УДК 551.5:532.5

ИЗЛУЧАТЕЛЬНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ БАРОТРОПНОГО СТРУЙНОГО ТЕЧЕНИЯ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ АТМОСФЕРЕ

М. В. Калашник

Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН
109017, Москва, Пыжевский пер., 3, Россия
Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН
123242, Москва, Б. Грузинская ул., 10, стр. 1, Россия
E-mail: kalashnik-obn@mail.ru

Поступила в редакцию 23.06.2018 г.
Принята к печати 06.02.2019 г.

Рассмотрена задача об устойчивости струйного течения с кусочно-линейным профилем скорости в стратифицированной вращающейся атмосфере. Линеаризованная система уравнений для возмущений сведена к одному уравнению относительно амплитуды продольной компоненты скорости, содержащему точки поворота. В терминах функций Эйри построено асимптотическое решение уравнения, справедливое при малых значениях числа Россби. Показано, что течение, устойчивое в рамках квазигеострофического приближения, становится неустойчивым за счет излучения инерционно-гравитационных волн. Получено аналитическое выражение для инкремента нарастания возмущений.

Ключевые слова: гидродинамическая неустойчивость, струйные течения, излучение волн, инерционно-гравитационные волны, потенциальная завихренность, квазигеострофическое приближение, волны Россби.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0002-35155533-10

ВВЕДЕНИЕ

Под излучательной неустойчивостью понимают неустойчивость гидродинамических течений, обусловленную излучением волн, уносящих энергию на бесконечность [1]. Этот тип неустойчивости достаточно широко исследовался как в теоретической акустике [2–6], так и в гидродинамике стратифицированной жидкости [7–10]. Основное внимание при этом уделялось рассмотрению локализованных осесимметричных и эллиптических вихрей. Струйные течения, формирующиеся на скачках потенциальной завихренности (PV) во вращающемся слое мелкой воды, рассматривались в работах [11, 12]. Волновые возмущения этих течений представляют собой поверхностные гравитационные волны и так называемые краевые квазигеострофические волны Россби, связанные со скачком PV. К излучательной неустойчивости течений приводит взаимодействие волн двух классов [12].

Описание излучательной неустойчивости требует сращивания асимптотических решений уравнений динамики и, в общем случае, достаточно громоздко. В настоящей работе, в рамках модели стратифицированной вращающейся атмосферы, рассмотрен пример излучательной неустойчивости, допускающий простое аналитическое исследование. В этом примере рассматривается двумерное струйное течение с кусочно-линейным профилем скорости. Линеаризованная система уравнений для возмущений течения сводится к одному дифференциальному уравнению, содержащему точки поворота. С использованием равномерных асимптотик решений этого уравнения показано, что течение, которое в модели несжимаемой однородной среды часто называют stable jet [13], становится неустойчивым за счет излучения внутренних инерционно-гравитационных волн (ИГВ). Применительно к излучению акустических волн аналогичный результат был получен в недавней работе [14].

Следует отметить, что практический интерес к излучательной неустойчивости стимулирован поиском динамических механизмов, обеспечивающих непрерывную (спонтанную) генерацию волн. С этими механизмами связывают наблюдаемые волновые проявления от атмосферных фронтов и струйных течений [15]. В последние годы активно исследовались два таких механизма — механизм генерации волн вихревыми возмущениями в сдвиговых течениях [16–18] и механизм нелинейного геострофического приспособления [19, 20]. Излучательная неустойчивость дополняет эти механизмы.

Отметим также, что, в теоретическом плане, излучательная неустойчивость тесно связана с концепцией о разделении движений стратифицированной вращающейся жидкости на быстрые волновые движения (ИГВ) и медленные вихревые (квазигеострофические) движения. Асимптотический анализ уравнений динамики показывает, что такое разделение является неполным даже при малых значениях числа Россби [21–24]. Этот факт приводит к спонтанному (вторичному) излучению волн в ходе медленной эволюции квазигеострофических движений.

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ В КВАЗИГЕОСТРОФИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Рассматривается горизонтальный слой стратифицированной вращающейся атмосферы высоты H с постоянными значениями частоты плавучести N и инерционной частоты f. Предполагается, что в этом слое имеется баротропное течение $U_* = U_0 U(y/L)$ с характерной скоростью U_0 и горизонтальным масштабом L. В приближении гидростатики поведение малых возмущений течения описывается системой уравнений

$$\begin{gathered} Du/Dt - \left(f - U_*'(y)\right)\mathrm{v} = -p_x, \\ D\mathrm{v}/Dt + fu = -p_y, \quad p_z = \sigma, \\ D\sigma/Dt + N^2 w = 0, \\ u_x + \mathrm{v}_y + w_z = 0. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь u, v, w — компоненты скорости вдоль горизонтальных осей x, y и направленной вертикально вверх оси z соответственно, p — возмущение нормированного на среднюю плотность давления, σ — плавучесть, $D/Dt = \partial/\partial t + U_*(y)\partial/\partial x$ — оператор полной производной. В отсутствие фонового течения система (1) описывает динамику длинных инерционно-гравитационных волн [13].

