

О ВОЗМУЩЕНИЯХ ДАВЛЕНИЯ, ВЫЗЫВАЕМЫХ ДВИЖУЩИМСЯ ТЕПЛОВЫМ ИСТОЧНИКОМ ФРОНТАЛЬНОГО ТИПА (ГИДРОСТАТИЧЕСКИЙ РЕЖИМ)

© 2019 г. М. В. Калашник^{1,3,*}, С. Н. Куличков^{1,2,**}

¹Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН
119017, Москва, Пыжевский пер., 3

²Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет
119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, 1

³Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН
123242, Москва, Б. Грузинская ул., 10, стр. 1
E-mail: *kalashnik-obn@mail.ru, **snik1953@gmail.com

Поступила в редакцию 20.02.2019 г.

Принята к печати 29.05.2019 г.

Рассмотрена задача о возмущениях приземного давления, вызываемых движущимся, нестационарным источником тепла, локализованным по одной горизонтальной координате и периодическим по другой. Возмущения давления связаны с внутренними гравитационными волнами (ВГВ). Показано, что при движении источника в слое атмосферы конечной высоты (атмосферном волноводе), когда возбуждается дискретный набор вертикальных мод ВГВ, возможны три типа временного хода приземного давления в фиксированной точке наблюдения. Этим типам отвечает, соответственно, временной сигнал с амплитудной модуляцией, сигнал с модуляцией по частоте доплеровского типа и сигнал, возникающий только после прохождения источника. Каждый из типов реализуется для определенных значений частоты колебаний источника и числа Маха (отношения скорости движения источника к фазовой скорости ВГВ). При значениях числа Маха $M < 1$ нестационарный источник всегда возбуждает волновые предвестники — возмущения, наблюдаемые до прихода источника. Движение источника в полуограниченной атмосфере приводит к дополнительному возбуждению волн, переносящих энергию в верхние слои атмосферы.

Ключевые слова: внутренние гравитационные волны, движущийся источник тепла, волновое уравнение, число Маха, вариации приземного давления, волновые предвестники, амплитудная и частотная модуляция сигнала.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0002-351555551-61>

ВВЕДЕНИЕ

Волновые проявления (сигналы) от опасных метеорологических явлений (конвективных штормов, гроз, смерчей, атмосферных фронтов) являются предметом активных экспериментальных исследований [1–5]. С этими исследованиями связывают решение важных практических задач — определение расположения и скорости перемещения источников, оценки их интенсивности. Обширные измерения параметров инфразвуковых и внутренних гравитационных волн с использованием сети микробарографов выполнены на расположенной в Московском регионе сети регистрации ВГВ ИФА им. А.М. Обухова РАН [6–10]. Обработка результатов измерений позволила выделить некоторые характерные особенности временно-

го хода пульсаций давления при прохождении мощных конвективных облаков и гроз. К ним относится так называемый и хорошо известный из литературы «грозовой нос» — повышение давления с последующим резким падением (скачком) в момент прохождения. Еще одна важная особенность, регистрируемая при прохождении интенсивных атмосферных фронтов, связана с волновыми предвестниками — импульсами давления, возникающими до момента прихода фронта в точку наблюдения. Волновые предвестники в перспективе могут быть использованы в качестве индикатора появления фронта и для прогноза его интенсивности.

Настоящая работа посвящена теоретическому описанию вариаций давления в рамках классической задачи о волнах, возбуждаемых

движущимся источником [11]. Применительно к внутренним гравитационным волнам (ВГВ) и случаю локализованных (сингулярных) источников задача изучалась в недавних работах [12–14]. В данной работе рассмотрен случай нестационарного (осциллирующего) теплового источника, локализованного по одной горизонтальной координате и периодического по другой координате. Показано, что при движении такого источника в слое атмосферы конечной высоты (атмосферном волноводе), когда возбуждается дискретный набор вертикальных мод ВГВ, возможны три типа временного хода приземного давления в фиксированной точке наблюдения. Первый тип представляет собой модулированный по амплитуде сигнал с максимумом амплитуды в момент прохождения источника и волновыми предвестниками. Для второго типа характерна частотная модуляция доплеровского типа — частота пульсаций давления до прихода источника больше частоты, наблюдаемой после прохождения источника. Близкий к классическому третий тип отвечает отсутствию возмущений до прихода источника и возникновению волнового шлейфа сразу после его прохождения. При движении источника в полуограниченной атмосфере дополнительно возбуждается волновое поле, переносящее энергию в верхние слои атмосферы.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ДЛЯ СЛОЯ АТМОСФЕРЫ КОНЕЧНОЙ ВЫСОТЫ

Исследуются возмущения, вызываемые движущимся источником тепла Q в слое стратифицированной несжимаемой атмосферы конечной высоты H . Частота плавучести N в слое предполагается постоянной. В приближении Буссинеска линеаризованная система уравнений динамики для возмущений имеет вид [13]

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p + \sigma \mathbf{k}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} + N^2 w = gQ, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0. \quad (1)$$

Здесь \mathbf{u} — вектор скорости с компонентами u , v , w вдоль горизонтальных осей x , y и вертикальной оси z соответственно, \mathbf{k} — вертикальный орт, $p = p'/\rho_0$ — возмущение давления, нормированное на среднюю плотность (далее просто возмущение давления), $\sigma = g\theta'/\theta_0$ — плавучесть, θ' — возмущение потенциальной температуры, g — ускорение свободного падения. Источник тепла задается выражением $Q = q/c_p T$, где q — мощность (вт/кг) источника, c_p — теплоемкость, T — фоновая температура.

Система (1) рассматривается с условием непротекания $w = 0$ на твердых горизонтальных границах слоя $z = 0, H$.

Из системы (1) следуют уравнения, связывающие вертикальную компоненту скорости и возмущение давления [15]

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial z} = \Delta_2 p, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + N^2 w = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial p}{\partial z} + gQ. \quad (2)$$

Исключение из (2) w приводит к волновому уравнению для возмущения давления, вызываемого источником

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta p + N^2 \Delta_2 p = g \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial Q}{\partial t}. \quad (3)$$

Здесь Δ_2, Δ — соответственно двумерный (по горизонтальным координатам) и трехмерный (пространственный) операторы Лапласа. К уравнению (3) присоединяются краевые условия

$$z = 0, H: \quad \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial p}{\partial z} = gQ, \quad (4)$$

следующие из второго уравнения (2) и условия непротекания.

