

УДК 551.466

## ВЛИЯНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НА ЭВОЛЮЦИЮ ВОЛН В МЕЛКОВОДНОМ БАССЕЙНЕ

© 2019 г. А. А. Родин<sup>1,\*</sup>, Н. А. Родина<sup>1,2,\*\*</sup>, А. А. Куркин<sup>1,\*</sup>, Е. Н. Пелиновский<sup>3–6,\*\*\*</sup>

<sup>1</sup>Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева  
603950, Нижний Новгород, ул. Минина, 24, Россия

<sup>2</sup>Национальный исследовательский Нижегородский государственный  
университет им. Н.И. Лобачевского  
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23, Россия

<sup>3</sup>Институт прикладной физики РАН  
603950, Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46, Россия

<sup>4</sup>Специальное конструкторское бюро средств автоматизации  
морских исследований ДВО РАН  
693023, Южно-Сахалинск, ул. Горького, 25, Россия

<sup>5</sup>Национальный исследовательский университет –  
Высшая школа экономики

603950, Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, 25/12, Россия

<sup>6</sup>Университет Южного Квинсленда

West St, Darling Heights QLD 4350, Австралия

E-mail: \*aakurkin@gmail.com, \*\*na4aikovskaya@mail.ru, \*\*\*pelinovsky@gmail.com

Поступила в редакцию 20.02.2019 г.

Принята к печати 03.04.2019 г.

Исследуется влияние встречного взаимодействия нелинейных волн в мелководном бассейне теоретически и численно в рамках нелинейной теории мелкой воды. Показано, что такое взаимодействие приводит к изменению фазы распространения основной волны, вынужденной распространяться на течении, индуцированным встречной волной. Оценки высоты необрушенной волны в момент взаимодействия находятся в согласии с теоретическими предсказаниями. Сдвиг фаз при взаимодействии необрушенных волн достаточно мал, но становится заметным в случае движения обрушенных волн.

**Ключевые слова:** длинные волны, численный эксперимент, уравнения мелкой воды, взаимодействие волн, метод конечных объемов.

**DOI:** <https://doi.org/10.31857/S0002-351555482-86>

### ВВЕДЕНИЕ

Теория мелкой воды активно применяется для описания морских волн на мелководье, где их длина значительно превышает локальную глубину. Ее основным преимуществом является небольшая размерность (нет вертикальной координаты) и гиперболичность (нет производных высоких порядков), что позволяет относительно просто реализовать основные уравнения численно и проводить расчеты характеристик волн на больших акваториях. Теория мелкой воды хорошо описана, например, в книгах [1–3]. Существуют несколько вычислительных пакетов, решающих уравнения мелкой воды, которые активно используются, например, в проблеме цунами. В нашей практике используются комплексы NAMI-DANCE [4–6] и CLAWPACK [7–10], приспособленные для расчета морских волн, как на декартовой плоскости, так и на сфере в географических координатах.

Число аналитических примеров решения нелинейных уравнений мелкой воды невелико. Можно выделить класс задач, связанных с накатом длинных волн на плоский откос, когда нелинейные уравнения мелкой воды линеаризуются с помощью преобразования Карриера–Гринспана (см., например, [11–13]). Другой класс задач — распространение волны в одном направлении, когда ее можно описать Римановым решением [14]. Отметим также задачу взаимодействия волны с вертикальной преградой, когда удастся вычислить высоту волны у преграды [15].

В настоящей работе мы рассмотрим встречное взаимодействие нелинейных одиночных волн на мелкой воде и изучим его влияние на эволюцию простой волны. Вдали от области взаимодействия эти волны являются гладкими (римановыми) или обрушенными, и их динамика хорошо известна. Во время взаимодействия волны влия-

ют друг на друга, и здесь уже нет аналитических решений. Для анализа процесса взаимодействия будет использоваться численное решение нелинейных уравнений мелкой воды с помощью вычислительного комплекса CLAWPACK.