При задании условия $w = 0$ на твердых границах слоя $z = 0$, H, система (1) допускает разделение переменных — решение представляется в виде рядов по собственным функциям (модам) оператора d^2/dz^2:

$$\left(u, \mathrm{v}, p\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n, \mathrm{v}_n, p_n\right)\cos\frac{n\pi}{H}z,$$

$$\left(w, \sigma\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(w_n, \sigma_n\right)\sin\frac{n\pi}{H}z.$$

Подставляя эти ряды w_n, σ_n в (1) и исключая w_n, σ_n, для каждой вертикальной моды получим систему уравнений (нижний индекс для краткости опускаем)

$$\begin{gathered} Du/Dt - \left(f - U_*'(y)\right)\mathrm{v} = -p_x, \\ D\mathrm{v}/Dt + fu = -p_y, \\ Dp/Dt + a^2(u_x + \mathrm{v}_y) = 0. \end{gathered} \tag{2}$$

В этой системе, аналогичной линеаризованной системе уравнений мелкой воды, $a = NH/\pi n$ — фазовая скорость n-й моды гравитационных волн в отсутствие вращения [13].

В анализе удобно использовать безразмерную форму (2). Принимая в качестве масштабов координат, времени, скорости и давления соответственно L, L/U_0, U_0, fU_0L, из (2) получим систему

$$\begin{gathered} \varepsilon\, Du/Dt - \left(1 - \varepsilon\, U'(y)\right)\mathrm{v} = -p_x, \\ \varepsilon\, D\mathrm{v}/Dt + u = -p_y, \\ \varepsilon\, F^2 Dp/Dt + u_x + \mathrm{v}_y = 0, \end{gathered} \tag{3}$$

содержащую два безразмерных параметра: $\varepsilon = U_0/fL$ — число Россби, $F = L/L_R$ — отношение горизонтального масштаба течения к радиусу деформации Россби $L_R = a/f$. Из системы (3) следует уравнение переноса потенциальной завихренности (PV) для возмущений

$$Dq/Dt = U''(y)\mathrm{v}, \quad q = \mathrm{v}_x - u_y - F^2(1 - \varepsilon\, U'(y))p, \tag{4}$$

играющее важную роль в последующем рассмотрении.

Далее будем рассматривать кусочно-линейный профиль скорости

$$U(y) = 1 - |y|, \tag{5}$$

описывающий неограниченное струйное течение с разрывом завихренности при $y = 0$ (размерная форма профиля $U_*(y) = U_0(1 - |y|/L)$). Для профиля (5) $U'(y) = -\mathrm{sgn}(y)$, $U''(y) = -2\delta(y)$, где sgn(y), δ(y) функция выделения знака и дельта функция соответственно. С учетом второго равенства, уравнению (4) удовлетворяют возмущения с нулевой PV

$$\mathrm{v}_x - u_y - F^2(1-\varepsilon U'(y))p = 0, y \neq 0. \quad (6)$$

Для таких возмущений система уравнений (3) сводится к одному уравнению относительно продольного компонента скорости

$$(\varepsilon F)^2 D^2u/Dt^2 + F^2\left(1-\varepsilon U'(y)\right)u = u_{xx} + u_{yy}. \quad (7)$$

Это уравнение получается применением оператора D/Dt к первому уравнению системы с последующим использованием (6). Отметим, что входящий в (7) безразмерный параметр $\varepsilon F = U_0/a$ является некоторым аналогом числа Маха (отношение характерной скорости течения к скорости ИГВ).

Прежде чем переходить к дальнейшему анализу, исследуем устойчивость течения (5) в квазигеострофическом приближении $\varepsilon << 1$, когда асимптотически $u = -p_y$, $\mathrm{v} = p_x$ и PV $q = q_g = p_{xx} + p_{yy} - F^2 p$. Динамика возмущений при этом описывается уравнением (4). Полагая в (4) $q = q_g$ и отыскивая решения в форме нормальных мод $p = \tilde{p}(y)e^{ik(x-ct)}$, получим уравнение

$$\left(U-c\right)\left(\tilde{p}_{yy} - \kappa^2\tilde{p}\right) = -2\delta(y)\tilde{p}, \ \kappa = \sqrt{k^2+F^2}, \quad (8)$$

где k — волновое число, c — комплексная фазовая скорость. Из (8) следует, что всюду вне линии разрыва $\tilde{p}_{yy} - \kappa^2\tilde{p} = 0$, откуда $\tilde{p} = r\exp\left(-\kappa\left|y\right|\right)$, $\tilde{p}_y = -r\,\mathrm{sgn}(y)\kappa\exp\left(-\kappa\left|y\right|\right)$, где r — произвольная постоянная. Для определения c используется условие на разрыве, которое получается интегрированием (8) по малой окрестности точки $y = 0$:

$$(1-c)\left(\tilde{p}_y(+0) - \tilde{p}_y(-0)\right) = -2\tilde{p}(0). \quad (9)$$