Далее ограничимся анализом гидростатического (длинноволнового) варианта уравнения (3)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + N^2 \Delta_2 p = g \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial Q}{\partial t}. \quad (5)$$

Формальный вывод этого уравнения состоит в использовании допущения $\partial^2/\partial t^2 \ll N^2$ во втором уравнении (2). Для волновых решений $p \sim \exp(i(kx + ly + mz - \omega t))$ (в отсутствие границ и теплового источника) из (5) следует известное дисперсионное соотношение $\omega^2 = N^2(k^2 + l^2)/m^2$, характерное для длинных ВГВ [15].

Распределение источника Q будем представлять в виде

$$Q = Q_* \cos(l_* y) h(z) e^{i\omega_* t} \delta(x - ut). \quad (6)$$

Здесь $Q_* = q_*/c_p T$ — интенсивность теплового источника, u , ω_* , соответственно, скорость перемещения источника и частота его колебаний, $\delta(x)$ — дельта функция, $h(z)$ — безразмерная функция, описывающая распределение источника по вертикали. Источник (6), локализованный по горизонтальной координате x и периодический с периодом $2\pi/l_*$ по горизонтальной координате y , естественно называть источником фронтального типа. Отметим, что положительному (отрицательному) значению Q_* отвечает источник тепла (холода). С учетом раз-

мерности дельта функции (m^{-1}), интенсивность источника Q_* имеет размерность скорости (m/c). Соответственно, величина q_* имеет размерность ($вт \times м / кг$).

Если функция $h(z)$ удовлетворяет условиям $h(0) = h(H) = 0$, решение уравнения (5) и источник можно представить в форме разложения по вертикальным модам

$$p = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \cos \frac{n\pi}{H} z, \quad Q = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \sin \frac{n\pi}{H} z. \quad (7)$$

После перехода в движущуюся с источником систему координат $x_1 = x - ut$, $t_1 = t$, $y_1 = y$, для каждой вертикальной моды из (5) получим уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - u \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 p_n - c_n^2 \Delta_2 p_n = -g H_n \left(\frac{\partial}{\partial t} - u \frac{\partial}{\partial x_1} \right) Q_n, \quad (8)$$

где $c_n = NH_n$ — фазовая скорость n -й моды ВГВ, $H_n = H / \pi n$ — вертикальный масштаб моды, $Q_n = Q_* \cos(l_* y) h_n e^{i\omega_* t} \delta(x - ut)$, h_n — соответствующий коэффициент разложения в ряд функции $h(z)$. В анализе удобно использовать безразмерную форму (8), принимая в качестве масштабов координат, времени и давления соответственно $H_n = H / \pi n$, N^{-1} и $(g / N) Q_* h_n$. В безразмерных переменных уравнение (8) примет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - M \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 p_n - \Delta_2 p_n = -\cos(l_* y) \left(\frac{\partial}{\partial t} - M \frac{\partial}{\partial x_1} \right) e^{i\omega_* t} \delta(x_1). \quad (9)$$

Здесь $M = u/c_n$ — число Маха для моды с номером n , $l = l_* H_n$ — безразмерное волновое число, $\omega = \omega_* / N$ — безразмерная частота. Обратим внимание, что параметры M , l зависят от номера вертикальной моды и, в силу представления (7), значение p_n есть значение возмущения давления, отвечающее каждой моде, на уровне $z = 0$.

Ниже будет показано, что характер решений (9) принципиально различается в случаях $M < 1$ и $M > 1$. Для типичной скорости перемещения фронтов $u = 5 \div 20$ км/ч ($1.4 \div 5.6$ м/с) и фазовой скорости первой моды ВГВ $c_1 = NH / \pi = 33$ м/с (при $N = 10^{-2} c^{-1}$, $H = 10$ км) число Маха меньше единицы ($M = 0.18$ при $u = 20$ км/ч). В то же время, поскольку фазовая скорость неограниченно растет с ростом n , для высших мод $M > 1$. При скорости перемещения $u = 20$ км/ч число Маха $M < 1$ для первых пяти мод.

ТРИ ТИПА РЕШЕНИЙ

Полагая в (9)

$$p_n = \cos(l_* y) e^{i\omega t} F(x_1), \quad (10)$$

для амплитудной функции $F(x_1)$ получим уравнение

$$\begin{aligned} (1 - M^2) \frac{d^2 F}{dx_1^2} + 2i\omega M \frac{dF}{dx_1} + (\omega^2 - l^2) F = \\ = i\omega \delta(x_1) - M \delta'(x_1). \end{aligned} \quad (11)$$

Для построения решений (11) можно использовать либо метод преобразования Фурье, либо метод функций Грина. Используя более компактный первый метод, для преобразования Фурье $\tilde{F}(k) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x_1) e^{-ikx_1} dk$, из (11) получим

$$\tilde{F}(k) = -i \frac{\omega - Mk}{2\pi f(k)}, \quad (12)$$

$$f(k) = (1 - M^2)k^2 + 2\omega M k + l^2 - \omega^2.$$

Осуществляя обратное преобразование, найдем формальное интегральное представление решения

$$F(x_1) = -\frac{i}{2\pi(1 - M^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\omega - Mk) e^{ikx_1}}{(k - k_1)(k - k_2)} dk. \quad (13)$$

Здесь k_1, k_2 — полюса $\tilde{F}(k)$, т.е. корни квадратного уравнения $f(k) = 0$,

$$k_{1,2} = \frac{-\omega M \pm \sqrt{D}}{1 - M^2}, \quad D = \omega^2 - (1 - M^2)l^2. \quad (14)$$

В зависимости от расположения полюсов на комплексной плоскости можно выделить три случая, отвечающие различным типам решений.