### 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Нелинейные уравнения мелкой воды хорошо известны и представляют собой законы сохранения массы и количества движения

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial(Hu)}{\partial x} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial(Hu)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ Hu^2 + \frac{1}{2}gH^2 \right] = 0. \tag{2}$$

Здесь  $H$  — полная глубина воды,  $u$  — осредненная по глубине скорость потока вдоль оси  $x$ , и  $g$  — ускорение силы тяжести. Мы рассматриваем одномерные волны, поэтому в (1) и (2) не учитывается поперечная горизонтальная координата. Запись уравнений мелкой воды в виде законов сохранения позволяет рассматривать волны как с гладким профилем, так и обрушенные, содержащие зоны резкого изменения параметров (без анализа структуры фронтов). Ниже мы приведем аналитические и численные решения уравнений (1) и (2) для встречного взаимодействия волн одинаковой амплитуды.

### 2. БЕГУЩАЯ ВОЛНА

Прежде всего, приведем здесь известное точное решение для бегущей необрушенной (Римановой) волны в бассейне постоянной глубины [14]

$$H(x,t) = H_0 [x - V(H)t], \tag{3}$$

$$V = \sqrt{gh} + \frac{3u}{2} = 3\sqrt{gH} - 2\sqrt{gh}, \tag{4}$$

$$u = 2(\sqrt{gH} - \sqrt{gh}), \tag{5}$$

где  $h$  — невозмущенная глубина бассейна и  $H_0$  — начальный профиль волны. Данное решение описывает непрерывную трансформацию профиля волны по мере распространения вследствие нелинейности вплоть до ее обрушения. Обрушение в рамках теории мелкой воды соответствует, так называемой, градиентной катастрофе, однако, если высота волны невелика, то дисперсионные эффекты могут препятствовать обрушению. Эта важная проблема обсуждается, например, в [16]. Мы не будем здесь подробно обсуждать условие обрушения в рамках теории мелкой воды, а также дальнейшую эволюцию обрушенной волны (бора), см. [1, 14, 17]. Важно лишь подчер-

кнуть, что динамика бегущей нелинейной волны на мелководье может быть описана аналитически без привлечения численных методов.

### 3. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХ РИМАНОВЫХ ВОЛН

Для получения аналитического решения уравнений мелкой воды (1), (2), описывающее взаимное влияние волн друг на друга, преобразуем эту систему к уравнениям для римановых инвариантов

$$\frac{\partial I_{\pm}}{\partial t} + c_{\pm} \frac{\partial I_{\pm}}{\partial x} = 0, \quad c_{\pm} = \pm\sqrt{gh} + \frac{3}{4}I_{\pm} + \frac{1}{4}I_{\mp}, \tag{6}$$

где римановы инварианты

$$I_{\pm} = u \pm 2[\sqrt{gH} - \sqrt{gh}]. \tag{7}$$

Каждый Риманов инвариант соответствует волне, бегущей в одну сторону. Так в «правой» волне (3)

$$I_{+} = 4[\sqrt{gH_0} - \sqrt{gh}], \quad I_{-} = 0. \tag{8}$$

Важно подчеркнуть, что римановы инварианты сохраняются в любой момент времени, что видно из уравнения (6), и эффект взаимодействия волн, бегущих в разных направлениях, проявляется через переменность скоростей их распространения  $c_{\pm}$ . Если в линейной задаче характеристики — прямые линии с наклоном  $\pm c_0 = \sqrt{gh}$ , то в момент взаимодействия из-за изменения полной глубины бассейна характеристики изгибаются в ту или иную сторону (рис. 1).

Как видим, область взаимодействия волн достаточно узка (примерно две длины волны), вне области взаимодействия каждая волна описывается Римановым решением (3)–(5) с соответствующим знаком при скоростях. Поскольку Риманов инвариант сохраняется вдоль характеристики, то вне взаимодействия для волны, бегущей вправо, он описывается равенством (8). В момент взаимодействия он остается таким же, однако смещение водной поверхности и скорость течения не известны. Если встречные волны одинаковы, то в силу сим-

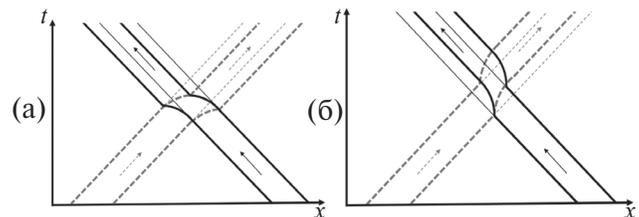


Рис. 1. Характеристики взаимодействующих римановых волн: (а) — сценарий взаимодействия с импульсом положительной полярности; (б) — с импульсом отрицательной полярности.