С учетом этого условия для фазовой скорости получим выражение

$$c = 1-\kappa^{-1} = 1-\left(k^2+F^2\right)^{-1/2}, \quad (10)$$

свидетельствующее об устойчивости струйного течения в рамках квазигеострофической модели. Возмущение давления, $p = r\exp\left(-\kappa\left|y\right|\right)\exp ik(x-ct)$, играющее роль функции тока возмущения, списывает прижатую к скачку завихренности волну, распространяющуюся с фазовой скоростью c (10). В квазигеострофической теории подобные волны часто называют краевыми волнами Россби [13]. Ниже будет показано, что за счет излучения ИГВ, амплитуда этих волн медленно нарастает, т. е. возникает неустойчивость. В математическом плане эта неустойчивость обусловлена появлением комплексной поправки к скорости (10) с положительной мнимой частью.

АМПЛИТУДНОЕ УРАВНЕНИЕ И УСЛОВИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ

Рассмотрим теперь динамику возмущений в рамках полной (нефильтрованной) системы (3), (4). Будем представлять в возмущения форме нормальных мод

$$(u, \mathrm{v}, p) = \left(\tilde{u}(y), \tilde{\mathrm{v}}(y), \tilde{p}(y)\right)e^{ik(x-ct)}, \quad (11)$$

где в круглых скобках правой части стоят амплитуды, зависящие только от y. Система уравнений для амплитуд сводится к одному уравнению относительно амплитуды продольной компоненты скорости

$$\tilde{u}_{yy} + \kappa^2\left((\varepsilon\tilde{F})^2(\left|y\right| - \tilde{c})^2 - 1 + \varepsilon k^{-2}\tilde{F}^2\,\mathrm{sgn}(y)\right)\tilde{u} = 0, \quad (12)$$

где обозначено $\tilde{c} = 1-c$, $\kappa = \sqrt{k^2+F^2}$, $\tilde{F} = Fk/\kappa$. Данное уравнение прямо следует из уравнения (7). Отметим, что параметр $\tilde{c}$ есть разность осевой скорости течения $U(0) = 1$ и фазовой скорости c. При $\varepsilon << 1$ и вблизи линии разрыва (12) сводится к уравнению $\tilde{u}_{yy} - \kappa^2\tilde{u} = 0$, которое удовлетворяется в квазигеострофической теории.

Амплитуды поперечной компоненты скорости и возмущения давления связаны с амплитудой $\tilde{u}$ диагностическими (поляризационными) соотношениями

$$\tilde{\mathrm{v}} = -ik\Delta^{-1}\left(\tilde{u}_y - \varepsilon F^2(1-\varepsilon U')(U-c)\tilde{u}\right),$$
$$\tilde{p} = -\Delta^{-1}\left((1-\varepsilon U')\tilde{u}_y + \varepsilon k^2(U-c)\tilde{u}\right),$$
$$\Delta = k^2 + F^2(1-\varepsilon U')^2, \quad (13)$$

где, напомним, $U'(y) = -\mathrm{sgn}(y)$. Соотношения (13) следуют из амплитудной формы первого уравнения системы (3) и уравнения (6)

$$ik\varepsilon(U-c)\tilde{u} - (1-\varepsilon U'(y))\tilde{\mathrm{v}} + ik\tilde{p} = 0,$$
$$ik\tilde{\mathrm{v}} - \tilde{u}_y + F^2\left(1-\varepsilon U'(y)\right)\tilde{p} = 0. \quad (14)$$

Рассматривая (14) как систему линейных алгебраических уравнений относительно $\tilde{\mathrm{v}}, \tilde{p}$, получим соотношения (13).

Для построения решения однородного уравнения (12) к нему нужно присоединить условия на разрыве $y = 0$ и условия на бесконечности. Условия на разрыве завихренности сводятся к непрерывности нормальной компоненты скорости и давления при переходе через разрыв: $\tilde{p}(+0) = \tilde{p}(-0)$, $\tilde{v}(+0) = \tilde{v}(-0)$. С учетом (13) эти условия дают соотношения, связывающие $\tilde{u}$ и $\tilde{u}_y$ по обе стороны от разрыва.