1) Случай $M^2 < 1$, $\omega^2 < (1 - M^2)l^2$ ($D < 0$). В этом случае полюса k_1, k_2 комплексны и расположены соответственно в верхней и нижней полуплоскости. Интеграл (13) находится с использованием теории вычетов. При этом контур интегрирования в (13) замыкается полуокружностью, расположенной в верхней (нижней) полуплоскости, если $x_1 > 0$ ($x_1 < 0$). Вычисляя интеграл, учитывая (10) и возвращаясь в неподвижную систему координат, для возмущения давления получим

$$p_n = \frac{\cos(l_* y) e^{-a|x - Mt|}}{2\sqrt{D_1}} (aM \operatorname{sgn}(x - Mt) \cos \theta - \omega_s \sin \theta), \quad (15)$$

где $a = \sqrt{D_1} / (1 - M^2)$, $D_1 = |D| = (1 - M^2)l^2 - \omega^2$,

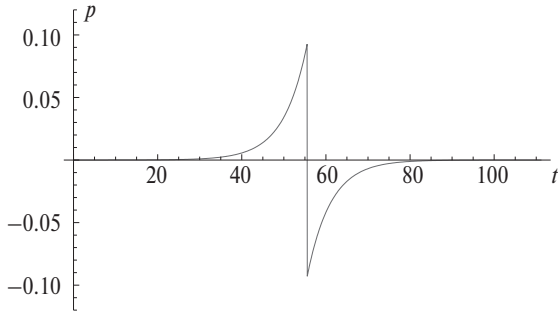


Рис. 1. Зависимость от времени возмущения давления для значений безразмерных параметров $\omega = 0$, $l = 1$, $x = 10$, $y = 0$, $M = 0.18$.

$\text{sgn}(x)$ — функция выделения знака. Волновая фаза возмущения определяется выражением

$$\theta = k_s x - \omega_s t, \quad k_s = \frac{\omega M}{1 - M^2}, \quad (16)$$

$$\omega_s = \omega + M k_s = \frac{\omega}{1 - M^2}.$$

Приведем также другую запись (15)

$$p_n = \frac{M}{2(1 - M^2)} \cos(\omega t) e^{-a|x - Mt|} (\text{sgn}(x - Mt) \cos \theta - \alpha \sin \theta), \quad (17)$$

где $\alpha = \omega_s / Ma = \omega / M \sqrt{D_1}$. Обратим внимание, что, согласно (16), наблюдаемая частота ω_s всегда превосходит частоту колебаний источника.

Выражения (15), (17) показывают, что возмущение давления (для каждой моды) есть сумма $p_n = p_u + p_\omega$ двух компонентов. Здесь разрывный компонент p_u , пропорциональный $\cos \theta$, обусловлен движением источника, непрерывный компонент p_ω , пропорциональный $\sin \theta$, обусловлен колебаниями источника. Разделение на компоненты отвечает представлению правой части (11) суммой двух слагаемых, соответственно с дельта функцией и ее производной. Каждый из компонентов описывает модулированную волну с волновым числом k_s , частотой ω_s и безразмерной фазовой скоростью $c_{ph} = \omega_s / k_s = M^{-1}$. Эти параметры зависят от числа Маха и частоты колебаний источника ω . Если $\omega = 0$ (стационарный движущийся источник) компонент $p_\omega = 0$ и решение

$$p_n = \frac{M \cos(\omega t)}{2(1 - M^2)} e^{-a|x - Mt|} \text{sgn}(x - Mt), \quad a = \frac{l}{\sqrt{1 - M^2}}. \quad (18)$$

Согласно (18), в случае источника тепла и $l \neq 0$ до прихода источника приземное давление растет, далее, в момент прихода $t = x/M$ происходит резкое падение (скачок) давления на величину $\Delta p_n = M / (1 - M^2)$, далее давление опять растет (рис. 1). Такое поведение качественно подобно упомянутому «грозовому носу», наблюдаемому при прохождении гроз. В случае $l = 0$ решение (18) описывает перенос «ступеньки» давления, возбуждаемой источником.

Для нестационарного источника решение (17) носит осциллирующий характер и в нем участвуют оба компонента. При $M \rightarrow 0$ ($\alpha \rightarrow \infty$) основной вклад вносит компонент p_ω . Примеры зависимостей p_n от времени в фиксированной точке для трех значений числа Маха приведены на рис. 2. Как видно, при преобладающем вкладе

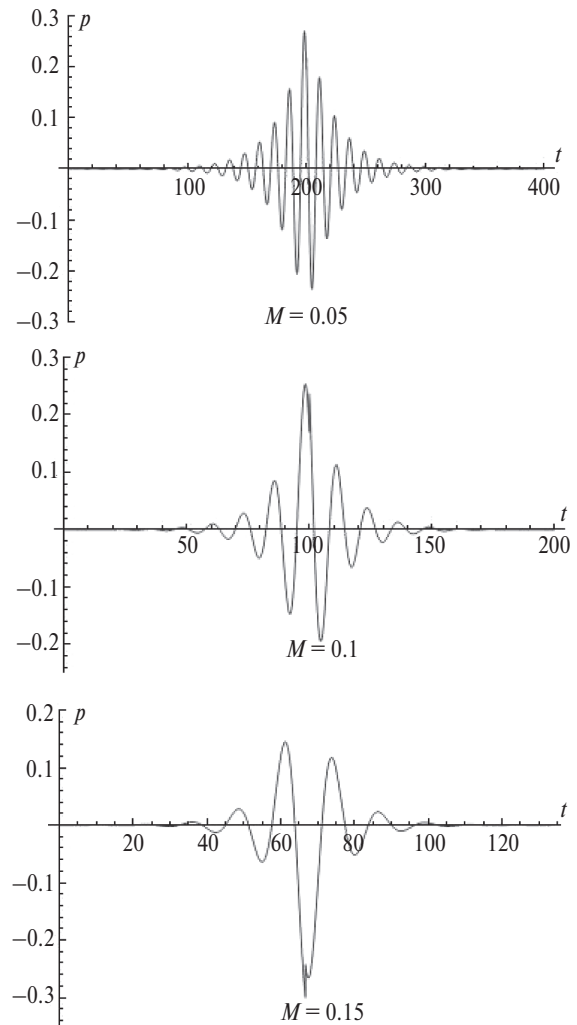


Рис. 2. Зависимость от времени возмущения давления p_n для трех значений числа Маха и значений безразмерных параметров $\omega = 0.5$, $l = 0$, $x = 10$, $y = 0$. Размерная частота колебаний источника $\omega = 0.5 \text{ Н} \sim 0.5 \text{ с}^{-1}$, волновое число $l_* = \pi / H \sim 0.31 \text{ км}^{-1}$, в начальный момент времени источник находится на расстоянии $x_* \sim 30 \text{ км}$.

