

УДК 551.581.1

СВОЙСТВА ЧАСТОТНЫХ СПЕКТРОВ АНОМАЛИЙ ТЕМПЕРАТУР ПОВЕРХНОСТИ ОКЕАНА И ПРИПОВЕРХНОСТНОГО ВОЗДУХА В ПРОСТОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КЛИМАТА С ФЛУКТУИРУЮЩИМИ ПАРАМЕТРАМИ

© 2019 г. Д. А. Петров

*Институт прикладной физики РАН
603950, Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46
E-mail: democrit1@yandex.ru*

Поступила в редакцию 08.05.2018 г.

Принята к печати 03.04.2019 г.

Исследуются частотные свойства спектров аномалий температур поверхности океана (АТПО) и приповерхностного воздуха (АТПВ) на основе простой энергобалансовой модели климата с учетом флуктуаций радиационного баланса, явного и скрытого тепла и скорости приповерхностного ветра в двух частных случаях, когда статистические свойства параметров модели соответствуют белому шуму (мелкомасштабный-мезомасштабный подынтервалы) и комбинированный случай, когда в блоке АТПВ учитываются свойства синоптического подынтервала. Установлено, что в первом случае спектры не имеют особенностей, а во втором в них присутствуют выделенные частоты в синоптическом и низкочастотном интервалах. Проанализирована их зависимость от параметров модели. Исследованы свойства среднеквадратичных отклонений АТПВ и АТПО.

Ключевые слова: колебания климата, стохастические модели климата, мультипликативный шум, аномалии температур поверхности океана и приповерхностного воздуха.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0002-351555427-36>

ВВЕДЕНИЕ

Как было отмечено в ряде работ, например [1–3], климат планеты Земля представляет собой чрезвычайно сложное физическое явление, что обусловлено как отсутствием возможности проведения каких-либо реальных экспериментов над климатом, так и наличием большого разнообразия пространственно-временных масштабов, сильно затрудняющие его моделирование [1, 4].

Многомасштабность и полифоничность процессов, формирующих климат планеты Земля, делают крайне сложным их учет на одном уровне сложности в существующих климатических моделях, что ставит перед исследователями ряд важных и актуальных задач, одной из которых является проблема исследования спектральных свойств метеорологических полей на разных пространственно-временных масштабах [5], позволяющих понять многие закономерности формирования и эволюции климата.

При этом среди всевозможных климатических процессов в настоящее время большой интерес представляют так называемые периодические или квазипериодические изменения климата, хорошо наблюдаемы по различным индикаторам, характерными примерами которых являются ледниковые периоды [6–7]. Однако, если в низкочастотном интервале спектра глобального климата на периодах от десятков и сотен тысяч до миллионов лет, как было показано еще Миланковичем [1], определяющую роль играют внешние астрономические факторы, то в мезомасштабном и высокочастотном участках его спектра из-за лавинообразного возрастания причинно-следственных связей в климатической системе и ее нелинейности объяснение наблюдаемых колебаний с периодами от десятков и сотен лет (брикнеровские циклы [8], осцилляции Дансгора–Эшгера [7]) до нескольких тысяч лет (циклы Бонда [9], события Хайнриха [7, 10]) является чрезвычайно сложным, и многие теории здесь являются по-прежнему гипотезами [6].

В данной работе проблема длиннопериодных колебаний климата изучается в рамках концепции Хассельмана [12] на основе нульмерной стохастической энергобалансовой модели климата с учетом флуктуаций коэффициентов линейных обратных связей. В частности, исследуются свойства частотных спектров взаимодействующих аномалий температуры поверхности океана и приповерхностного воздуха, обусловленные флуктуациями горизонтального ветра, радиационного баланса и явного и скрытого тепла с заданными спектральными свойствами.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. СПЕКТР МОДЕЛИ

Использование простых моделей диктуется, в первую очередь, сложностью данной задачи, что делает необходимым произвести первоначальное исследование поставленных вопросов на качественном уровне, учитывающем лишь наиболее общие черты климатической системы. Это позволяют сделать стохастические энергобалансовые модели.

Итак, вводя возмущение температуры i -ой подсистемы δT_i и раскладывая в ряд уравнения энергетического баланса по δT_i , получим n -уровневую стохастическую систему, описываемую уравнениями:

$$L_{ij}(\sigma)\delta T_j(\sigma) = (L_{ij}^{(1)}(\sigma) + L_{ij}^{(2)}(\sigma))\delta T_j(\sigma) = \tilde{\xi}_i(\sigma), \quad (1)$$

где $L_{ij}(\sigma)$ являются в общем случае нелинейными интегро-дифференциальными операторами, задающими пространственно-временную эволюцию переменных δT_i ($\sigma = \{\vec{r}, t\}$), содержащие информацию о физических процессах, протекающих в подсистемах и их взаимодействии, в которых удобно в рамках стохастического подхода выделить детерминированную — $L_{ij}^{(1)}(\sigma)$, определяющуюся средними значениями параметров системы, и стохастическую — $L_{ij}^{(2)}(\sigma)$, включающую случайные изменения искоемых параметров, части. В правой части (1) вектор $\tilde{\xi}_i(\sigma)$ задает флуктуационные источники, элементы которого представляют собой некоторые случайные поля.

Вид операторов $L_{ij}^{(1,2)}(\sigma)$ зависит как от пространственно-временных масштабов, на которых рассматривается эволюция δT_i , так и от степени детализации описания различных физических процессов в климатической системе. В данной работе рассматривается одни из на-

иболее простых случаев, когда эволюция возмущений осредненных по пространственным координатам температур $\delta T_i(t)$ совокупности подсистем подчиняется принципу локального термодинамического равновесия. В этом случае с учетом локально-линейного приближения для возмущений $\delta T_i(t)$, вызванных, например, флуктуациями потоков скрытого и явного тепла в океане и инсоляции в атмосфере, операторы $L_{ij}^{(1,2)}(t)$ имеют вид: $L_{ij}^{(1)}(t) = \delta_{ij} d/dt + \lambda_{ij}$ и $L_{ij}^{(2)}(t) = \gamma_{ij}(t)$, где δ_{ij} — символ Кронекера, а λ_{ij} и $\gamma_{ij}(t)$ есть средние значение и случайная составляющая матрицы коэффициентов линейных обратных связей ($\lambda_{ij}(t) = \lambda_{ij} + \gamma_{ij}(t)$, $\lambda_{ij} = \langle \lambda_{ij}(t) \rangle$). Однако даже с такими простыми операторами данная задача в общем случае является сложной. Поэтому в дальнейшем для ее упрощения воспользуемся следующими приближениями.

В первую очередь, будем считать, что состояние климатической системы, описываемое уравнениями (1), является устойчивым и находится далеко от точек бифуркаций. Во-вторых, для удобства разделим $\gamma_{ij}(t)$ на две части: $\gamma_{ij}(t) = \gamma_{ij}^{(1)}(t) + \gamma_{ij}^{(2)}(t)$, где $\gamma_{ij}^{(1,2)}(t)$ образуют, соответственно, группы некоррелированных и коррелированных между собой процессов ($\gamma_{ij}^{(1)}(t)$ также некоррелированы с $\gamma_{ij}^{(2)}(t)$). В-третьих, будем считать, что флуктуации $\gamma_{ij}(t)$ не способны перевести систему из одного состояния в другое, т.е. $\gamma_{ij}(t)$ являются небольшими возмущениями по сравнению с λ_{ij} . Другими словами считаем, что выполняется условие: $(\gamma_{ij}^{(1)} + \gamma_{ij}^{(2)})/\lambda_{ij} \ll 1$, где $\gamma_{ij}^{(1,2)}$ — амплитуды $\gamma_{ij}^{(1,2)}(t)$. Кроме того, рассмотрим случай, когда $\xi_i(t)$ и $\gamma_{ij}^{(1,2)}(t)$ являются стационарными гауссовыми случайными процессами, с заданными функциями корреляции $M_\zeta(t-t_1) = \langle \zeta(t)\zeta(t_1) \rangle$ или спектральными плотностями $S_\zeta(\omega) = (M_\zeta(t))_{t,\omega}$ и $\langle \zeta(t) \rangle = 0$, где $\zeta(t) = \{\gamma_{ij}^{(1,2)}(t), \tilde{\xi}_i(t)\}$, а $(\dots)_{t,\omega}$ и $(\dots)_{\omega,t}$ — обозначают, соответственно, прямое и обратное интегральные преобразования Фурье, причем будем считать, что корреляция между $\tilde{\xi}_i(t)$ и $\gamma_{ij}^{(1,2)}(t)$ отсутствует.

