.
38. *Мошонкин С.Н., Залесный В.Б., Гусев А.В., Тамсалу Р.* Моделирование турбулентности в задачах циркуляции океана // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана.* 2014. Т. 50. № 1. С. 57–69.

## Diffusion-rotational parameterization of eddy fluxes of potential vorticity: barotropic flow in the zonal channel

V.O. Ivchenko<sup>1</sup>, V.B. Zalesny<sup>2,\*</sup>

<sup>1</sup> *University of Southampton, National Oceanography Centre, Southampton, UK (retired)  
European Way, Southampton SO14 3ZH UK*

<sup>2</sup> *Marchuk Institute of Numerical Mathematics, Russian Academy of Science  
Gubkin St., 8, Moscow, 199333, Russia*

\* *E-mail: zalesny@inm.ras.ru*

Received: 26.04.2018

Revised version received: 25.06.2018

The problem of parametrization of the eddy fluxes of a potential vorticity is discussed. Traditional diffusion parameterization is complemented by the inclusion of a rotational component. For the analysis of the new scheme, a quasi-geostrophic model of the dynamics of the barotropic flow in a zonal channel with a non-uniform bottom is used. An analytical solution of the problem is found and the influence of topography on the flow disturbances is discussed. It is shown that the equation for the eddy potential enstrophy allows to relate diffusion and «rotational» coefficients.

**Keywords:** eddies parameterization, potential vorticity, quasi-geostrophic approximation, diffusion-rotational parameterization, eddy flow in a zonal channel.