метрии в момент взаимодействия скорость течения равна нулю, и Риманов инвариант есть

$$I_{\pm} = \pm 2 \left[ \sqrt{gH} - \sqrt{gh} \right], \quad (9)$$

где теперь входит полная глубина жидкости в области взаимодействия. Приравнивая величины инвариантов (8) и (9), мы находим максимальную высоту смещения воды  $H_w$  в момент взаимодействия через начальную высоту волны  $H_{in}$

$$\frac{H_w}{h} = 1 + 4 \left[ \frac{H_{in}}{h} - \sqrt{\frac{H_{in}}{h}} \right]. \quad (10)$$

Естественно, что эта формула имеет тот же вид, что и при взаимодействии волны со стенкой [12], поскольку высоты встречных волн взяты одинаковыми. К сожалению, сдвиг характеристик не находится аналитически, поэтому здесь необходимы численные расчеты.

#### 4. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛН

Численное моделирование используется, чтобы решить задачу оценки влияния взаимодействия волн на процесс деформации первоначальной римановой волны. Как уже говорилось выше, если волна распространяется без взаимодействия, то она полностью описывается аналитически, и мы знаем ее профиль в любой момент времени до момента опрокидывания. Учет же взаимодействия, как следует из теории, приводит к фазовым и амплитудным изменениям волны, и после взаимодействия, благодаря римановой инвариантности, ее профиль должен, вообще говоря, отличаться от случая независимого распространения.

Расчеты выполнены с помощью программного комплекса CLAWPACK ([www.clawpack.org](http://www.clawpack.org)), решающего уравнения мелкой воды методом конечных объемов [7]. Величина пространственного шага составила 0.05 м, временной шаг подбирался автоматически, удовлетворяя критерию устойчивости Куранта–Фридрихса–Леви [18]. Граничными условиями на концах расчетной области явились условия экстраполяции (свободного ухода), так что волна покидает расчетную область без отражений. Фактически, численный счет останавливался, как только волна подходила к краю расчетной области. Волны распространяются в бассейне глубиной  $h = 1$  м. Волна в начальный момент времени представляет собой Гауссов импульс

$$H_0(x) = h + A_{in} e^{-\beta(x-x_0)^2} \quad (11)$$

с длиной у подошвы около 120 м ( $\beta = 0.002 \text{ м}^{-2}$ ) и амплитудой  $A_{in} = 0.1$  м (слабонелинейная волна) и  $A_{in} = 1$  м (сильнонелинейная волна). Скорость течения в начальный момент времени определяется формулой (5). В первом сценарии численных экспериментов задается только одна волна, движущаяся вправо (сплошная линия на рис. 2); во втором — две одинаковых волны, движущихся навстречу друг другу (сплошная и штрихпунктирная линии); в третьем — взаимодействие двух одинаковых импульсов разной полярности (сплошная и пунктирная линии) (рис. 2).

На рис. 3 показано изменение максимального значения волнового поля в слабонелинейном случае ( $A_{in} = 0.1$  м). Поскольку обрушения нет, то амплитуда волны не меняется со временем в случае отсутствия встречной волны (пунктирная линия на рис. 3). В случае взаимодействия волн максимальное значение поля меняется. Так, в случае взаимодействия волн одинаковой полярности (сплошная линия) максимальная высота 1.205 м очень близка к теоретическому значению 1.2048 м по формуле (10). В случае волн разной полярности, как и ожидалось, волны компенсируют друг друга (штриховая линия), при этом складываются скорости течений. Отметим, что на рис. 3 ясно виден нелинейный характер взаимодействия волн, проявляющийся в разной крутизне склонов волны. При этом нелинейное взаимодействие усиливается, если одна из волн отрицательной полярности (возрастает отношение высоты волны к локальной глубине жидкости), как это и следует из теории [14, 17].