де компонента p_ω , имеет место осциллирующий, модулированный по амплитуде сигнал с максимумом амплитуды в момент прихода источника. Амплитуда сигнала в общем случае распределена несимметрично относительно момента прихода — возможно преобладание областей с положительными (отрицательными) фазами. Важно подчеркнуть, что осцилляции до прихода источника можно рассматривать как волновые предвестники. Существование этих предвестников обусловлено исключительно собственными колебаниями источника. В случае стационарного движущегося источника волновые предвестники отсутствуют.

Подчеркнем, что максимум амплитуды предвестников распространяется со скоростью источника. Размерная фазовая скорость распространения предвестников $c_{ph} = \omega_s / k_s = M^{-1} c_n$ значительно превышает фазовую скорость c_n моды ВГВ при малых значениях числа Маха.

Интересно отметить, что по измерениям амплитуды предвестников можно оценить скорость перемещения источника. Действительно, при $M \rightarrow 0$ и $y = 0$ можно записать (17) в виде $p_n = A(x, t) \sin \theta$, где амплитуда $A(x, t) = -(\omega / 2a) e^{-a|x-Mt|}$, $a = (l^2 - \omega^2)^{1/2}$. Предположим, что до прихода источника измерены значения амплитуды $A_1 = A(x, t_1)$, $A_2 = A(x, t_2)$ в два момента времени. Тогда $A_2 / A_1 = \exp(aM \Delta t)$, $\Delta t = t_2 - t_1$ и число Маха (скорость перемещения источника) $M = \ln(A_2 / A_1) / a \Delta t$.

Отметим еще одну особенность, связанную со скачком давления $\Delta p_n = p_n(x_1 + 0) - p_n(x_1 - 0)$ в момент прихода источника $t = x/M$. Для этого скачка из (17) следует $\Delta p_n = (M / (1 - M^2)) \cos(M^{-1} \omega x)$. Величина скачка для нестационарного источника, таким образом, зависит от координаты x точки наблюдения. Если $M^{-1} \omega x = (\pi / 2) + \pi n$ скачок отсутствует. Подчеркнем, что наличие скачка обусловлено сингулярным характером источника.

2) Случай $M^2 < 1$ $\omega^2 > (1 - M^2) l^2$ ($D > 0$). В этом случае, случае достаточно больших значений частоты ω , полюса k_1, k_2 расположены на вещественной оси и при вычислении интеграла (13) возникает неопределенность. Она устраняется с использованием принципа предельного поглощения [16]. Согласно этому принципу, в исходное уравнение (5) вводится диссипативный член $2\varepsilon(p_{zz})_t$ и, после разложения по модам, находится предельное решение ($\varepsilon \rightarrow 0$). Нетрудно показать, что при учете диссипативного члена, полюс k_1 (k_2) смещается в нижнюю (верхнюю) полуплоскость. Опять вычисляя интеграл (13)

с помощью вычетов, выполняя предельный переход и учитывая (10), получим решение для возмущения давления p_n . Удобно обозначить через $p_n^{(1,2)}$ решение соответственно в областях $x - Mt > 0$ и $x - Mt < 0$ (до и после прихода источника). Тогда

$$p_n^{(1,2)} = -\frac{\omega_{1,2}}{2\sqrt{D}} \cos(ky) \cos(\kappa_{1,2} x - \omega_{1,2} t), \quad (19)$$

где волновые числа $\kappa_{1,2} = -k_{2,1}$ и частоты

$$\omega_{1,2} = \omega + M \kappa_{1,2} = \frac{\omega \pm M \sqrt{D}}{1 - M^2}, \quad (20)$$

$$D = \omega^2 - (1 - M^2) l^2.$$

Физический смысл решения (19), (20) легко понять, рассматривая предельный случай $l = 0$ (источник не зависит от горизонтальной координаты y). В этом случае $\kappa_{1,2} = \pm \omega_{1,2}$ и для частот $\omega_{1,2}$ из (20) получим выражения, хорошо известные из теории эффекта Доплера [17]

$$\omega_1 = \frac{\omega}{1 - M}, \quad \omega_2 = \frac{\omega}{1 + M}. \quad (21)$$

Согласно (21), до прихода источника наблюдаемая частота ω_1 больше частоты колебаний ω источника, после прихода источника наблюдаемая частота ω_2 меньше ω . Это относится и к фазовой скорости наблюдаемых волновых возмущений давления. Зависимость от времени возмущения давления при $l = 0$,

$$p_n^{(1,2)} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1 \mp M} \cos \left[\frac{\omega}{1 \mp M} (x \mp t) \right],$$

показана на рис. 3а. Аналогично выглядит общая зависимость. Случай колебаний источника с высокой частотой и числом Маха $M^2 < 1$, таким образом, отвечает частотной модуляции временного сигнала.

3) Случай $M^2 > 1$. В этом случае, независимо от значений частоты ω , полюса k_1, k_2 всегда лежат на вещественной оси и при вычислении интеграла (13) опять возникает неопределенность. Стандартный прием устранения этой неопределенности состоит в том, что искомое решение рассматривается как предел решения с экспоненциально растущим со временем источником [11]. Учет роста источника осуществляется заменой в уравнении (11) частоты ω на величину $\omega - i\varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Можно показать, что при такой замене оба полюса k_1, k_2 смещаются в нижнюю полуплоскость. Это приводит к тому, что в области $x_1 > 0$ амплитуда $F(x_1) = 0$, а в области $x_1 < 0$ она определяется вкладом от двух полюсов.

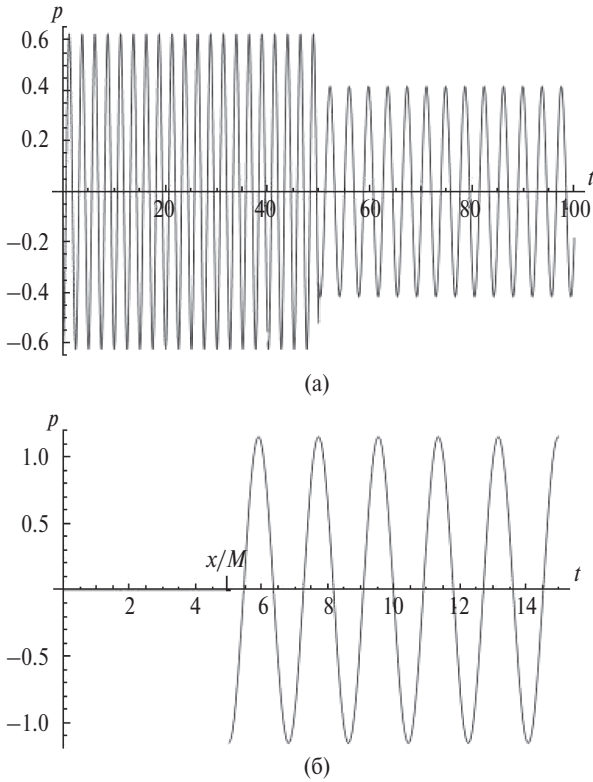


Рис. 3. Зависимость от времени возмущения давления для значений безразмерных параметров $\omega = 2, l = 0, x = 10, M = 0.2$ (частотная модуляция, (а)), $\omega = 0, l = 3, x = 10, M = 2$ (возникновение волнового шлейфа, (б)).