Итак, в первую очередь, вычислим сначала частотные спектры: $S_{\delta T}^{[ij]}(\omega) = (\langle \delta T_i(t)\delta T_j(t_1) \rangle)_{t,\omega} = (M_{\delta T}^{[ij]}(\tau))_{\tau,\omega}$. Учитывая, что по условию задачи $\gamma_{ij}^{(1,2)} \ll \lambda_{ij}$, воспользуемся для этого теорией возмущений, ограничившись в данной работе слагаемыми порядка $\gamma_{ij}^{2(1,2)}$ и $\gamma_{ij}^{(1)}\gamma_{ij}^{(2)}$.

Вычисляя корреляции флуктуационных источников, используя (1), и переходя в спектральную область, найдем

$$2\pi\delta(\omega - \omega_1) F_{jk}^{[il]}(\omega) S_{\delta T}^{[jk]}(\omega) + ((K_r^{[il]}(t, t_1))_{t, \omega})_{t_1, \omega_1}^* = 2\pi\delta(\omega - \omega_1) S_{\xi}^{[il]}(\omega), \quad (2)$$

где $r = 1, 2, 3$, $F_{jk}^{[il]}(\omega) = D_{ij}^{-1}(\omega) D_{lk}^{-1*}(\omega)$ — матрица, имеющая размерность $N^2 \times N^2$ (N — число подсистем), $D_{ij}^{-1}(\omega) = -\delta_{ij} i\omega + \lambda_{ij}$ ($D_{ij}(\omega)$ и $D_{ij}(t) = (D_{ij}(\omega))_{\omega, t}$ — функция Грина оператора $L_{ij}^{(1)}(t)$ в частотной и временной областях), $K_1^{[il]}(t, t_1) = \gamma_{lk}^{(n)} L_{ij}^{(1)}(t) \langle \gamma_{lk}^{(n)}(t_1) \delta T_j(t) \delta T_k(t_1) \rangle$, $K_2^{[il]}(t, t_1) = \gamma_{ij}^{(m)} L_{lk}^{(1)}(t_1) \langle \gamma_{ij}^{(m)}(t) \delta T_j(t) \delta T_k(t_1) \rangle$, $K_3^{[il]}(t, t_1) = \gamma_{ij}^{(m)} \gamma_{lk}^{(n)} \langle \gamma_{ij}^{(m)}(t) \gamma_{lk}^{(n)}(t_1) \delta T_j(t) \delta T_k(t_1) \rangle$, причем в (2) и дальше везде в этой работе по дважды повторяющимся индексам, если это не отмечено отдельно, кроме i и l , подразумевается суммирование ($m, n = 1, 2$). Также будем считать, что $D_{ij}(\omega)$ не имеет полюсов в верхней полуплоскости. Корреляции $K_{1,2,3}^{[il]}(t, t_1)$ вычислены в Приложении I.

Подставляя теперь (I.9)–(I.11) из Приложения I в (2), после простых преобразований получим систему интегральных уравнений для $S_{\delta T}^{[il]}(\omega)$:

$$S_{\delta T}^{[il]}(\omega) - f_{qp}^{[il]}(\omega) S_{\delta T}^{[qp]}(\omega) - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} g_{qp}^{[il]}(\omega, \omega - \omega') S_{\delta T}^{[qp]}(\omega') = F_{jk}^{-[il]}(\omega) S_{\xi}^{[jk]}(\omega), \quad (3)$$

где выражения для матрицы $F_{jk}^{-[il]}(\omega)$, обратной $F_{jk}^{[il]}(\omega)$, а также $f_{qp}^{[il]}(\omega)$ и $g_{qp}^{[il]}(\omega, \omega - \omega')$ даны в Приложении II.

Заметим, согласно выражениям для $f_{qp}^{[il]}(\omega)$ и $g_{qp}^{[il]}(\omega, \omega - \omega')$, второе и третье слагаемые в правой части (5) содержат малые параметры. Поэтому для решения (5) воспользуемся теорией возмущений и представим $S_{\delta T}^{[il]}(\omega)$ в виде:

$$S_{\delta T}^{[il]}(\omega) = S_{\delta T}^{(0)[il]}(\omega) + S_{\delta T}^{(1)[il]}(\omega), \quad (4)$$

где $S_{\delta T}^{(0)[il]}(\omega) = F_{jk}^{-[il]}(\omega) S_{\xi}^{[jk]}(\omega)$ — невозмущенный частотный спектр модели, а $S_{\delta T}^{(1)[il]}(\omega)$ — поправка, обусловленная флуктуациями коэффициентов линейных обратных связей в (1):

$$S_{\delta T}^{(1)[il]}(\omega) = f_{qp}^{(1)[il]}(\omega) S_{\delta T}^{(0)[qp]}(\omega) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} g_{qp}^{(1)[il]}(\omega, \omega - \omega') S_{\delta T}^{(0)[qp]}(\omega'). \quad (5)$$

Для демонстрации полученных результатов, рассмотрим теперь несколько примеров.

ПРИМЕРЫ

Определим, к каким следствиям приводит наличие поправки $S_{\delta T}^{(1)[il]}(\omega)$ в (4), вызванной флуктуациями $\lambda_{ij}(t)$, на примере двухуровневой системы ($N = 2$), образованной атмосферой и верхним квазиоднородным слоем (ВКС) океана. В этом случае с физической точки зрения $\delta T_i(t)$ будут определять аномалии температуры приповерхностного воздуха (АТПВ) ($i = 1$) и океана (АТПО) ($i = 2$), осредненные по пространственным координатам. Данная система достаточно известна (см. например, [13]), ее свойства без учета флуктуаций коэффициентов линейных обратных связей изучались как в работах отечественных [14, 15], так и зарубежных исследователей [16, 17].

Используя для потоков явного и скрытого тепла аэродинамическую параметризацию [18] в линейном приближении по $\delta T_i(t)$ получим выражения для λ_{ij} : $\lambda_{11} = (\lambda_a + \lambda_{am}) / c_a$, $\lambda_{12} = -\lambda_{am} / c_a$, $-\lambda_{21} = \lambda_{22} = \lambda_{am} / c_p$, где $c_a = \rho_a c_{pa} h_a$, $c_m = \rho_w c_{pw} h_w$, $h_a \approx 11 \cdot 10^3$ [м], — высота слоя атмосферного столба с единичным сечением, h_w — толщина ВКС океана, $c_{pa} \approx 1005$ [Вт × с × кг⁻¹ × °С⁻¹], $c_{pw} \approx 4200$ [Вт × с × кг⁻¹ × °С⁻¹] и $\rho_a \approx 1.226$ [кг × м⁻³], $\rho_w \approx 10^3$ [кг × м⁻³] — удельные теплоемкости и плотности воздуха и воды, соответственно, h_a — параметр обратной связи между радиационными источниками и стоками тепла и температурой атмосферы ($\lambda_a \approx 2.4$ [Вт × м⁻² × °С⁻¹], согласно [19]), а h_{am} — коэффициент теплообмена на границе атмосфера–океан, имеющий вид: $\lambda_{am} = C_D (1 + B^{-1}) \rho_a c_{pa} V_a$, где V_a — модуль скорости приповерхностного ветра, C_D — число Стэнтона, B — число или отношение Боуэна (Bowen ratio). При этом C_D слабо зависит от V_a и имеет порядок $C_D \approx 10^{-3}$ [20], а B может сильно меняться от условий и быть отрицательным, в частности, для поверхности океана $B \approx 0.1$ [21].

Согласно выражениям λ_{ij} для флуктуации λ_{ij} могут быть вызваны разными причинами. В данной работе будет рассмотрен случай, когда статистические свойства коэффициентов линейных обратных связей полностью определяются только флуктуациями модуля скорости приповерхностного ветра V_a , частотные $S_V(\omega)$ спектры которого были исследованы в ряде работ [11, 22].