На бесконечности будем требовать выполнения принципиально важного условия излучения. Оно состоит в том, что поток волновой энергии $\Pi = \langle vp \rangle$ (в системе координат, связанной с течением) должен быть направлен от линии разрыва, т. е. быть положительным при $y \to +\infty$, и отрицательным при $y \to -\infty$. Здесь угловыми скобками отмечена операция горизонтального осреднения $\langle \phi \rangle = \lim\limits_{L\to\infty} \frac{1}{2L}\int\limits_{-L}^{L} \phi\, dx$. Для математической формулировки этого условия представим $c = c_r + ic_i$, и учтем, что вещественная часть решения для нормальной моды записывается в виде $p = e^{kc_i t}\left(\tilde{p}e^{i\theta} + \tilde{p}^* e^{-i\theta}\right)$, $\theta = k(x - c_r t)$, где звездочкой обозначено комплексное сопряжение (аналогично для остальных переменных). При этом, $\langle vp \rangle = e^{2kc_i t}\left(\tilde{p}\tilde{v}^* + \tilde{p}^*\tilde{v}\right) = 2e^{2kc_i t}\operatorname{Re}\left(\tilde{p}^*\tilde{v}\right)$, где символами Re и Im далее обозначаются действительная и мнимая части выражений. Используя соотношения (13) можно показать, что $\operatorname{Re}\left(\tilde{p}^*\tilde{v}\right) = \varepsilon k \Delta^{-1}\operatorname{Re}\left(i\left(\tilde{c} - |y|\right)\tilde{u}^*\tilde{u}_y\right)$. С учетом, $\operatorname{Re}(iz) = \operatorname{Im}(z^*)$, для потока энергии на бесконечности асимптотически получим

$$\Pi = \langle vp \rangle = -2\varepsilon k \Delta^{-1}|y| e^{2kc_i t} W,$$
$$W = \operatorname{Im}\left(\tilde{u}\tilde{u}_y^*\right),\ |y| \to \infty. \qquad (15)$$

Непосредственно из (15) следует, что условию излучения удовлетворяют комплексные решения уравнения (12), для которых $W < 0$ при $y \to +\infty$, и $W > 0$ при $y \to -\infty$. Обратим внимание, что при $|y| \to \infty$ в уравнении (12) можно пренебречь $\tilde{c}$ и величина W играет роль вронскиана уравнения с вещественными коэффициентами. Согласно общей теории [25], для таких уравнений $W = \text{const}$.

Уравнение (12) вместе с условием излучения и условиями на разрыве определяет спектральную задачу для нахождения комплексной фазовой скорости $c = c_r + ic_i$. Течение неустойчиво, если мнимая часть $c_i > 0$.

ИЗЛУЧАТЕЛЬНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РОССБИ

Замена переменной $\xi = \varepsilon \tilde{F} y$, $\tilde{F} = Fk/\kappa$, приводит уравнение (12) к виду

$$\tilde{u}_{\xi\xi} + \lambda^2\left((|\xi| - \varepsilon\tilde{F}\tilde{c})^2 - 1 - \varepsilon k^{-2}\tilde{F}^2 U'\right)\tilde{u} = 0,$$
$$\lambda^2 = (\kappa/\varepsilon\tilde{F})^2. \qquad (16)$$

Асимптотическая форма (16) при $\varepsilon \ll 1$ сводится к уравнению

$$\tilde{u}_{\xi\xi} + \lambda^2\left(\xi^2 - 1\right)\tilde{u} = 0, \qquad (17)$$

которое не содержит спектральный параметр $\tilde{c} = 1 - c$. Этот факт существенно упрощает решение спектральной задачи — после нахождения решения уравнения (17), удовлетворяющего условию излучения, параметр $\tilde{c}$ находится из условий на разрыве. Асимптотическую форму этих условий проще всего получить, привлекая амплитудную форму уравнения для PV (4)

$$ik\left(\bar{u} - c\right)\left(ik\tilde{v} - \tilde{u}_y + F^2\left(1 - \varepsilon U'(y)\right)\tilde{p}\right) = -2\delta(y)\tilde{v}. \qquad (18)$$

Интегрирование (18) по малой окрестности разрыва получим

$$ik(1 - c)\left(\tilde{u}(+0) - \tilde{u}(-0)\right) = 2\tilde{v}(0). \qquad (19)$$

Заметим далее, что уравнение (17) инвариантно относительно замены $y \to -y$ и при выполнении условия излучения при $y \to +\infty$, оно автоматически удовлетворяется при $y \to -\infty$, если использовать правило сопряжения решений $\tilde{u}_-(y) = -\tilde{u}_+(-y)$. Здесь через $\tilde{u}_+(y)$, $u_-(y)$ обозначены решения, соответственно, в областях $y > 0$, $y < 0$. С учетом указанного правила, условия на разрыве сводятся к условию $\tilde{u}(+0) = -\tilde{u}(-0)$ и условию

$$u_\xi(+0) = -\tilde{c}\kappa\lambda u(+0),\ \tilde{c} = 1 - c. \qquad (20)$$

Последнее условие следует из (19) с использованием вытекающего из (13) асимптотического соотношения $\tilde{v} = -ik\kappa^{-1}\tilde{u}_y$. Таким образом, приходим к следующей редуцированной спектральной задаче — на полуоси $y > 0$ найти значения параметра $\tilde{c} = 1 - c$, при котором существуют нетривиальные решения уравнения (17), удовлетворяющие условию (20) и условию излучения $W < 0$ при $y \to +\infty$.