Переходя к пределу, для возмущения давления получим решение

$$p_n = \frac{\cos(l y)}{2\sqrt{D}} \begin{cases} 0, & x - Mt > 0, \\ \omega_2 \cos(k_2 x + \omega_2 t) - \omega_1 \cos(k_1 x + \omega_1 t), & x - Mt < 0. \end{cases} \quad (22)$$

где значения $k_{1,2}$ определены выражениями (14), $\omega_{1,2} = \omega - Mk_{1,2}$. В частности, если $\omega = 0$, то $k_{1,2} = \mp l / \sqrt{M^2 - 1}$, $\omega_{1,2} = -Mk_{1,2}$, и решение для стационарного движущегося источника

$$p_n = -\frac{M \cos(l y)}{\sqrt{M^2 - 1}} \begin{cases} 0, & x - Mt > 0, \\ \cos k_2(x - Mt), & x - Mt < 0. \end{cases} \quad (23)$$

Согласно (22), (23) до прихода источника возмущение давление отсутствует, а после его прохождения возникает незатухающий волновой шлейф (рис. 3б). Такая ситуация типична для решений ряда других волновых задач,

в частности задачи о корабельных волнах или задачи о волновом следе за движущимся ураганом [12, 15].

Подчеркнем, что рассмотренные три типа решений получены для фиксированной вертикальной моды. В общей ситуации будет иметь место суперпозиция вкладов от различных вертикальных мод, приводящая к сложной картине наблюдаемых вариаций приземного давления.

Приведем некоторую численную оценку интенсивности источника тепла $Q_* = q_* / c_p T$, считая, что этот источник обусловлен выделением скрытой теплоты конденсации. Согласно [18], при грозе выпадает 10 мм/ч осадков или 10 л/ч на один квадратный метр. При этом выделяется энергия тепла конденсации 0.5×10^4 Вт/м². Если считать, что выделение происходит в столбе высотой 2 км и бесконечной полосе шириной 1 км (дельта функция), то на единицу массы и длины приходится энергия $q_* \sim 2.5 \times 10^3$ Вт \times м/кг. Отсюда интенсивность источника $Q_* \sim q_* / c_p T \sim 10^{-2}$ м/с. Используя это значение можно оценить масштаб возмущения давления (нормированного на среднюю плотность) $p_* = (g/N)Q_* \sim 10$ м²/с². С учетом значения плотности воздуха, масштаб самого возмущения давления $p_* \sim 10$ Па. Для решения (17) данное значение надо умножить на число Маха, так что при $M = 0.2$ возмущение давления порядка двух паскалей. Отметим, что данная оценка носит грубый характер; в измерениях [6] наблюдались максимальные значения до 50 Па.

ДВИЖЕНИЕ ИСТОЧНИКА В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ АТМОСФЕРЕ

Рассмотрим теперь задачу о возмущениях давления, возбуждаемых источником, движущимся в полубесконечной атмосфере $z > 0$. Принципиально новая особенность этой задачи связана с возможностью излучения волн, уносящих энергию на бесконечность.

Описание возмущений давления будем проводить в рамках уравнения (5) с источником

$$Q = Q_* \cos(l_* y) e^{-z/H} e^{i\omega_* t} \delta(x - ut). \quad (24)$$

Данный источник локализован у поверхности на вертикальном масштабе H . Принимая этот масштаб в качестве масштаба координат, используя в качестве масштаба времени и давления соответственно N^{-1} и $(g/N)Q_*$, после перехо-

да в движущуюся с источником систему координат, из (5) получим уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - M \frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \Delta_2 p = -e^{-z} \cos(\omega t) \left(\frac{\partial}{\partial t} - M \frac{\partial}{\partial x_1}\right) e^{i\omega t} \delta(x_1). \quad (25)$$

Здесь ω , l — безразмерная частота и волновое число источника. Число Маха M теперь определено выражением $M = u/NH$. К уравнению (25) присоединяется условие (4) (безразмерная форма) на нижней границе $z = 0$, записанное в движущейся системе координат.

Представляя $p = \cos(\omega t) e^{i\omega t} F(x, z)$, для амплитудной функции $F(x, z)$ из (25) получим уравнение

$$\left(i\omega - M \frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} - l^2 F = -e^{-z} \left(i\omega - M \frac{\partial}{\partial x_1}\right) \delta(x_1), \quad (26)$$

с краевым условием

$$z = 0: \quad \left(i\omega - M \frac{\partial}{\partial x_1}\right) \frac{\partial F}{\partial z} = \delta(x_1), \quad (27)$$

следующим из условия (4). С учетом (26), (27) функцию $F(x, z)$ можно представить суммой вынужденного компонента F_s и волнового компонента F_w . Здесь вынужденный компонент есть частное решение неоднородного уравнения (26). Волновой компонент удовлетворяет однородному уравнению (26) с условием

$$z = 0: \quad \left(i\omega - M \frac{\partial}{\partial x_1}\right) \frac{\partial F_w}{\partial z} = - \left(i\omega - M \frac{\partial}{\partial x_1}\right) \frac{\partial F_s}{\partial z} + \delta(x_1). \quad (28)$$

Указанное разделение на компоненты справедливо и для возмущения давления.