Поскольку в данной работе флуктуации $\gamma_{ij}(t)$ обусловлены только V_a , которая входит во все $\gamma_{ij}(t)$, то все $\gamma_{ij}(t)$ коррелируют между собой. Это означает, что в (1) все $\gamma_{ij}^{(1)} = 0$ и поправка $S_{\delta T}^{(1)|ii|}(\omega)$ будет определяться только $\gamma_{ij}^{(2)}$. Тогда для $N = 2$, используя выражения $F_{ab}^{-1|ii|}(\omega)$ и $S_{\delta T}^{(0)|qp|}(\omega)$ из Приложения II и пропуская простые, но громоздкие преобразования, получим выражения для $S_{\delta T}^{(1)|ii|}(\omega)$:

$$S_{\delta T}^{(1)|ii|}(\omega) = \sum_{j=1,2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} [2\delta(\omega - \omega') \frac{\Gamma_{ij}^{(2)|ii|}(\omega')}{\Delta^4(\omega')} + \frac{H_{ij}^{(1)}(\omega, \omega')}{\Delta^2(\omega)\Delta^2(\omega')} S_{\xi}^{(1)}(\omega, \omega')], \quad (6)$$

где $\Delta^2(\omega) = (\omega^2 + \omega^{(1)2})(\omega^2 + \omega^{(2)2})$, а выражения для $\omega^{(1,2)}$, $\Gamma_{ij}^{(2)|ii|}(\omega)$ и $H_{ij}^{(1)}(\omega, \omega')$ даны в Приложении II.

Согласно экспериментальным работам (см. [18]), время релаксации АТПО зависит от сезона и составляет в среднем несколько месяцев, а АТПВ порядка нескольких дней [15]. Это говорит о том, что $\xi_i(t)$ и $\gamma_{ij}(t)$ в рамках концепции Хассельманна будут определяться свойствами высокочастотного участка спектров пульсаций потоков явного и скрытого тепла в океане и инсоляции в атмосфере. При этом для $\delta T_2(t)$ не только $\xi_2(t)$ и $\gamma_{22}(t)$ можно считать с большой точностью δ -коррелированными случайными процессами в интервале от мелкомасштабных до синоптических пульсаций, но и действие $\delta T_1(t)$. Однако для АТПВ приближение δ -коррелированности для $\xi_1(t)$ и $\gamma_{11}(t)$ справедливо лишь в диапазоне от мелкомасштабных до мезомасштабных вариаций, а уже в синоптическом подынтервале (с периодами от нескольких часов до нескольких суток) оно не выполняется [23], т.к. характерные времена $\delta T_1(t)$ и $\xi_1(t)$, $\gamma_{11}(t)$ здесь становятся соизмеримыми, что делает необходимым более детальное описание свойств $S_{\xi}^{(111)}(\omega)$ и $S_{\gamma}^{(1,2)|ij,kl|}(\omega)$ в данном диапазоне. Таким образом, рассмотрим в данной работе два примера, когда $\xi_i(t)$ и $\gamma_{ij}(t)$ являются δ -коррелированными случайными процессами и случай, когда в $S_{\xi}^{(111)}(\omega)$ и $S_{\gamma}^{(1,2)|ij,kl|}(\omega)$ учитываются свойства синоптического подынтервала.

Рассмотрим сначала случай, когда $S_{\xi}^{(111)}(\omega)$, $S_{\xi}^{(221)}(\omega)$ и $S_{V_a}(\omega)$ представляют собой константы. Учитывая, что при этом $M_{\xi}^{(1)}(t) = 2D_i\tau_i^{(0)}\delta(t)$, найдем: $S_{\xi}^{(111)}(\omega) = 2D_i\tau_i^{(0)}$, где дисперсии $D_i = 4\sigma_i^2 r_{ki}^2 / \pi c_i^2 a^2$ [24] и характерные времена $\tau_i^{(0)}$ можно взять из наблюдений:

σ_i [Вт \times м $^{-2}$] — среднеквадратическое отклонение радиационного баланса ($\sigma_R \approx 30$) [24] и скрытого и явного тепла ($\sigma_{L-S} \approx 100$) [25], r_{ki} [м] — пространственный масштаб АТПВ и АТПО ($r_{ki} \sim 10^3$) [26], $a \approx 6.3 \cdot 10^3$ [м] — радиус Земли, $\tau_{R,L-S}^{(0)} \approx 1$ [сут] [15, 18], $c_i = \{c_A, c_W\}$. Тогда: $S_{\xi}^{(111)} = 0.035$ [°C $^2 \times$ мес $^{-1}$] и $S_{\xi}^{(221)} = 0.16$ [°C $^2 \times$ мес $^{-1}$]. Для определения S_{V_a} удобно рассмотреть $S_{\gamma}^{(2)|ij,kl|}(\omega) = \gamma_{ij}\gamma_{lk}(M_{\gamma}^{(2)|ij,kl|}(t))_{t,\omega}$, где $\gamma_{ij}\gamma_{lk} = a_{ij}a_{lk}\sigma_{V_a}^2$, $\sigma_{V_a}^2$ [м $^2 \times$ с $^{-2}$] — дисперсия скорости ветра, $a_{11}/\xi = a_{12} = b/c_A$, $a_{21} = a_{22} = b/c_M$, $b = C_D(1+B)\rho_a c_{pa}$, а $\xi \sim 1$ — феноменологический коэффициент, учитывающий флуктуации λ_a в λ_{11} . Из определения $S_{\gamma}^{(2)|ij,kl|}(\omega)$ видно, что $2D_{V_a} = a_{ij}a_{lk}\sigma_{V_a}^2$, а $S_{V_a} = (M_{\gamma}^{(2)|ij,kl|}(t))_{t,\omega} = \tau_{V_a}^{(0)}$, где $\tau_{V_a}^{(0)}$ — время корреляции скорости ветра, примерно равное $\tau_{V_a}^{(0)} \approx 0.5$ [сут] [26]. При этом, например [22, 27], дисперсия $\sigma_{V_a}^2 \in [1.04, 95]$ [м $^2 \times$ с $^{-2}$], т.е. имеет сильный разброс. Учитывая, что значения некоторых параметров изменяется с широтой, рассмотрим далее экваториальную область и высокие широты, для которых примем: $\sigma_R = 30$ [Вт \times м $^{-2}$], $\sigma_{L-S} = 100$ [Вт \times м $^{-2}$], $B = 0.1$ и $\sigma_R = 21$ [Вт \times м $^{-2}$], $\sigma_{L-S} = 30$ [Вт \times м $^{-2}$], $B = 0.7$ и которые будем называть далее точками 1 и 2.

Во втором примере для $S_{\delta T}^{(111)}(\omega)$ учтем в $S_{\xi}^{(111)}(\omega)$ и $S_{\gamma}^{(1,2)|ij,kl|}(\omega)$ свойства синоптического подынтервала, оставляя при этом $S_{\xi}^{(221)}(\omega)$ и $S_{\gamma}^{(1,2)|ij,kl|}(\omega)$ для $S_{\delta T}^{(221)}(\omega)$ константами, со значениями из первого примера. Как известно, в этом интервале в $S_{V_a}(\omega)$ имеется хорошо выделенный максимум, соответствующий периодам от 3.5 до 6 (или даже 12) дней [11, 22]. Кроме того, в спектре радиационного баланса в данном частотном интервале также имеется максимум, связанный с суточным колебанием инсоляции [28, 29]. Учтем качественно этот факт, аппроксимировав $S_{V_a}(\omega)$ и $S_{\xi}^{(111)}(\omega)$ лоренцевой кривой: $S_X(\omega) = S_X^{(0)} / ((\omega - \omega_{X0})^2 + \omega_{X1}^2)$, где $S_X^{(0)} = \{v_a S_{V_a}^{(0)}, S_R^{(0)}\}$, причем для спектра скорости ветра, согласно [22]: $v_a \approx 1.1 \div 4.3$ [м \times с $^{-1}$], $S_{V_a}^0 \approx 5$ [мес $^{-1}$], $\omega_{v0} \approx 30.78$ [рад \times мес $^{-1}$], $\omega_{v1} \approx 0.8$ [мес $^{-1}$]; для радиационного баланса: $\omega_{R0} \approx 188.5$ [рад \times мес $^{-1}$], ($T_{R0} \sim 1$ [сут]), $\omega_{R1} \approx 10$ [мес $^{-1}$], а $S_{\xi}^{(0)|111} = S_R^{(0)}$ можно вычислить, приравнивая $(S_{\xi}^{(111)}(\omega))_{\omega} = S_0$, где $(\dots)_{\omega}$ — обозначает интеграл по ω в пределах синоптического интервала $S_0 = 4\pi D_1 \tau_1 / \Delta\omega$ [°C 2], $\Delta\omega \sim 10^{-6}$ [рад \times с $^{-1}$],

что дает $S_{\xi}^{0[11]} \approx 4.4 [^{\circ}\text{C}^2 \times \text{мес}^{-1}]$. Учитывая качественную простоту рассматриваемой модели, данная параметризация физически оправдана, поскольку использует минимум информации о свойствах спектров $S_X(\omega)$ в синоптическом интервале, а именно, значения выделенных частот и времен корреляции рассматриваемых переменных.