Отметим, что правило сопряжения и условие (20) точно выполняются для решения $\tilde{u} = -\tilde{p}_y$ в квазигеострофическом приближении. Это приближение дает асимптотику точного решения непосредственно вблизи линии разрыва $y = 0$.

Поскольку спектральная задача (17), (20) аналогична рассмотренной в [14] спектральной задаче для акустических волн, далее ограничимся кратким анализом. На полуоси $\xi > 0$ уравнение (17) содержит точку поворота $\xi = 1$, при переходе через которую монотонный (экспоненциальный) характер решения сменяется осциллирующим волновым поведением. Методы построения асимптотических решений уравнений с точкой поворота в случае $\lambda >> 1$ (большой параметр) описаны в [25, 26]. Соответствующие решения представляются в терминах функций Эйри $\mathrm{Ai}(z)$, $\mathrm{Bi}(z)$. Для уравнения (17) в качестве линейно независимых решений удобно использовать функции $\Phi_1(z) = \mathrm{Bi}(z) + i\mathrm{Ai}(z)$, $\Phi_2(z) = \Phi_1^*(z) = \mathrm{Bi}(z) - i\mathrm{Ai}(z)$.

Функция $\Phi_1(z)$ имеет асимптотические представления при $z \to +\infty$

$$\Phi_1(-z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} z^{-1/4} \exp i\left(\frac{2}{3} z^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} z^{-1/4}\left(\exp\left(\frac{2}{3} z^{3/2}\right) + \frac{i}{2}\exp\left(-\frac{2}{3} z^{3/2}\right)\right), \tag{21}$$

вытекающие из известных асимптотических представлений для функций Эйри.

Асимптотическое разложение решения уравнения (17), равномерно пригодное для всех $\xi > 0$, включая точку поворота $\xi = 1$, дается выражением [26]

$$\tilde{u}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{s'(\xi)}}\left(C_1\Phi_1\left[-\lambda^{-2/3}s(\xi)\right] + C_2\Phi_2\left[-\lambda^{-2/3}s(\xi)\right]\right)$$

$$\xi \ge 1: \quad \frac{2}{3}\left[s(\xi)\right]^{3/2} = \int_1^{\xi}\sqrt{\tau^2 - 1}\,d\tau,$$

$$\xi \le 1: \quad \frac{2}{3}\left[-s(\xi)\right]^{3/2} = \int_{\xi}^{1}\sqrt{1-\tau^2}\,d\tau, \tag{22}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Чтобы удовлетворить условию излучения в этом выражении следует положить $C_2 = 0$ (см. ниже). С использованием асимптотических представлений (21), из (22) найдем асимптотики решения в областях, разделенных точкой поворота

$$\tilde{u}(\xi) = \frac{Ce^{i\pi/4}}{\sqrt[4]{\xi^2 - 1}} \exp\left(i\lambda\alpha(\xi)\right),$$

$$C = \frac{C_1}{\pi^{1/2}\lambda^{1/6}},\ \xi > 1, \tag{23}$$

$$\tilde{u}(\xi) = \frac{C}{\sqrt[4]{1-\xi^2}}\left(\exp(\lambda\beta(\xi)) + \frac{i}{2}\exp(-\lambda\beta(\xi))\right),$$

$$0 < \xi < 1. \tag{24}$$

Здесь функции $\alpha(\xi)$, $\beta(\xi)$ определены выражениями

$$\alpha(\xi) = \frac{1}{2}\left(\xi\sqrt{\xi^2 - 1} - \ln\left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right)\right),$$

$$\beta(\xi) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left(\arcsin\xi + \xi\sqrt{1-\xi^2}\right), \tag{25}$$

полученными вычислением входящих в (22) интегралов.

Из (23) следует асимптотика $\tilde{u}(\xi) = Ce^{i\pi/4}\xi^{-1/2}\exp\left(i\lambda\xi^2/2\right)$, справедливая при $\xi \to \infty$. Используя эту асимптотику легко показать, что при $\xi \to \infty$ вронскиан $W = \mathrm{Im}\left(\tilde{u}\tilde{u}_{\xi}^*\right) = -\lambda\left|C\right|^2 < 0$, т. е. выполнено условие излучения на бесконечности. Для решения, отвечающего $C_2 \ne 0$, вронскиан $\mathrm{W} > 0$. По этой причине выше было положено $C_2 = 0$.