Для нахождения двух компонентов используем преобразование Фурье по горизонтальной координате x_1 . Фурье образ $\tilde{F}(k, z)$ удовлетворяет уравнению

$$(\omega - Mk)^2 \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial z^2} + (k^2 + l^2) \tilde{F} = \frac{ie^{-z}(\omega - Mk)}{2\pi}, \quad (29)$$

и представляется в виде $\tilde{F} = \tilde{F}_s + \tilde{F}_w$. Для частного решения \tilde{F}_s из (29) следует

$$\tilde{F}_s = \frac{ie^{-z}(\omega - Mk)}{2\pi f(k)}, \quad (30)$$

$$f(k) = (k^2 + l^2) + (\omega - Mk)^2.$$

С учетом (30), обратное преобразование Фурье есть сумма вычетов в полюсах k_1, k_2 — корнях квадратного уравнения $f(k) = 0$,

$$k_{1,2} = \frac{\omega M \pm i\sqrt{D}}{1 + M^2}, \quad D = \omega^2 + (1 + M^2)l^2. \quad (31)$$

Обратим внимание, что в отличие от предыдущей задачи с вертикальными модами, полюса (31) образуют комплексную пару для любых значений частоты колебаний источника и любых значениях числа Маха. Это приводит к единой форме сигнала без разделения на отдельные случаи.

Выполнив обратное образование, после перехода в неподвижную систему координат для вынужденного компонента возмущения давления получим

$$p_s = \frac{M}{2(1 + M^2)} \cos(\omega t) e^{-z} e^{-a|x - Mt|} \times (\operatorname{sgn}(x - Mt) \cos \theta - \alpha \sin \theta), \quad (32)$$

где $a = \sqrt{D} / (1 + M^2)$, $\alpha = \omega / M\sqrt{D}$. Волновая фаза определена как $\theta = k_s x + \omega_s t$, $k_s = \omega M / (1 + M^2)$, $\omega_s = \omega - Mk_s = \omega / (1 + M^2)$. Для распределения давления на поверхности $z = 0$ выражение (32) подобно (17) с той разницей, что теперь во всех выражениях вместо $1 - M^2$ стоит $1 + M^2$. Наблюдаемая частота ω_s при этом всегда меньше частоты колебаний источника ω . Если $\omega = 0$ (стационарный источник) решение (32) описывает «грозовой нос»

$$p_s = \frac{M}{2(1 + M^2)} \cos(\omega t) e^{-z} e^{-a|x - Mt|} \operatorname{sgn}(x - Mt),$$

с величиной скачка приземного давления $\Delta p_s = M / (1 + M^2)$. Интересно отметить немонотонную зависимость скачка от числа Маха — скачок достигает максимума при $M = 1$.

Зависимости возмущений приземного давления от времени, отвечающие решению (32) при $\omega \neq 0$, качественно подобны представленным на рис. 2. Как и для решения (17), имеет место модулированный по амплитуде осциллирующий сигнал с волновыми предвестниками. Важно подчеркнуть, что для вынужденного компонента в модели полубесконечной атмосферы этот сигнал реализуется всегда, т.е. является универсальным.

При нахождении волнового компонента решения для простоты ограничимся рассмотрением случая стационарного источника $\omega = 0$ и ситуации $l = 0$ с (источник не зависит от координаты y). С учетом (29) Фурье образ \tilde{F}_w амплитудной функции удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \tilde{F}_w}{\partial z^2} + m^2 \tilde{F}_w = 0, \quad m = M^{-1}, \quad (33)$$

с краевым условием $\partial \tilde{F}_w / \partial z = (M(1 + M^2))^{-1} (i / 2\pi k)$ при $z = 0$. Здесь учтено выражение для \tilde{F}_s (30). Независимые решения уравнения (33) $\tilde{F}_w = Ce^{\pm imz}$ ограничены при всех значениях z . Для выделения однозначного решения, как и в аналогичных задачах теории волн [15], используем условие излучения — поток волновой энергии должен быть положительным при $z \rightarrow \infty$. Можно показать, что это условие выполняется только для решения $\tilde{F}_w = Ce^{-imz}$. Определяя константу C из условия на нижней границе, найдем $\tilde{F}_w = -(1 + M^2)^{-1} e^{-imz} (1 / 2\pi k)$. С учетом формулы $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx_1} dk}{2\pi k} = \frac{i}{2} \text{sgn}(x_1)$, после обращения интеграла Фурье и перехода в неподвижную систему координат, для волнового компонента возмущения давления получим

$$p_w = -\frac{\sin(mz)}{2(1 + M^2)} \text{sgn}(x - Mt). \quad (34)$$

Согласно (34) $p_w = 0$ при $z = 0$. Волновой компонент, таким образом, не дает вклада в возмущение приземного давления. Это возмущение определяется только вынужденным компонентом (32). Подчеркнем, что данный результат получен в рамках гидростатического приближения.

КАЧЕСТВЕННОЕ СОПОСТАВЛЕНИЕ С РЕЗУЛЬТАТАМИ ИЗМЕРЕНИЙ

Систематические наблюдения флуктуаций атмосферного давления и ВГВ с периодами от 30 мин до нескольких часов проводятся в ИФА им. А.М. Обухова РАН [9, 10]. Для определения скоростей волн организованы три пункта наблюдения в районе Звенигородской станции ИФА. Эти пункты разнесены на расстояния около 4 км и оборудованы специальными жидкостными микробарографами. Они позволяют регистрировать флуктуации атмосферно-

го давления с периодами от нескольких секунд до пяти и более часов с предельной чувствительностью не хуже 0.5 Па. Результаты измерений и их анализ для случаев прохождения гроз и атмосферных фронтов представлены в [6–8]. Развита в работе теоретическая модель на качественном уровне описывает следующие особенности наблюдаемых флуктуаций приземного давления.

1. Согласно [7], за 2–3 ч до момента прихода грозового очага наблюдаются волновые предвестники с амплитудами около 20 Па и скоростью распространения около 50 м/с. В рамках модели, существование предвестников объясняется амплитудной модуляцией сигнала от пульсирующего теплового источника в атмосферном волноводе. Поскольку амплитуда экспоненциально затухает с удалением от источника, надежная регистрация предвестников возможна только непосредственно перед приходом источника. Как и по данным измерений, фазовая скорость распространения предвестников в модели существенно превосходит скорость источника (грозового очага).

2. Согласно [8], при прохождении грозового очага над пунктом наблюдения характер колебаний давления меняется от меньших периодов к большим. Это приводит к парному появлению максимумов на рассчитанных в [8] спектрах колебаний — вслед за максимумом меньшего периода появляется максимум с большим периодом. В рамках модели данная особенность объясняется реализацией случая частотной модуляции сигнала доплеровского типа.