Основные результаты представлены на рис. 1–3.

Как показали вычисления, в случае белого шума, спектральные плотности не имеют выделенных частот и при $\omega \rightarrow \infty$ облада-

ют асимптотикой: $\sim \omega^{-2}$ (рис. 1(а)). Во втором примере, в комбинированном случае с учетом свойств синоптического подынтервала $S_{\delta T}^{[11]}(\omega)$ и $S_{\delta T}^{[22]}(\omega)$ содержат выделенные частоты и также при $\omega \rightarrow \infty$ пропорциональны ω^{-2} (рис. 1(б)). При этом в спектрах АТПВ и АТПО в зависимости от значений h_w , \bar{V}_a и v_a могут одновременно присутствовать три резонанса, два из которых непосредственно связаны с пиками в спектре скорости ветра и радиационного баланса, а третий пик находится в низкочастотном участке спектра и является слабо выраженным (см. вложенный рисунок в рис. 1(б)). На рис. 2 представ-

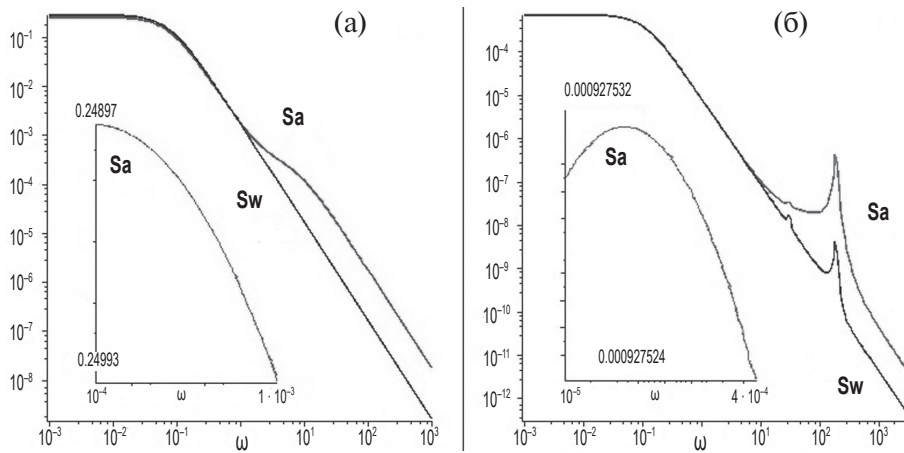


Рис. 1. Графики зависимости в двойном логарифмическом масштабе спектральных плотностей АТПВ – Sa [$^{\circ}\text{C}^2 \times \text{мес}$] и АТПО – Sw [$^{\circ}\text{C}^2 \times \text{мес}$] от частоты ω [рад \times мес $^{-1}$] при $V_a = 10$ [м/с], $v_a = 1$ [м/с], $h_w = 15$ [м] ($\sigma_R = 21$, $\sigma_{L-S} = 30$ [Вт \times м $^{-2}$], $B = 0.7$, (число Боуэна) – точка 2): (а) – белый шум; (б) – комбинированный случай. На вложенных рисунках демонстрируются свойства низкочастотных участков спектров. В случае (б) Sw также имеет слабовыраженный низкочастотный максимум, однако, из-за разницы в масштабах с Sa вложенный график для Sw не приводится.

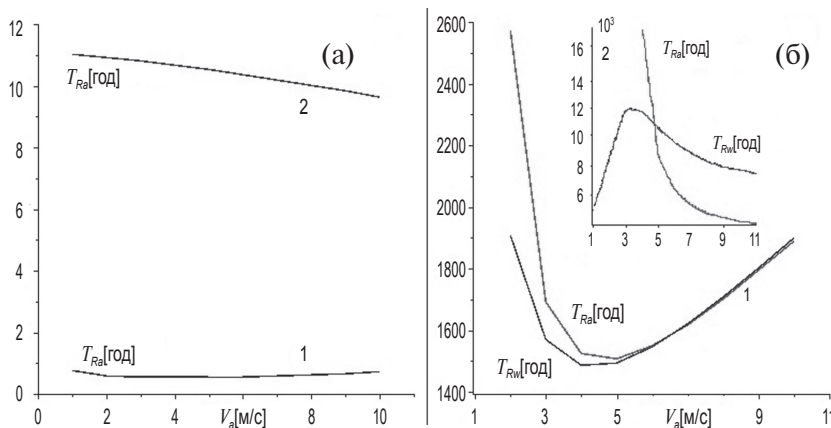


Рис. 2. Графики зависимости периодов T_{Ra} [год] и T_{Rw} [год], соответствующих резонансным частотам в спектрах АТПВ и АТПО, от средней скорости ветра V_a [м/с] при $v_a = 1$ [м/с]; (а) – без взаимодействия, когда АТПВ и АТПО независимы ($\{\lambda_{12}, \lambda_{21}; \gamma_{12}, \gamma_{21}\} = 0$), (б) – со взаимодействием. На этих графиках линии 1 соответствуют параметрам: $h_w = 35$ [м], $\sigma_R = 30$ [Вт \times м $^{-2}$], $\sigma_{L-S} = 100$ [Вт \times м $^{-2}$], $B = 0.1$ (число Боуэна); линии 2 – $h_w = 15$ [м], $\sigma_R = 21$ [Вт \times м $^{-2}$], $\sigma_{L-S} = 30$ [Вт \times м $^{-2}$], $B = 0.7$.

лены зависимости периодов T_{Ra} и T_{Rw} , соответствующих искомым низкочастотным резонансам, от \bar{V}_a для взаимодействующих (рис. 2(б)) и не взаимодействующих (независимых) (рис. 2(а)) АТПВ и АТПО для экваториальной области и высоких широт.

Согласно этим рисункам, в случае без взаимодействия период T_{Ra} соответствует колебаниям от года до десяти лет. Однако взаимодействие с инерционным звеном (ВКС) приводит к увеличению значения T_{Ra} и возникновению в спектре АТПО отдельного резонанса — T_{Rw} . Например, при $\bar{V}_a = 10 [м \times с^{-1}]$, $v_a = 1 [м \times с^{-1}]$ и $h_w = 35 [м]$ для точки 1: $T_{Ra} = 1890$ и $T_{Rw} = 1901$ лет. Подобные колебания с периодами в несколько тысяч лет действительно имели место в геологическом прошлом Земли [7, 9, 10, 30]. Однако следует отметить, что значения T_{Ra} и T_{Rw} сильно зависят от толщины ВКС. Так, например, уже при $h_w = 120 [м]$ для 1: $T_{Ra} \approx T_{Rw} = 11500$ лет ($\bar{V}_a = 10 [м \times с^{-1}]$, $v_a = 1 [м \times с^{-1}]$), а для точки 2 уже при $h_w = 25 [м]$: $T_{Ra} = 21017$ и $T_{Rw} = 18660$ лет, что по порядку величины соответствует колебаниям климата, вызванным астрономическими факторами (циклы Миланковича [1]). По-видимому, эта особенность связана с тем, что для более объективной оценки обнаруженных в рассматриваемой модели низкочастотных резонансов не достаточно иметь сведения о среднем значении толщины ВКС, и необходимо учитывать также ее статистические свойства. Однако уже сам факт существования низкоча-