Разлагая $\beta(\xi)$ по степеням ξ, из (24) получим асимптотику при $\xi \to 0+0$

$$\tilde{u}(\xi) = Ce^{\lambda\pi/4}\left(e^{-\lambda\xi} + (i/2)e^{-\lambda\pi/2}e^{\lambda\xi}\right). \tag{26}$$

Определяя отсюда $\tilde{u}(+0)$, $\tilde{u}_{\xi}(+0)$ и подставляя в условие (20), найдем значение спектрального параметра

$$\tilde{c} = \kappa^{-1}\,\frac{1-(i/2)e^{-\lambda\pi/2}}{1+(i/2)e^{-\lambda\pi/2}} \equiv \kappa^{-1}\,\frac{1-m-ie^{-\lambda\pi/2}}{1+m}, \tag{27}$$

где $m = (1/4)\exp(-\lambda\pi)$. Соответственно, для фазовой скорости $c = 1 - \tilde{c}$ асимптотически получим

$$c = c_r + ic_i = 1 - \kappa^{-1} + i\kappa^{-1}e^{-\lambda\pi/2}. \tag{28}$$

Поскольку мнимая часть $c_i = \kappa^{-1}e^{-\lambda\pi/2} > 0$, имеет место неустойчивость с экспоненциально малым инкрементом нарастания

$$\gamma = kc_i = (k/\kappa)e^{-\lambda\pi/2}. \tag{29}$$

Таким образом, излучательная неустойчивость при малых числах Россби развивается крайне медленно. Отметим, что инкремент (29) зависит от волнового числа и $\gamma(k) \to 0$ при $k \to 0$ и $k \to \infty$. Максимум инкремента асимптотически достигается при $k = k_m = F$, соответствующее максимальное значение $\gamma_m = 2^{1/2}\exp(-\pi\varepsilon^{-1})$.

Остановимся на некоторых особенностях излучаемого волнового поля в дальней волновой зоне $\xi \to +\infty$ (на больших расстояниях от линии разрыва). С учетом (23), для продольного компонента скорости $u = \tilde{u}(y)e^{ik(x-ct)}$ после выделения вещественной части получим

$$u = Ce^{\gamma t}\xi^{-1/2}\cos\theta,$$

$$\theta = k(x - c_r t) + \lambda(\xi^2/2) + (\pi/4). \tag{30}$$

Согласно (30), осцилляции поля u по координате ξ носят негармонический характер — локальная длина волны по этой координате стремится к нулю. Частота временных осцилляций

$$\omega_R = kc_r = k\left(1-\left(k^2+F^2\right)^{-1/2}\right), \quad (31)$$

зависит от волнового числа и определяется квазигеострофическим решением для краевой волны Россби. В фиксированный момент времени с ростом ξ продольный компонент затухает как $1/\sqrt{\xi}$. Согласно соотношениям (13), поперечный компонент v (вместе с возмущением давления) пропорционален $\sqrt{\xi}$, т. е. нарастает по корневому закону. Этот рост обеспечивает постоянство плотности потока импульса $I = \langle u\mathrm{v}\rangle$.

Теневая картина изолиний полного поля продольной скорости (в фиксированный момент времени) аналогична построенной в [14] картине для акустических волн (см. рис. 2 в [14]). На небольших расстояниях от линии разрыва имеем вихревую картину с замкнутыми изолиниями, определяемыми квазигеострофическим решением («кошачий глаз»). С ростом ξ эта картина трансформируется в волновую картину поля (30). Изолинии этого поля асимптотически совпадают с линиями равных фаз $\theta = \mathrm{const}$ (линиями волновых гребней и ложбин). Обозначая $x_1 = x - c_r t$, для линий равных фаз из (30) получим уравнения $x_1 = k^{-1}(\theta - \pi/4) - 0.5\varepsilon F y^2$, описывающие однопараметрическое семейство парабол с верхней ветвью, наклоненной влево (по потоку).

Завершим данный раздел важным замечанием. Из представленного анализа следует, что необходимое условие излучательной неустойчивости состоит в наличии точки поворота у амплитудного уравнения. В рассмотренном случае малых значений числа Россби $\mathrm{Ro} = \varepsilon \ll 1$, эта точка ($\xi = 1$) представляет собой уровень, на котором частота ω_R (31) волны Россби становится равной частоте ω_g инерционно-гравитационных волн. Действительно, с учетом доплеровской поправки в размерных переменных (отмеченных звездой) частота длинных ИГВ определяется выражением [13]

$$\omega_{g*} = k_* U_*(y) \pm \left(a^2(k_*^2 + l_*^2) + f^2\right)^{1/2}. \quad (32)$$

Нормируя (32) на U_0/L, полагая $l_* = 0$ и переходя к безразмерному волновому числу $k = k_* L$, для безразмерной частоты (32) получим

$$\omega_g = k\left(1 - y \pm (\kappa/\varepsilon F k)\right). \quad (33)$$

Приравнивая (33) (со знаком плюс) выражению (31), асимптотически найдем $y = \kappa/\varepsilon F k$ или $\xi = 1$. Подчеркнем, что совпадение частот $\omega_R = \omega_g$ происходит только за счет доплеровской поправки, приводящей к зависимости частоты ИГВ от пространственной координаты.