3. Согласно [7], характерной особенностью основного сигнала от грозового очага является амплитуда колебаний 150–200 Па, а также его форма. Сначала регистрируется понижение давления на протяжении 60–90 мин, затем резкий максимум длительностью 20–30 мин — «грозовой нос», после чего наблюдается чередование максимумов минимумов давления. Согласно модели, «грозовой нос» с выраженным максимумом и минимумом имеет место в случае стационарного движущегося источника. Он представляет собой структуру типа N -волны и обусловлен локальным распределением источника. В случае осциллирующего источника эта структура искажается — области с положительными и отрицательными фазами могут быть расположены несимметрично относительно источника. Примеры несимметричных сигналов, наблюдаемых при прохождении гроз над пунктом наблюдения, представлены на рис. 4.

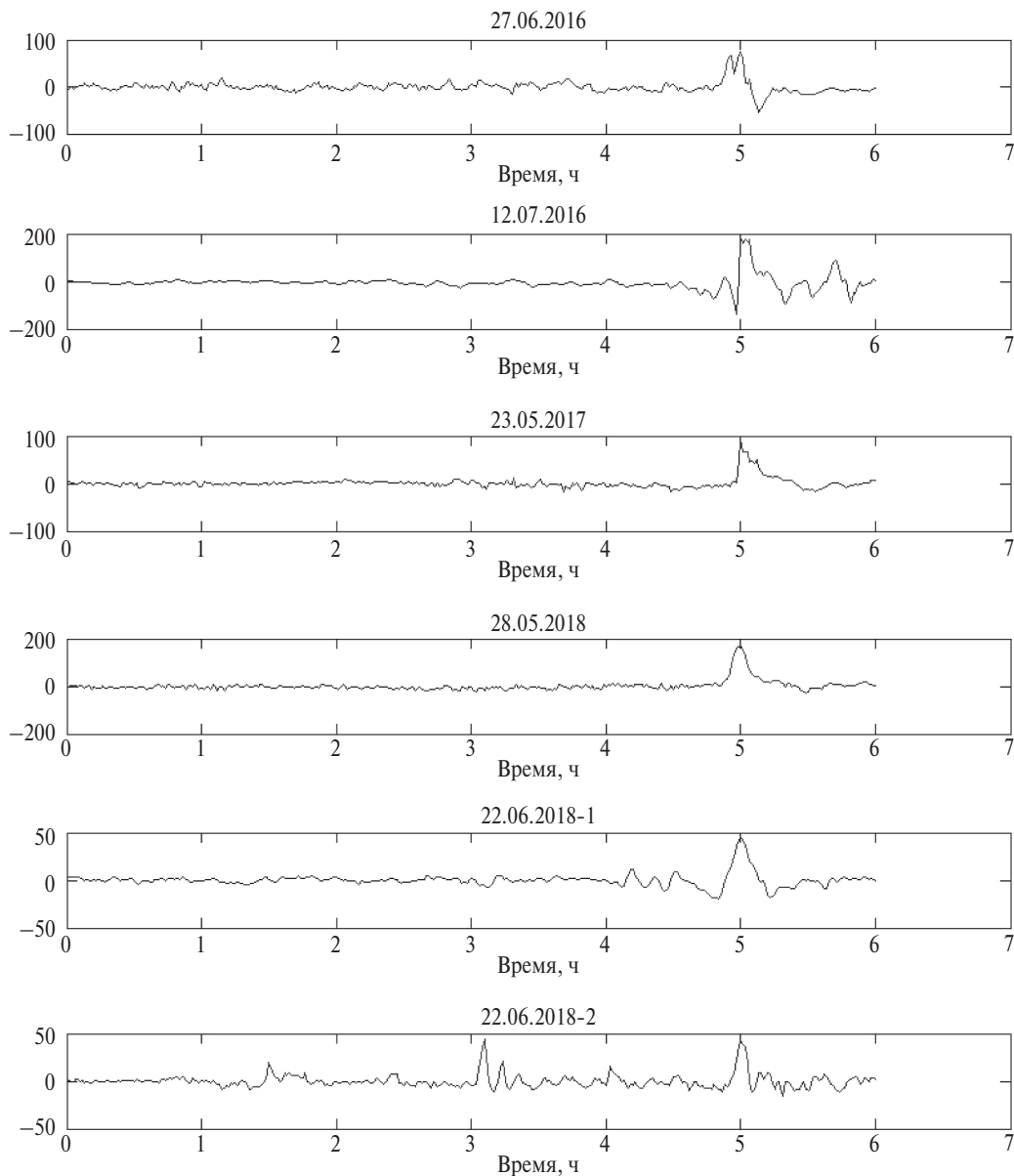


Рис. 4. Примеры регистрируемых вариаций приземного давления при прохождении грозových очагов. По вертикальной оси стоят значения давления в паскалях.

Отметим, что чередование максимумов и минимумов давления после прохождения источника объяснялось в [7] наличием нескольких конвективных ячеек в грозовом очаге. Еще одно возможное объяснение связано с реализацией модельного третьего случая из раздела 3 — возникновением волнового шлейфа сразу после прохождения локализованного источника.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

К настоящему времени накоплен обширный архив измерений вариаций приземного давле-

ния (сигналов), связанных с опасными метеорологическими явлениями конвективной природы. Вместе с тем теоретические исследования вариаций практически отсутствуют. Основное внимание в существующих работах уделяется изучению различных механизмов генерации волновых сигналов [19, 20]. В настоящей работе сделана попытка теоретического описания вариаций в рамках задачи о ВГВ, возбуждаемых движущимся нестационарным источником фронтального типа (локализованным по одной горизонтальной координате). Установлено, что, при движении источника в атмосферном волноводе,

каждой возбуждаемой вертикальной моде ВГВ отвечает три типа возможного временного хода вариаций давления в фиксированной точке наблюдения — соответственно с амплитудной и частотной модуляцией сигнала и возникновением сигнала только после прохождения источника. С учетом этих трех типов, суперпозиция вкладов от различных мод может приводить к формированию сигнала достаточно сложной структуры. Еще более сложная структура наблюдается в измерениях, где наблюдаемые сигналы содержат вклады от различных типов волн, подвержены влиянию турбулентности, орографии, сдвига скорости и т.д. Не исключено, что калейдоскоп наблюдаемых сигналов (после их специальной обработки) можно будет согласовать с теоретическими построениями в количественном плане, однако это задача не очень близкой перспективы.