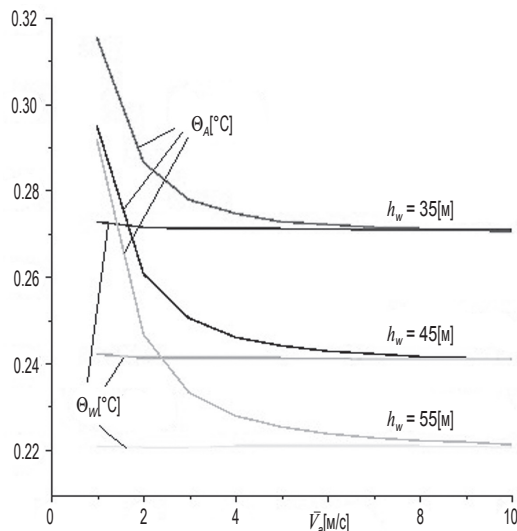


Рис. 3. График зависимости среднеквадратических отклонений аномалий температур поверхности океана $\Theta_w [^{\circ}C]$ и приповерхностного воздуха $\Theta_a [^{\circ}C]$ от средней скорости ветра $V_a [м/с]$ при $v_a = 1 [м/с]$ и разных значениях толщины ВКС $h_w [м]$.

стотных пиков в $S_{\delta T}^{[11,22]}(\omega)$ может являться стимулом для дальнейшего исследования влияния флуктуаций коэффициентов обратных связей на свойства спектра климатической системы.

Наиболее просто появление низкочастотных максимумов в спектрах АТПВ и АТПО можно дать не в частотной, а во временной области. Данный эффект непосредственно связан с тем, что флуктуации скорости ветра в данной модели аппроксимированы узкополосным стационарным случайным процессом. Как хорошо известно [31], функция корреляции таких процессов совершает затухающие колебания, амплитуда и фаза которых имеют низкочастотную модуляцию. Принимая во внимание теперь, что в систему уравнений для функций корреляций переменных δT_i входит корреляция скорости ветра (см. формулы (I.6–I.8) Приложения I), привносящая в искомую систему колебания в низкочастотной области, то при переходе в частотную область данная особенность с учетом измененной дисперсии системы за счет флуктуаций коэффициентов обратных связей и приводят к появлению низкочастотных максимумов в $S_{\delta T}^{[11,22]}(\omega)$.

В заключение оценим значения среднеквадратического отклонения (СКО) для АТПВ и АТПО. В частности, на рис. 3 представлена зависимость СКО от \bar{V}_a для комбинированного случая для экваториальной области (точка 1). Для белого шума зависимость СКО от \bar{V}_a является подобной. Для высоких широт (точка 2, комбинированный случай), например, при $\bar{V}_a = 10 [м \times с^{-1}]$, $v_a = 1 [м \times с^{-1}]$ и $h_w = 15 [м]$: $\theta_A \approx 0.14$ и $\theta_W \approx 0.12 [^{\circ}C]$, что по порядку величины соответствуют данным наблюдений [32–35]. Заметим, что при увеличении широты, а также h_w , значения θ_A и θ_W уменьшаются.

Зависимость СКО от h_w интуитивно понятна, т.к. внешним флуктуациями будет тяжелее «раскачать» слой воды с большей толщиной. Широтная зависимость θ_W также соответствует данным наблюдений [32]. Что же касается θ_A , то по наблюдениям она имеет противоположную зависимость, а именно, θ_A возрастает с ростом широты [35]. Данное несоответствие объясняется тем, что в изучаемой простой модели не учитываются некоторые обратные связи, принципиальные для воспроизведения правильной широтной зависимости СКО АТПВ, в частности, зависимость альbedo от широты, межширотный перенос тепла и некоторые другие [35].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена n -уровневая линейная нульмерная энергобалансовая стохастическая модель климата с флуктуирующими коэффициентами. На примере двухуровневой климатической системы, образованной взаимодействующими друг с другом через пульсации скорости ветра аномалиями температур поверхности океана (АТПО) и приповерхностного воздуха (АТПВ), исследованы свойства частотных спектров АТПО и АТПВ в двух случаях, когда статистика параметров модели и источников соответствует белому шуму (интервал мелко-масштабных и мезомасштабных вариаций) и когда в спектре радиационного баланса и скорости ветра учитывается вклад синоптического подынтервала. Показано, что в приближении белого шума частотные спектры АТПО и АТПВ не имеют особенностей и в асимптотике больших частот спадают обратно пропорционально квадрату частоты. Однако вклад синоптического подынтервала приводит к возникновению в спектрах АТПО и АТПВ выделенных частот, одни из которых соответствуют пикам в спектрах скорости ветра и радиационного баланса, а другие сильно зависят от параметров модели и лежат в низкочастотном участке спектра, которые соответствуют колебаниям с периодами в несколько тысяч лет. Кроме того, произведена оценка значений среднеквадратических отклонений АТПО и АТПВ в зависимости от средней скорости ветра, которые по порядку величины оказались близкими к данным наблюдений.

В заключение автор выражает благодарность Е.А. Марееву за внимание к данной работе. Работа выполнена в рамках Программы Президиума РАН «Изменение климата: причины, риски, последствия, проблемы адаптации и регулирования» (проект № 0035-2018-0024).

ПРИЛОЖЕНИЕ I.
ВЫЧИСЛЕНИЕ
КОРРЕЛЯЦИЙ $K_1^{[il]}(t, t_1)$

Рассмотрим в первую очередь $K_1^{[il]}(t, t_1)$. Как и в работе [36], учитывая, что $\delta T_i(t)$ являются функционалами от $\gamma_{ij}^{(1,2)}(t)$, которые в свою очередь имеют гауссову статистику, воспользуемся для вычисления $K_1^{[il]}(t, t_1)$ формулой Фуруцу–Новикова [37], согласно которой среднее значе-

ние от произведения гауссова случайного процесса $\xi(t)$ со средним, равным нулю, и функцией корреляции $M_\xi(t-t_1) = \langle \xi(t)\xi(t_1) \rangle$, и функционала $F[\xi]$ имеет вид:

$$\langle \xi(t)F[\xi] \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' M_\xi(t-t') \eta(t-t') \left\langle \frac{\delta F[\xi]}{\delta \xi(t')} \right\rangle, \quad (I.1)$$

где $\delta/\delta \xi(t)$ обозначает функциональную производную, $\eta(t)$ — функция Хэвисайда, учитывающая в (I.1) принцип причинности.

Используя (I.1) применительно к $K_1^{[il]}(t, t_1) = \gamma_{lk}^{(n)} L_{ij}^{(1)}(t) k_1^{[il]}(t, t_1)$ из (3), получим

$$\begin{aligned} & k_1^{[il]}(t, t_1) = \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \{ M_\gamma^{[lk, \alpha\beta]}(t-t') \eta(t-t') \left\langle \frac{\delta \delta T_j(t)}{\delta \gamma_{\alpha\beta}^{(n)}(t')} \delta T_k(t_1) \right\rangle + \\ & + M_\gamma^{[lk, \alpha\beta]}(t_1-t') \eta(t_1-t') \left\langle \delta T_j(t) \frac{\delta \delta T_k(t_1)}{\delta \gamma_{\alpha\beta}^{(n)}(t')} \right\rangle \}. \end{aligned} \quad (I.2)$$

Найдем теперь корреляции, входящие в (I.2). Для этого вычисляя функциональную производную от (1) по $\gamma_{\alpha\beta}^{(n)}(t')$, считая, что $\delta \gamma_{jk}^{(m)}(t) / \delta \gamma_{\alpha\beta}^{(n)}(t_1) = \delta_{mn} \delta_{j\alpha} \delta_{k\beta} \delta(t-t_1)$ и $\delta \xi_i(t) / \delta \gamma_{\alpha\beta}^{(n)}(t_1) = 0$ умножая на $\delta T_k(x_1)$ и усредняя полученное выражение, имеем

$$\begin{aligned} & L_{j\mu}^{(1)}(t) \left\langle \frac{\delta \delta T_\mu(t)}{\delta \gamma_{\alpha\beta}^{(n)}(t')} \delta T_k(t_1) \right\rangle + \\ & + \gamma_{j\varphi}^{(n)} \delta_{j\alpha} \delta_{\varphi\beta} \delta(t-t') M_{\delta T}^{[l\varphi k]}(t-t') + \\ & + \gamma_{j\varphi}^{(n)} \left\langle \gamma_{j\varphi}^{(n)}(t) \frac{\delta \delta T_\varphi(t)}{\delta \gamma_{\alpha\beta}^{(n)}(t')} \delta T_k(t_1) \right\rangle = 0. \end{aligned} \quad (I.3)$$