Сделанное замечание, в сочетании с дисперсионными соотношениями (31), (33), позволяет предположить, что для рассматриваемого неограниченного течения излучательная неустойчивость (совпадение или синхронизация частот $\omega_R = \omega_g$) будет иметь место и при произвольных значениях числа Россби. В этом состоит принципиальное отличие от рассмотренного в [12] ограниченного струйного течения на мелкой воде (с экспоненциальным профилем), для которого синхронизация частот $\omega_R = \omega_g$ происходит только при Ro > 1.

ЧИСЛЕННЫЕ ОЦЕНКИ

Приведем некоторые численные оценки для слоя атмосферы толщиной $H = 10$ км с характерными частотами $N = 10^{-2}\,\mathrm{c}^{-1}$, $f = 10^{-4}\,\mathrm{c}^{-1}$. Для первой вертикальной моды ($n = 1$) фазовая скорость $a = NH/\pi = 31.8$ м/с, бароклинный радиус деформации Россби $L_R = a/f = 318$ км. Если рассматривать струйное течение с характерной скоростью $U_0 = 10$ м/с и горизонтальным масштабом $L = L_R$, то число Россби $\varepsilon = U_0/fL = U_0/a = 0.31$ и параметр $F = 1$. Соответствующий адвективный временной масштаб $T_0 = L/U_0 = 8.33$ ч, инерционный масштаб $f^{-1} = 2.8$ ч. Число Россби, очевидно, представляет собой отношение этих масштабов. Для приведенных масштабов характеристики неустойчивых волновых возмущений определяются значением безразмерного волнового числа. При $k = 5$ и $k = 10$ (длины волн соответственно 496 и 198 км) размерный период колебаний $T = 2\pi T_0/\omega$ составляет соответственно 13 ч и 5.7 ч. С ростом k этот период неограниченно уменьшается. Инкременту нарастания возмущений (35) отвечает временной масштаб $T_* = T_0/\gamma_m$, который многократно превышает адвективный временной масштаб T_0. Для наименьшего значения этого масштаба $T_* = T_0/\gamma_m$, достигаемого при $k = 1$, превышение составляет пять порядков. Отметим, что аналогичный результат был получен и в работе [12] — для ограниченного струйного течения на мелкой воде время нарастания возмущений многократно превышает период вращения системы. Приведем также оценку координаты точки поворота $y = \kappa/\varepsilon F k$ или, в размерном виде, $y_* = (L_R / \varepsilon)(\kappa / k)$. При $k = 10$ и $F = 1$ получим $y_* \approx 1000$ км, т. е. волновая картина начинает проявляться на расстоянии тысячи километров от оси струи.

Подчеркнем, что приведенные оценки носят иллюстративный характер и, в зависимости от значений внешних параметров, могут существенно меняться. В частности, для океана с $H = 5$ км, $N = 10^{-3}\,\text{с}^{-1}$, $f = 10^{-4}\,\text{с}^{-1}$ фазовая скорость первой бароклинной моды $a = NH / \pi = 1.6\,\text{м/с}$, бароклинный радиус деформации $L_R = a / f = 50$ км. При $L = L_R$ и $U_0 = 0.3$ м/с число Россби $\varepsilon = 0.18$. Значения этих параметров отличаются от атмосферных значений, что приводит к отличию характеристик неустойчивых возмущений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В исследованиях устойчивости геофизических течений, как правило, используется квазигеострофическое приближение, фильтрующее быстрые волновые движения [13]. При таком рассмотрении упускается из виду неустойчивость, обусловленная излучением волн — излучательная неустойчивость. Как показано в настоящей работе, а также в работах [11, 12, 23, 24], этот тип неустойчивости развивается слишком медленно, чтобы приводить к видимым перестройкам структуры течений. Значимость неустойчивости, однако, состоит в том, что ее развитие сопровождается непрерывной (спонтанной) генерацией волн. Излучательная неустойчивость, таким образом, представляет физический механизм спонтанной генерации волновых движений, который следует учитывать при интерпретации данных дистанционного зондирования атмосферы.