В заключение, подчеркнем, что теоретические построения данной работы выполнены в рамках длинноволнового (гидростатического) приближения. Результаты, полученные с отказом от этого приближения, будут представлены в последующих публикациях.

Благодарности. Авторы благодарят Л.Х. Ингеля за полезные обсуждения.

Источник финансирования. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, проект № 18-05-00576 (разделы 2, 5), Программы Президиума РАН — № 56 (разделы 3, 4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Georges T.H.* Infrasound from convective storms // *Rev. Geophys. Space Phys.* 1973. V. 11. № 3. P. 571–593.
2. Природные опасности России. Т. 5. Гидрометеорологические опасности. Под ред. Г.С. Голицына и А.А. Васильева. М.: Крук, 2001. 296 с.
3. *Fritts D.C., Alexander M.J.* Gravity wave dynamics and effects in the middle atmosphere // *Reviews of Geophysics.* 2003. V. 41. № 1. P. 1–64.
4. *Schechter D.A., Nicholls M., Persing J., Bedard A.J., Pielke R.A.* Infrasound emitted by tornado-like vortices: basic theory and a numerical comparison to the acoustic radiation of a single-cell thunderstorm // *J. Atmos. Sci.* 2008. V. 65. P. 685–713
5. *Plougonven R., Zhang F.* Internal gravity waves from atmospheric jets and fronts // *Rev. Geophys.* 2014. V. 52. P. 33–76.
6. *Куличков С.Н., Данилов С.Д., Грачев А.И., Отрезов А.И., Свертилов А.И., Чунчузов И.П.* Акустико-гравитационные волны от атмосферных штормов // Препринт Института физики атмосферы АН СССР. М. 1992. 87 с.
7. *Грачев А.И., Данилов С.Д., Куличков С.Н., Свертилов А.И.* Основные характеристики внутренних гравитационных волн в нижней атмосфере от конвективных штормов // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана.* 1994. Т. 10. № 6. С. 759–767.
8. *Грачев А.И., Куличков С.Н., Отрезов А.И.* Свойства спектров внутренних гравитационных волн во время гроз // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана.* 1997. Т. 33. № 5. С. 631–639.
9. *Куличков С.Н., Чунчузов И.П., Попов О.Е., Перепелкин В.Г., Голицына Е.В., Буш Г.А., Репина И.А., Цыбульская Н.Д., Горчаков Г.И., Чхетиани О.Г.* Влияние внутренних гравитационных волн на концентрацию примесей во время урагана в Москве 29 мая 2017 года // *Турбулентность, динамика атмосферы и климата под ред. Голицына Г.С., Мохова И.И., Куличкова С.Н., Чхетиани О.Г., Репиной И.А.* М.: Физматкнига, 2018. С. 541–550.
10. *Куличков С.Н., Цыбульская Н.Д., Чунчузов И.П., Гордин В.А., Быков Ф.Л., Чуликов А.И., Перепелкин В.Г., Буш Г.А., Голицына Е.В.* Некоторые результаты регистрации внутренних гравитационных волн от атмосферных фронтов в московском регионе // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана.* 2017. Т. 53. № 4. С. 455–469.
11. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
12. *Свиркунов П.Н., Калашник М.В.* Фазовые картины диспергирующих волн от движущихся локализованных источников // *Успехи физических наук.* 2014. Т. 184. № 1. С. 89–100.
13. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В.* Волны в стратифицированных средах. М.: Наука, 2015. 735 с.
14. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В.* Внутренние гравитационные волны, возбуждаемые пульсирующим источником возмущений // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа.* 2015. № 6. С. 26–34.
15. *Гилл А.* Динамика атмосферы и океана. М.: Мир, 1986. Т. 2. 415 с.
16. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.
17. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.
18. *Матвеев Л.Т.* Курс общей метеорологии. Физика атмосферы. Л.: Гидрометеоздат, 1984. 752 с.
19. *Романова Н.Н., Якушкин И.Г.* Внутренние гравитационные волны в атмосфере и источники их генерации (обзор) // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана.* 1995. Т. 31. № 2. С. 163–187.
20. *Kalashnik M.V., Chkhetiani O.G.* Generation of gravity waves by singular potential-vorticity disturbances in shear flows // *J. Atmos. Sci.* 2017. V. 74. P. 293–307.

On Pressure Perturbations Caused by a Moving Heat Source of the Frontal Type (Hydrostatic Mode)

M. V. Kalashnik^{1, 3, *}, S. N. Kulichkov^{1, 2, **}

¹*Obukhov Institute of Atmospheric Physics, Russian Academy of Science
Pyzhevsky Avenue, 3, Moscow, 119017, Russia*

²*Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics
Leninskiye gory, d. 1, str. 2, Moscow, 119991, Russia*

³*Schmidt Institute of Physics of the Earth, Russian Academy of Sciences
B. Gruzinskaya Str., 10, building 1, Moscow, 123242, Russia
e-mail: *kalashnik-obn@mail.ru, **snik1953@gmail.com*

Received: 20.02.2019

Accepted: 29.05.2019

The problem of perturbations of the surface pressure caused by a moving nonstationary frontal heat source (localized along one horizontal coordinate) is considered. Pressure disturbances are associated with internal gravity waves (IGWs). It is shown that when a source moves in a finite-height atmospheric layer (atmospheric waveguide) when a discrete set of vertical IGW modes is excited, there are three types of temporal variation of surface pressure at a fixed observation point. These types correspond respectively to the time signal with amplitude modulation, the signal with frequency modulated Doppler type and the signal that occurs only after passing through the source. Each type is implemented for specific values of the oscillation frequency of the source and the Mach number (the ratio of the speed of the source to the phase velocity of the IGW). At Mach numbers less than one, an oscillating source always excites wave precursors – disturbances observed before the source arrives. The movement of the source in a semi-infinite atmosphere leads to additional excitation of waves that transfer energy to the upper layers of the atmosphere.

Keywords: internal gravity waves, moving heat source, wave equation, Mach number, variations in surface pressure, wave precursors, amplitude and frequency modulation of the signal.