Тем не менее, в случае волн малой амплитуды, как видно из рис. 3, взаимодействие не приводит к изменению амплитуды распространяющейся волны после взаимодействия, так что в этом смысле взаимодействие Римановых волн является упругим. Меняются только фазовые сдвиги из-за взаимодействия (рис. 4), что демонстрируется временной разверткой сигнала в точке 300 м, хотя они и достаточно малы для волн малой амплитуды. Ясно видно, что встречная волна «задержала» распространение основной волны, вынужденной рас-

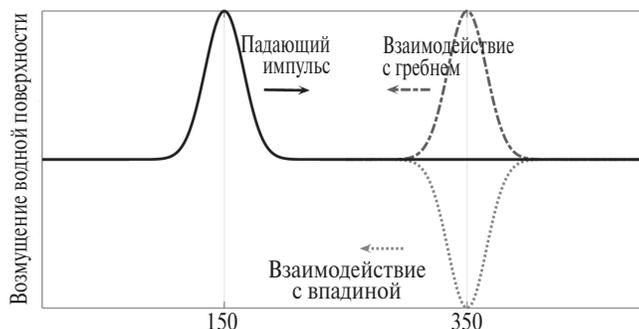
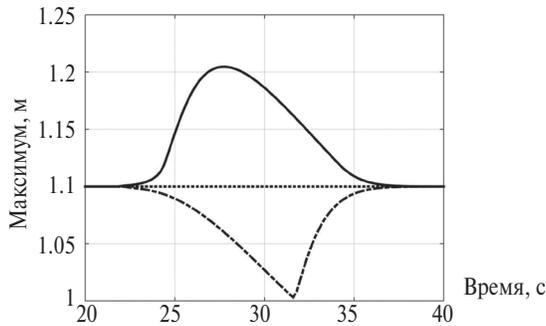
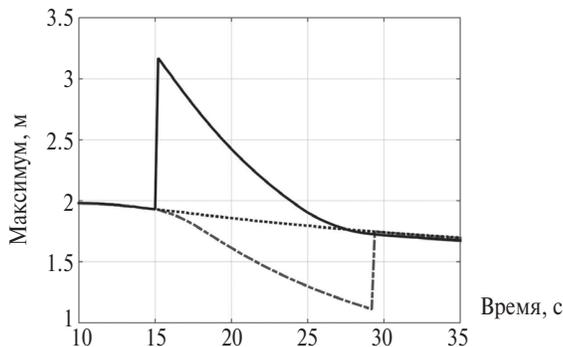


Рис. 2. Начальные условия для уравнений мелкой воды.



**Рис. 3.** Изменение максимального значения волнового поля (пунктирная линия — одна волна; сплошная — две волны положительной полярности; штрихпунктирная линия — две волны противоположной полярности). Начальная амплитуда 0.1 м.



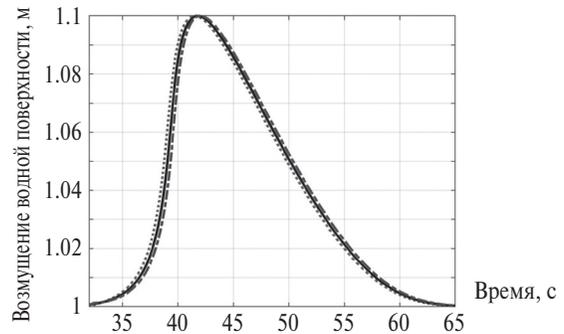
**Рис. 5.** Изменение максимального значения волнового поля (пунктирная линия — одна волна; сплошная — две волны положительной полярности; штрихпунктирная линия — две волны противоположной полярности). Начальная амплитуда 1 м.

пространяться на встречном течении. Впадина же, наоборот, ускорила падающий импульс. Отметим также, что волна на этом расстоянии имеет очень крутой фронт, несмотря на малость ее амплитуды.