Источник финансирования. Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 18-05-00831, 18-05-00414).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Степанянц Ю.А., Фабрикант А.Л.* Распространение волн в сдвиговых потоках. М.: Наука, 1996. 240 с.
2. *Broadbend E., Moore D.* Acoustic destabilization of vortices // Phil. Trans. Roy. Soc. 1979. V. A290. P. 353–371.
3. *Копъев В.Ф., Леонтьев Е.А.* Об акустической неустойчивости аксиального вихря // Акуст. журн. 1983. Т. 29. № 2. С. 192–198.
4. *Цейтлин В.Ю.* Об акустическом излучении распределенных вихревых структур // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 2. С. 321–326.
5. *Гряник В.М.* Излучение звука вихрями, акустическая неустойчивость и акустический коллапс // Изв. АН СССР. ФАО. 1988. Т. 24. № 5. С. 513–519.
6. *Zeitlin V.* On the backreaction of acoustic radiation for distributed two-dimensional vortex structures // Phys. Fluids. 1991. V. 3. № . 6. P. 1677–1680.
7. *Le Dizès S.* Inviscid waves on a Lamb-Oseen vortex in a rotating stratified fluid: consequanced for the elliptic instability // J. Fluid Mech. 2008. V. 597. P. 283–303.
8. *Le Dizès S., Billant P.* Radiative instability in stratified vortices // Phys. Fluids. 2009. V. 21. № . 9. 096602.
9. *Schecter D., Montgomery M.* Damping and pumping of vortex Rossby waves in a monotonic cyclone: critical layer stirring versus inertia-buoyancy emission // Phys. Fluids. 2004. V. 16. P. 1334–1348.
10. *Schecter D.* The spontaneous imbalance of an atmospheric vortices at high Rossby number // J. Atm. Sci. 2008. V. 65. P. 2498–2521.
11. *Boss E., Paldor N., Thompson L.* Stability of a potential vorticity front: from quasi-geostrophy to shallow water // J. Fluid Mech. 1996. V. 315. P. 65–84.
12. *Dritshel D.G., Vanneste J.* Instability of a shallow-water potential-vorticity front // J. Fluid Mech. 2006. V. 561. P. 237–254.
13. *Vallis G.K.* Atmospheric and oceanic fluid dynamics: fundamentals and large-scale circulation. Cambridge: Cambridge University Press, 2006. 738 p.
14. *Калашник М.В.* Излучательная неустойчивость неограниченного струйного течения // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 2. С. 139–145.
15. *Plougonven R., Zhang F.* Internal gravity waves from atmospheric jets and fronts // Rev. Geophys. 2014. V. 52. P. 33–76.
16. *Калашник М.В.* Генерация акустических волн волной завихренности в сдвиговом потоке // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2014. № 4. С. 119–129.
17. *Lott F., Plougonven R., Vanneste J.* Gravity waves generated by sheared potential vorticity anomalies // J. Atm. Sci. 2010. V. 67. P. 157–170.
18. *Kalashnik M.V., Chkhetiani O.G.* Generation of gravity waves by singular potential-vorticity disturbances in shear flows // J. Atmos. Sci. 2017. V. 74. P. 293–307.
19. *Reznik G.M., Zeitlin V., Ben Jelloul M.* Nonlinear theory of geostrophic adjustment. Part I: Rotating shallow water model // J. Fluid Mech. 2001. V. 445. P. 93–120.
20. *Zeitlin V., Reznik G.M., Ben Jelloul M.* Nonlinear theory of geostrophic adjustment. Part II: Two-layer and continuosly stratified primitive equations // J. Fluid Mech. 2003. V. 491. P. 207–228.

21. *Ford R.* The instability of an axisymmetric vortex with monotonic potential vorticity in rotating shallow water // J. Fluid Mech. 1994. V. 280. P. 303–334.
22. *Ford R., McIntyre M., Norton W.* Balance and slow quasimanifold: some explicit results // J. Atm. Sci. 2000. V. 57. P. 1236–1254.
23. *Vanneste J., Yavneh I.* Exponential small inertia-gravity waves and the breakdown of quasigeostrophic balance // J. Atm. Sci. 2004. V. 61. P. 211–223.
24. *Zeitlin V.* Decoupling of balanced and unbalanced motions and inertia-gravity wave emission: small versus large Rossby number // J. Atm. Sci. 2008. V. 65. P. 3528–3542.
25. *Федорюк М.В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1984. 344 с.
26. *Найфэ А.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 456 с.

Radiative Instability of a Barotropic Jet Flow in a Stratified Rotating Atmosphere

M. V. Kalashnik

Obukhov Institute of Atmospheric Physics, RAS
Pyzhevsky per., 3, Moscow 109017, Russia
Schmidt Institute of Physics of the Earth, Russian Academy of Sciences,
B. Gruzinskaya Str., 10, building 1, Moscow, 123242 Russia
E-mail: kalashnik-obn@mail.ru

Received: 23.06.2018
Accepted: 06.02.2019

The problem of the stability of a jet flow with a piecewise linear velocity profile in a stratified rotating atmosphere is considered. The linearized system of equations for perturbations is reduced to a single equation with respect to the amplitude of the longitudinal velocity component containing the turning points. In terms of Airy functions, an asymptotic solution of the equation is constructed that is valid for small values of the Rossby number. It is shown that the flow becomes unstable due to radiation of inertial-gravitational waves. An analytical expression is obtained for the growth rate of perturbations.

Keywords: hydrodynamic instability, jet streams, wave radiation, inertial-gravity waves, potential vorticity, quasigeostrophic approximation, Rossby waves.