Заметим теперь, что для решения (I.3) нужно вычислить третье слагаемое, для которого также можно использовать формулу (I.1). Однако легко увидеть, что уравнение для последнего слагаемого в (I.3) будет содержать корреляции все более высокого порядка, что делает невозможным замыкание (I.3). Но, поскольку $\gamma_{j\varphi}^{(n)}$ являются малыми параметрами, оказывается возможным решить (I.3) с определенной точностью, используя для этого теорию возмущений. Таким образом, если спектр рассматриваемой модели вычисляется с точностью порядка $\gamma_{j\varphi}^{(n)} \gamma_{\alpha\beta}^{(n)}$, и, учитывая, что перед $k_1^{[il]}(t, t_1)$ уже есть множитель $\gamma_{lk}^{(n)}$, можно отбросить последнее слагаемое в (I.3), поскольку его вычисление через высшие корре-

ляции дадут поправки более высокого порядка. В итоге:

$$\left\langle \delta T_k(t_1) \frac{\delta \delta T_j(t)}{\delta \gamma_{\alpha\beta}^{(n)}(t')} \right\rangle \approx \quad (I.4)$$

$$\approx -\gamma_{\alpha\beta}^{(n)} D_{j\alpha}(t-t') M_{\delta T}^{[jk]}(t'-t_1) + O(\gamma_{\alpha\beta}^{(n)3}),$$

где $D_{j\mu}(t) = (L_{j\mu}^{(1)})^{-1}(\omega)_{\omega,t}$ — функция Грина оператора $L_{j\mu}^{(1)}(t)$.

Вычисляя аналогичным образом вторую корреляцию в (I.2), получим

$$\left\langle \delta T_j(t) \frac{\delta \delta T_k(t_1)}{\delta \gamma_{\alpha\beta}^{(n)}(t')} \right\rangle \approx \quad (I.5)$$

$$\approx -\gamma_{\alpha\beta}^{(n)} D_{k\alpha}(t_1-t') M_{\delta T}^{[jk]}(t'-t) + O(\gamma_{\alpha\beta}^{(n)3}).$$

Таким образом, подставляя (I.4)–(I.5) в (I.2) и совершая элементарные преобразования, окончательно найдем

$$K_1^{[il]}(\tau) =$$

$$= -\gamma_{lk}^{(n)} \gamma_{\alpha\beta}^{(n)} L_{ij}^{(1)}(t) \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \{ \tilde{D}_{j\alpha}(\tau-t') M_{\gamma}^{(n)[lk,\alpha\beta]}(t') M_{\delta T}^{[jk]}(t') +$$

$$+ G_{k\alpha}^{(n)[lk,\alpha\beta]}(-\tau-t') M_{\delta T}^{[jk]}(t') \}, \quad (I.6)$$

где $G_{k\alpha}^{(n)[lk,\alpha\beta]}(t) = M_{\gamma}^{(n)[lk,\alpha\beta]}(t) \tilde{D}_{k\alpha}(t)$, $\tilde{D}_{k\alpha}(t) = D_{k\alpha}(t) \eta(t)$, $\tau = t - t_1$, $\eta(t)$ — функция Хэвисайда, учитывающая в (I.6) принцип причинности.

Вычисляя аналогичным образом с указанной выше точностью $K_{2,3}^{[il]}(t, t_1)$, получим

$$K_2^{[il]}(\tau) =$$

$$= -\gamma_{ij}^{(m)} \gamma_{\alpha\beta}^{(m)} L_{lk}^{(1)}(t_1) \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \{ \tilde{D}_{k\alpha}(-\tau-t') M_{\gamma}^{(m)[ij,\alpha\beta]}(t') M_{\delta T}^{[jk]}(t') +$$

$$+ G_{j\alpha}^{(m)[ij,\alpha\beta]}(\tau-t') M_{\delta T}^{[jk]}(t') \}, \quad (I.7)$$

$$K_3^{[il]}(\tau) = M_{\gamma}^{(m,n)[ij,jk]}(\tau) M_{\delta T}^{[jk]}(\tau). \quad (I.8)$$

Перейдем теперь в (I.6–I.8) в частотную область, вычислив двойное преобразование Фурье $((K_{1,2,3}^{[il]}(\tau_x))_{x,y}^*)_{x_1,y_1}$:

$$((K_1^{[il]}(\tau))_{t,\omega}^*)_{t_1,\omega_1} =$$

$$= -2\pi\delta(\omega - \omega_1) \gamma_{lk}^{(n)} \gamma_{\alpha\beta}^{(n)} D_{ij}^{-1}(\omega) (G_{k\alpha}^{(n)[lk,\alpha\beta]}(\omega) S_{\delta T}^{[jk]}(\omega) +$$

$$+ D_{j\alpha}(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} S_{\gamma}^{(n)[lk,\alpha\beta]}(\omega - \omega') S_{\delta T}^{[jk]}(\omega')), \quad (I.9)$$

$$((K_2^{[il]}(\tau))_{t,\omega}^*)_{t_1,\omega_1} =$$

$$= -2\pi\delta(\omega - \omega_1) \gamma_{ij}^{(m)} \gamma_{\alpha\beta}^{(m)} D_{lk}^{-1*}(\omega) (G_{j\alpha}^{(m)[ij,\alpha\beta]}(\omega) S_{\delta T}^{[jk]}(\omega) +$$

$$+ D_{k\alpha}^*(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} S_{\gamma}^{(n)[ij,\alpha\beta]}(\omega - \omega') S_{\delta T}^{[jk]}(\omega')), \quad (I.10)$$

$$((K_3^{[il]}(\tau))_{t,\omega}^*)_{t_1,\omega_1} =$$

$$= 2\pi\delta(\omega - \omega_1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} S_{\gamma}^{(n)[ij,jk]}(\omega - \omega') S_{\delta T}^{[jk]}(\omega'), \quad (I.11)$$

поскольку: $((f(t-t_1))_{t,\omega}^*)_{t_1,\omega_1} = 2\pi\delta(\omega - \omega_1) f(\omega)$, $((L_{ij}^{(1)}(t) f(t-t_1))_{t,\omega}^*)_{t_1,\omega_1} = 2\pi\delta(\omega - \omega_1) D_{ij}^{-1}(\omega) f(\omega)$, где $f(t-t_1)$ — дифференцируемая функция.

ПРИЛОЖЕНИЕ II.

ВЫЧИСЛЕНИЕ $D_{ij}(\omega)$, $F_{jk}^{-1[il]}(\omega)$ И $S_{\delta T}^{(0)[qp]}(\omega)$ ($N=2$)

Вычислим в первую очередь частотную функцию Грина $D_{ij}(\omega)$. Учитывая, что $D_{ij}^{-1}(\omega) = (L_{ij}^{(1)}(t))_{t,\omega} = -\delta_{ij} i\omega + \lambda_{ij}$, легко найдем: $D_{11}(\omega) = (-i\omega + \lambda_{22}) / \Delta(\omega)$, $D_{12}(\omega) = -\lambda_{22} / \Delta(\omega)$, $D_{21}(\omega) = -\lambda_{21} / \Delta(\omega)$, $D_{22}(\omega) = (-i\omega + \lambda_{22}) / \Delta(\omega)$, где $\Delta(\omega) = (-i\omega + \omega^{(1)})(-i\omega + \omega^{(2)})$, $\omega^{(1,2)} = (\lambda_{11} + \lambda_{22}) / 2 \pm \sqrt{(\lambda_{11} - \lambda_{22})^2 / 4 + \lambda_{12} \lambda_{21}}$, причем, согласно приближениям $\Delta_0 = \lambda_{11} \lambda_{22} - \lambda_{12} \lambda_{21} > 0$, то и $\omega^{(1,2)} > 0$.