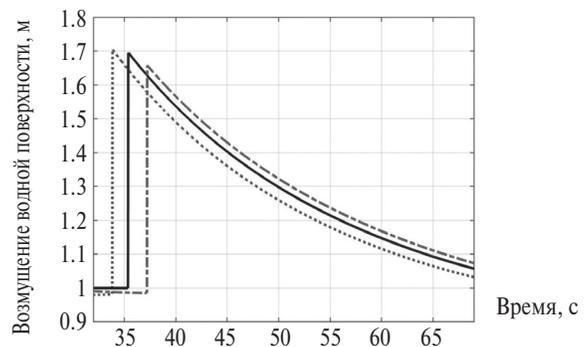
На рис. 5 изображены аналогичные сценарии взаимодействия волн для начальной амплитуды 1 м. Здесь нелинейные эффекты проявляются гораздо сильнее, и волны в момент взаимодействия имеют сформированные ударные фронты, потеряв, благодаря диссипации, часть своей амплитуды. Естественно, что взаимодействие ударных волн происходит неупруго. Фазовые сдвиги в этом случае увеличились в несколько раз (рис. 6), «затормаживая» падающий импульс при взаимодействии с гребнем и «ускоряя» его при взаимодействии со впадиной.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели распространение мелководной волны в бассейне постоянной глубины при условии ее взаимодействия со встречной волной. Взаимодействие необрушенных (Римановых) волн происходит упруго и сопровождается небольшими фазовыми сдвигами. В случае обрушенных



**Рис. 4.** Форма волны в точке  $x = 300$  м (пунктирная линия — после взаимодействия со встречной впадиной, сплошная линия — в отсутствие встречной волны, штрихпунктирная линия — после взаимодействия с встречным гребнем). Начальная амплитуда — 0.1 м.



**Рис. 6.** Форма волны в точке  $x = 350$  м (пунктирная линия — после взаимодействия со встречной впадиной, сплошная линия — в отсутствие встречной волны, штрихпунктирная линия — после взаимодействия с встречным гребнем). Начальная амплитуда — 1 м.

волн становится заметным уменьшение амплитуды волны и увеличиваются фазовые сдвиги при взаимодействии. Наиболее сильно нелинейное взаимодействие проявляется для волн отрицательной полярности, поскольку возрастает отношение амплитуды волны к локальной глубине.

**Источники финансирования.** Представленные результаты получены в рамках государственного задания в сфере научной деятельности (Задания № 5.4568.2017/6.7 и № 5.5176.2017/8.9) при поддержке гранта Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ РФ НШ-2685.2018.5, Программы «Нелинейная динамика» и грантов РФФИ (17-05-00067 и 18-05-80019).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стокер Дж. Волны на воде. М.: Издательство иностранной литературы, 1959. 618 с.
2. Вольцингер Н.Е., Клеванный К.А., Пелиновский Е.Н. Длинноволновая динамика прибрежной зоны. Л.: Гидрометеиздат, 1989. 271 с.
3. Арсеньев А.С., Шелковников Н.К. Динамика морских длинных волн. М.: МГУ, 1991. 88 с.