Вычислим теперь элементы матрицы $F_{jk}^{-1[il]}(\omega)$, обратной $F_{jk}^{[il]}(\omega) = D_{ij}^{-1}(\omega) D_{lk}^{-1*}(\omega)$ ($F_{jk}^{[il]}(\omega) F_{mn}^{-1[jk]}(\omega) = I$). Для этого рассмотрим уравнение (1) при $h_{ij} = 0$: $L_{ij}^{(1)}(t) \delta T_j(t) = \xi_i(t)$. Решая его в спектральной области, имеем: $\delta T_i(t) = D_{ij}(t) \xi_j(t)$. Тогда умножая $\delta T_i(\omega)$ на $\delta T_l(\omega_1)$, усредняя получившееся выражение и учитывая, что для стационарных случайных процессов выполняются соотношения: $\langle \delta \zeta_i(\omega) \delta \zeta_j^*(\omega_1) \rangle = 2\pi\delta(\omega - \omega_1) S_{\zeta}^{[il]}(\omega)$, найдем: $S_{\delta T}^{[il]}(\omega) = D_{ij}(\omega) D_{lk}^*(\omega) S_{\zeta}^{[jk]}(\omega)$. С другой стороны, из уравнения $L_{ij}^{(1)}(t) \delta T_j(t) = \xi_i(t)$ получим: $L_{ij}(t) L_{lk}(t_1) M_{\delta T}^{[jk]}(t-t_1) = M_{\zeta}^{[il]}(t-t_1)$ или в спектральной области $F_{jk}^{[il]}(\omega) S_{\delta T}^{[jk]}(\omega) = S_{\zeta}^{[il]}(\omega)$, откуда $S_{\delta T}^{[il]}(\omega) = F_{jk}^{-1[il]}(\omega) S_{\zeta}^{[jk]}(\omega)$, что в итоге дает: $F_{jk}^{-1[il]}(\omega) = D_{ij}(\omega) D_{lk}^*(\omega)$, т.е.

$$F_{jk}^{-1[il]}(\omega) =$$

$$= \frac{1}{\Delta^2(\omega)} \begin{pmatrix} \omega^2 + \lambda_{22}^2 & -\lambda_{12}(-i\omega + \lambda_{22}) \\ -\lambda_{21}(-i\omega + \lambda_{22}) & (i\omega + \lambda_{11})(-i\omega + \lambda_{22}) \\ -\lambda_{21}(i\omega + \lambda_{22}) & \lambda_{12}\lambda_{21} \\ \lambda_{21}^2 & -\lambda_{21}(i\omega + \lambda_{11}) \\ -\lambda_{12}(i\omega + \lambda_{22}) & \lambda_{12}^2 \\ \lambda_{12}\lambda_{21} & -\lambda_{12}(i\omega + \lambda_{11}) \\ (-i\omega + \lambda_{11})(i\omega + \lambda_{22}) & -\lambda_{12}(-i\omega + \lambda_{11}) \\ -\lambda_{21}(-i\omega + \lambda_{11}) & \omega^2 + \lambda_{11}^2 \end{pmatrix},$$

где $\Delta^2(\omega) = (\omega^2 + \omega^{(1)2})(\omega^2 + \omega^{(2)2})$.

Так как по условию задачи: $S_{\xi}^{[12]} = S_{\xi}^{[21]} = 0$, най-

$$\text{дем } S_{\delta T}^{(0)[11]}(\omega) = \frac{\omega^2 + \lambda_{22}^2}{\Delta^2(\omega)} S_{\xi}^{[11]}(\omega) + \frac{\lambda_{12}^2}{\Delta^2(\omega)} S_{\xi}^{[22]}(\omega),$$

$$S_{\delta T}^{(0)[22]}(\omega) = S_{\delta T}^{(0)[11]}(\omega) \Big|_{1,2 \rightarrow 2,1}, \quad S_{\delta T}^{(0)[12]}(\omega) = (S_{\delta T}^{(0)[21]}(\omega))^* =$$

$$= -\frac{\lambda_{21}(-i\omega + \lambda_{22})}{\Delta^2(\omega)} S_{\xi}^{[11]}(\omega) - \frac{\lambda_{12}(i\omega + \lambda_{11})}{\Delta^2(\omega)} S_{\xi}^{[22]}(\omega).$$

Приведем далее выражения для $f_{qp}^{[il]}(\omega)$ и $g_{qp}^{[il]}(\omega, \omega - \omega')$ уравнения (5) и (7): $f_{qp}^{[il]}(\omega) = F_{ab}^{-[il]}(\omega)(\delta_{jq}\delta_{kp}f_{qp}^{(1)[ab]}(\omega) + f_{qp}^{(2)[ab]}(\omega))$, $g_{qp}^{[il]}(\omega, \omega - \omega') = F_{ab}^{-[il]}(\omega)(\delta_{jq}\delta_{jp}g_{qp}^{(1)[ab]}(\omega - \omega') + g_{qp}^{(2)[ab]}(\omega - \omega'))$, причем $f_{qp}^{(1)[ab]}(\omega) = \gamma_{bp}^{2(1)} D_{aq}^{-1}(\omega) G_{pb}^{*(1)[bp, bp]}(\omega) + \gamma_{aq}^{2(1)} D_{bp}^{-1}(\omega) G_{qa}^{(1)[aq, aq]}(\omega)$, $f_{qp}^{(2)[ab]}(\omega) = \gamma_{\alpha\beta}^{(2)} (\delta_{jq}\delta_{\beta p}\gamma_{bk}^{(2)} D_{aj}^{-1}(\omega) G_{k\alpha}^{*(2)[bk, \alpha\beta]}(\omega) + \delta_{\beta q}\delta_{kp}\gamma_{aj}^{(2)} D_{bk}^{-1}(\omega) G_{j\alpha}^{(2)[aj, \alpha\beta]}(\omega))$, а также $g_{jj}^{(1)[ab]}(\omega - \omega') = (\gamma_{bj}^{2(1)} S_{\gamma}^{(1)[bj, bj]}(\omega - \omega') + \gamma_{aj}^{2(1)} S_{\gamma}^{(1)[aj, aj]}(\omega - \omega')) / 2$, $g_{qp}^{(2)[ab]}(\omega - \omega') = \gamma_{\alpha\beta}^{(2)} (\gamma_{bk}^{(2)} S_{\gamma}^{(2)[bk, \alpha\beta]}(\omega - \omega') + \gamma_{aj}^{(2)} S_{\gamma}^{(2)[aj, \alpha\beta]}(\omega - \omega')) - \gamma_{aj}^{(2)} \gamma_{bk}^{(2)} S_{\gamma}^{(2)[aj, bk]}(\omega - \omega')$, где по всем дважды повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Приведем здесь также выражения $\Gamma_{ll}^{(2)[ii]}(\omega)$ и $H_{ll}^{(2)[ii]}(\omega, \omega')$ из выражения (6): $\Gamma_{ll}^{(2)[ii]}(\omega) = \sum_{j,k,p,q=1}^2 I_{jkpq} \rho_{jk,pq}^{(2)[ii, ll]}(\omega)$, $H_{ll}^{(2)[ii]}(\omega, \omega') = \sum_{j,k,p,q=1}^2 I_{jkpq} h_{jk,pq}^{[ii, ll]}(\omega, \omega')$, где $h_{jk,pq}^{[ii, ll]}(\omega, \omega') = h_{jk,pq}^{(2)[ii, ll]}(\omega, \omega') S_{\gamma}^{[ii, ll]}(\omega - \omega')$, $I_{jkpq} = (\delta_{jk} + \delta_{pq} + \delta_{jp} + \delta_{kq} + 2e_{jkpq}) / 4$, e_{jkpq} — тензор, элементы которого равны 1, если любые соседние индексы, входящие в пары: $[jk]$, $[kp]$, $[pq]$ различны, и 0, если это условие не выполняется,

$$\rho_{jk,pq}^{(2)[ii, ll]}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{g_{jk,pq}^{(2)[ii, ll]}(\omega, \omega')}{\Delta^2(\omega')} S_{\gamma}^{[jk, pq]}(\omega - \omega'),$$