4. *Ozer Sozdinler C., Yalciner A.C., Zaytsev A.* Investigation of tsunami hydrodynamic parameters in inundation zones with different structural layouts // *Pure and Applied Geophysics*. 2015. V. 172. P. 931–952.
5. *Velioglu D., Kian R., Yalciner A.C., Zaytsev A.* Performance Assessment of NAMI DANCE in Tsunami Evolution and Currents Using a Benchmark Problem // *Journal of Marine Science and Engineering*. 2016. V. 4(3). P. 49–1–8.
6. *Lynett P.J., Gately K., Wilson R., Montoya L., Arcas D., Ay-tore B., Bai Y., Bricker J.D., Castro M.J., Cheung K.F., David C.G., Doğan G.G., Escalante C., González-Vida J.M., Grilli S.T., Heitmann T.W., Horrillo J.J., Kânoglu U., Kian R., Kirby J.T., Li W., Macías J., Nicolsky D.J., Ortega S., Pampell-Manis A., Park Y.S., Roeber V., Sharghivand N., Shelby M., Shi F., Tehranirad B., Tolkova E., Thio H.K., Velioglu D., Yalçiner A.C., Yamazaki Y., Zaytsev A., Zhang Y.J.* Inter-model analysis of tsunami-induced coastal currents // *Ocean Modelling*. 2017. V. 114. P. 14–32.
7. *LeVeque R.J.* *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. 558 p.
8. *LeVeque R.J., George D.L., Berger M.J.* Tsunami modeling with adaptively refined finite volume methods // *Acta Numerica*. 2011. V. 20. P. 211–289.
9. *Berger M., George D., LeVeque R.J., Mandli K.T.* The GeoClaw software for depth-averaged flows with adaptive refinement // *Advances in Water Resources*. 2011. V. 34(9). P. 1195–1206.
10. *Gonzalez F.I., LeVeque R.J., Chamberlain P., Hirai Br., Varkovitzky J., George D.L.* Validation of the GeoClaw model. Washington: University of Washington, 2011. 84 p.
11. *Пелиновский Е.Н.* Гидродинамика волн цунами. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 1996. 276 с.
12. *Пелиновский Е.Н., Диденкулова И.И., Куркин А.А., Родин А.А.* Аналитическая теория наката морских волн на берег. Нижний Новгород: НГТУ им. Р.Е. Алексеева, 2015. 114 с.
13. *Raz A., Nicolsky D., Rybkin A., Pelinovsky E.* Long wave run-up in asymmetric bays and in fjords with two separate heads // *Journal of Geophysical Research – Oceanus*. 2018. V. 123. № 3. P. 2066–2080.
14. *Пелиновский Е.Н., Родин А.А.* Трансформация сильно нелинейной поверхностной волны в мелководном бассейне // *Известия РАН. Физика атмосферы и океана*. 2012. Т. 48. № 3. С. 383–390.
15. *Pelinovsky E., Kharif S., Talipova T.* Large-amplitude long wave interaction with a vertical wall // *European J. Mechanics – B/Fluids*. 2008. V. 27. № 4. P. 409–418.
16. *Пелиновский Е.Н., Шургаллина Е.Г., Родин А.А.* О Критериях перехода обрушающегося бора в волнообразный // *Известия РАН. Физика атмосферы и океана*. 2015. Т. 51. № 5. С. 598–601.
17. *Диденкулова, И.И. Заубо Н., Куркин А.А., Пелиновский Е.Н.* Крутизна и спектр нелинейно деформируемой волны на мелководье // *Известия РАН. Физика атмосферы и океана*. 2006. Т. 42. № 6. С. 839–842.
18. *Курант Р., Фридрихс К.* Сверхзвуковое течение и ударные волны. М.: Издательство иностранной литературы, 1950. 427 с.

## The Influence of Nonlinear Interaction on the Evolution of Waves in a Shallow Basin

A. A. Rodin<sup>1,\*</sup>, N. A. Rodina<sup>1,2,\*\*</sup>, A. A. Kurkin<sup>1,\*</sup>, E. N. Pelinovsky<sup>3-6,\*\*\*</sup>

<sup>1</sup> *Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev  
Minin Street 24, 603950, Nizhny Novgorod, Russia*

<sup>2</sup> *Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod  
Gagarin Avenue, 23, 603950, Nizhny Novgorod, Russia*

<sup>3</sup> *Institute of Applied Physics Russian Academy of Sciences  
Ul'yanov Street, 46, 603950, Nizhny Novgorod, Russia*

<sup>4</sup> *Special Research Bureau for Automation of Marine Researches,  
Far Eastern Branch of Russian Academy of Sciences  
Gorky Street, 25, 693023, Yuzhno-Sakhalinsk, Russia*

<sup>5</sup> *National Research University – Higher School of Economics  
Bolshaya Pecherskaya Street, 25/12, 603155, Nizhny Novgorod, Russia*

<sup>6</sup> *University of Southern Queensland*

*West Street, Darling Heights QLD 4350, Australia*

*e-mail: \*aakurkin@gmail.com, \*\*na4aikovskaya@mail.ru, \*\*\*pelinovsky@gmail.com*

Received: 20.02.2018

Accepted: 03.04.2019

The influence of counter interaction of nonlinear wave in the shallow water has been studied. It is shown that such an interaction leads to a change in the phase of propagation of the main wave, which is forced to propagate along the flow induced by the counter-propagating wave. Estimates of the height of the non-breaking wave at the moment of interaction are in agreement with theoretical predictions. The phase shift in the interaction of non-breaking waves is small enough, but becomes noticeable in the case of the breaking waves motion.

**Keywords:** long waves, numerical experiment, shallow water equations, wave interaction, finite volume method.