$g_{jk,pq}^{(2)[ii, ll]}(\omega, \omega')$ и $h_{jk,pq}^{(2)[ii, ll]}(\omega, \omega')$ — алгебраические многочлены от переменных ω и ω' , в совокупности, составляющие 80 выражений, которые легко получить, используя вышеприведенные формулы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монин А.С., Шишков Ю.А. Климат как проблема физики // Успехи физических наук. 2000. Т. 170. № 4. С. 419–445.
2. Дымников В.П., Лысков В.Н., Володин Е.М. Проблемы моделирования климата и его изменений: современные проблемы // Вестник РАН. 2012. Т. 82. № 3. С. 227–236.
3. Голицын Г.С. Статистика и динамика природных процессов и явлений: методы, инструментарий, результаты. М.: URSS, 2013. 400 с.
4. Монин А.С., Сонечкин Д.М. Колебания климата по данным наблюдений. Тройной солнечный и другие циклы. М.: Наука, 2005. 191 с.
5. Рожков В.А., Трапезников Ю.А. Вероятностные модели океанологических процессов. Л.: Гидрометеоздат, 1990. 270 с.
6. Сергин В.Я., Сергин С.Я. Системный анализ проблемы больших колебаний климата и оледенений Земли. Л.: Гидрометеоздат, 1978. 282 с.
7. Rapp D. Ice ages and interglacials. Measurement, interpretation and models. South Pasadena: Springer, 2009. 263 p.
8. Полтараус Б.В., Кислов А.В. Климатология. Палеоклиматология, теория климата. М.: МГУ, 1984. 144 с.
9. Bond G. et al. A Pervasive Millennial-Scale Cycle in North Atlantic Holocene and Glacial Climate // Science. 1997. V. 278. P. 1257–1266.
10. Heinrich H. Origin and consequences of cyclic ice rafting in the North Atlantic Ocean during the past 130000 years // Quaternary Res. 1988. V. 29. P. 142–152.
11. Tsuchiya C., Sato K., et al. Universal frequency spectra of surface meteorological fluctuation // J. Climate. 2011. V. 24. P. 4718–4732.
12. Hasselmann K. Stochastic climate model. Part 1. Theory // Tellus. 1976. V. 28. № 6. P. 473–485.
13. Dickinson R.E. Convergence rate and stability of ocean-atmosphere coupling schemes with a zero-dimensional climate model // J. Atmos. Sci. 1981. V. 38. P. 2112–2120.
14. Зубарев А.П., Демченко П.Ф. Предсказуемость среднеглобальной температуры воздуха в простой стохастической модели взаимодействия атмосферы и океана // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1992. Т. 28. № 1. С. 27–32.
15. Демченко П.Ф., Кислов А.В. Стохастическая динамика природных объектов. Броуновское движение и геофизические приложения. М.: ГЕОС, 2010. 190 с.

16. *Sura P., Newman M.* The impact of rapid wind variability upon air-sea thermal coupling // *J. Climate*. 2008. V. 21. P. 621–637.
17. *Sura P., Sardeshmukh P.D.* A global view of air-sea thermal coupling and related non-Gaussian SST variability // *Atmos. Res.* 2009. V. 94. P. 140–149.
18. *Путербарг Л.И.* Динамика и прогноз крупномасштабных аномалий температуры поверхности океана (Статистический подход). Л.: Гидрометеоиздат, 1989. 200 с.
19. *Каган Б.А., Рябенко В.А., Сафрай А.С.* Реакция системы океан-атмосфера на внешние воздействия. Л.: Гидрометеоиздат, 1990. 304 с.
20. *Bumke K., Schlundt M. et al.* Measured and parameterized energy fluxes estimated for Atlantic transects of R/V Polarstern // *J. Phys. Oceanography*. 2014. V. 44. P. 482–491.
21. *Hsu S.A.* A relationship between the Bowen ratio and Sea-Air temperature difference under unstable condition at sea // *J. Phys. Oceanography*. 1998. V. 22. P. 2222–2226.
22. *Бышев В.И., Иванов Ю.А.* Временные спектры некоторых характеристик атмосферы над океаном // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана*. 1969. Т. 5. № 1. С. 17–28.
23. *Zolina O., Gulev S.K.* Synoptic variability of ocean atmosphere turbulent fluxes associated with atmospheric cyclones // *J. Climate*. 2003. V. 16. P. 2717–2734.
24. *Демченко П.Ф.* Оценки дисперсии среднеполюслярной температуры по спутниковым наблюдениям за флуктуациями радиационного баланса // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана*. 1982. Т. 18. № 2. С. 138–144.
25. *Liang X., Wunsch C. et al.* Vertical redistribution of oceanic heat content // *J. Climate*. 2015. V. 28. P. 3821–3833.
26. *Зубарев А.П.* Теоретическая оценка влияния интенсивности синоптических пульсаций скорости ветра и радиационного баланса на флуктуации температуры воздуха // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана*. 1992. Т. 28. № 6. С. 574–581.
27. *Hoffman R.N., Ardizzone J.V. et al.* Error estimates for ocean surface winds: applying desroziers diagnostics to the cross-calibrated, multiplatform analysis of wind speed // *J. Atmos. and Oceanic Technol.* 2013. V. 30. P. 2596–2603.
28. *Huang Yi, Ramaswamy V.* Evolution and trend of the outgoing longwave radiation spectrum // *J. Climate*. 2009. V. 22. P. 4637–4651.
29. *Ruzmaikin A., Aumann H.H., Jiang J.H.* Interhemispheric variability of Earth's radiation // *J. Atmos. Sci.* 2015. V. 72. P. 4615–4628.
30. *Fredriksen H.-B., Rypdal K.* Spectral Characteristics of Instrumental and Climate Model Surface Temperatures // *J. Climate*. 2016. V. 29. P. 1253–1268.
31. *Левин Б.П.* Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Сов. Радио, 1966. 778 с.
32. *Привальный В.Е.* Климатическая изменчивость. Стохастические модели, предсказуемость, спектры. М.: Наука, 1985. 183 с.
33. *Deser C., Alexander M.A., et al.* Sea surface temperature variability: patterns and mechanisms // *Annu. Rev. Mar. Sci.* 2010. V. 2. P. 115–143.
34. *Wang A., Zeng X.* Development of global hourly land surface air temperature datasets // *J. Climate*. 2013. V. 26. P. 7676–7691.
35. *Гройсман П.Я.* Оценки изменчивости средней годовой зональной температуры воздуха // *Метеорология и гидрология*. 1987. № 3. С. 103–105.
36. *Петров Д.А.* Влияние флуктуаций коэффициента линейной обратной связи на частотный спектр осредненной температуры в простой энергобалансовой модели климата // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана*. 2017. Т. 53. № 5. С. 565–574.
37. *Рытов С.М., Крайцов Ю.А., Татарский В.И.* Введение в статистическую радиофизику. Т. 2. М.: Наука, 1978. 463 с.

Properties of the frequency spectra of the temperature anomalies of ocean surface and near-surface air in a simple stochastic climate model with fluctuating parameters

D. A. Petrov

*Institute of Applied Physics, Russian Academy of Sciences
Ul. Ulyanova, 46, Nizhny Novgorod, 603950, Russia
e-mail: democrit1@yandex.ru*

Received: 08.05.2018

Accepted: 03.04.2019

The frequency properties of the ocean surface temperature anomalies (SST) and near-surface air (SAT) spectra are analyzed on the basis of a simple energy balance model of the climate, taking into account the fluctuations of the radiation balance, the latent and sensible heat flux and the velocity of the near-surface wind in two particular cases when the statistical properties of the model parameters are the white noise (small-scale-mesoscale subintervals) and the combined case when the properties of the synoptic subinterval of this parameters are taken into account in the SAT block. It was found that in the first case, the spectra have no features, and in the second they contain selected frequencies in the synoptic and low-frequency intervals. The dependent of their frequencies on model parameters are analyzed. The properties of standard deviations of SST and SAT are investigated.

Keywords: Climate oscillations, stochastic climate models, multiplicative noise, temperature anomalies of ocean surface and near-surface air.