

УДК 551.465

## ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ МОДЕЛИ ЦИРКУЛЯЦИИ ОКЕАНА К $k$ -ОМЕГА ПАРАМЕТРИЗАЦИИ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

© 2019 г. В. Б. Залесный, С. Н. Мошонкин

*Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука РАН*

*119991, Москва, ул. Губкина, 8*

*E-mail: atarexm@himki.net*

Поступила в редакцию 19.03.2019 г.

Принята к печати 29.05.2019 г.

Развивается модель общей циркуляции океана (МОЦО) ИВМ РАН с встроенной в нее  $k$ -омега моделью вертикального турбулентного обмена на основе уравнений для кинетической энергии турбулентности  $k$  и частоты диссипации энергии омега. От частот плавучести и сдвига скорости, рассчитываемых в МОЦО, зависит решение  $k$ -омега модели; а от  $k$  и омега — коэффициенты вертикальной турбулентности. Численные алгоритмы обеих моделей основаны на методе расщепления по физическим процессам. Уравнения  $k$ -омега модели расщепляются на два этапа, описывающих трехмерный перенос-диффузию кинетической энергии турбулентности  $k$  и частоты омега и их локальную генерацию-диссипацию. Возникающая на втором этапе система обыкновенных дифференциальных уравнений решается аналитически, что обеспечивает экономичность алгоритма. Выписывается также аналитическое решение уравнения для коэффициента вертикальной турбулентности. Модель применяется для изучения чувствительности модельной циркуляции Северной Атлантики — Северного Ледовитого океана к вариациям параметров вертикальной турбулентности. Эксперименты показывают, что, варьируя коэффициенты аналитического решения  $k$ -омега модели, можно повысить адекватность моделирования. Дано предварительное сравнение особенностей  $k$ -омега и  $k$ -эпсилон моделей турбулентности при использовании метода расщепления в случае применения их в МОЦО.

**Ключевые слова:** циркуляция океана,  $k$ -омега модель, метод расщепления, вертикальный турбулентный обмен, Северная Атлантика.

**DOI:** <https://doi.org/10.31857/S0002-3515555103-113>

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время интенсивно развиваются численные модели общей циркуляции океана (МОЦО), основанные на примитивных уравнениях. Модели применяются для изучения изменчивости климатической структуры гидрофизических полей и для их гидродинамического прогноза. Кардинальными направлениями повышения адекватности моделей являются три: увеличение пространственного разрешения, улучшение физических параметризаций и ассимиляция данных наблюдений [1–4]. В этой работе мы описываем раз-

витие МОЦО ИВМ РАН по пути усовершенствования параметризации вертикального турбулентного обмена.

Модель представлена в эволюционной форме, а алгоритм ее решения основан на методе многокомпонентного расщепления [1, 2]. Основным является расщепление по физическим процессам — это внешний контур расщепления модели [1, 2]. Решение новой модельной параметризации также проводится в рамках метода расщепления. Встраиваемая в МОЦО новая подсистема записывается в эволюционной форме, а ее оператор представляется в виде суммы подоператоров более простой структуры [1, 2].

Этому условию удовлетворяет рассматриваемая в работе  $k-\omega$  модель вертикальной турбулентности.

Важным фактором развития МОЦО является улучшение физического описания вертикального турбулентного обмена импульсом, теплом и солью. По сравнению с крупномасштабной циркуляцией пространственно-временные масштабы вертикального турбулентного обмена значительно меньше: порядка 1–10 км по горизонтали, 1–10 м по вертикали и от минут до нескольких часов по времени. В рамках традиционной модели, основанной на «примитивных» уравнениях, это — подсчетный процесс, подлежащий параметризации. Параметризация подсчетных процессов остается одной из актуальнейших задач моделирования и прогноза гидрофизических и метеорологических полей [4–14].

Часто турбулентное перемешивание описывают в МОЦО оператором второго порядка, с коэффициентами турбулентного обмена импульсом  $v_u$ , теплом  $v_T$  и солью  $v_S$  [1–5]. Для определения коэффициентов обмена используются модели, основанные на двух уравнениях [7]. Первое уравнение описывает поведение кинетической энергии турбулентности  $k$  (КЭТ). Второе уравнение записывается либо для масштаба турбулентности  $l$  ( $k-kl$ -замыкание), либо для скорости удельной диссипации КЭТ  $\varepsilon$  ( $k-\varepsilon$ -замыкание), либо для частоты  $\omega$  ( $k-\omega$ -замыкание). Характеристики  $l$ ,  $\varepsilon$ ,  $\omega$  связаны алгебраическими соотношениями. Эти модели описывают развитую турбулентность и разделяют слои с развитой и слабо развитой перемежающейся турбулентностью. Перемешивание в слоях слабо развитой турбулентности осуществляется за счет двойной диффузии, разрушения внутренних и приливных волн и других эффектов [8, 9].

В данной работе развивается эффективный алгоритм решения  $k-\omega$  уравнений турбулентности, встроенных в МОЦО. Уравнения МОЦО и  $k-\omega$  модели решаются с помощью единого метода многокомпонентного расщепления. Основным или внешним циклом является расщепление по физическим процессам. Выбор  $k-\omega$  модели турбулентности обусловлен наличием в ее численном решении эффективного аналитического алгоритма на втором этапе расщепления. Цель данной работы — описать детали алгоритма и результаты его использования для повышения адекватности моделирования крупномасштабных полей

Северной Атлантики и Северного Ледовитого океана.

## 2. ОСОБЕННОСТИ $k-\omega$ МОДЕЛИ И МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТУРБУЛЕНТНОГО ОБМЕНА

Сравним особенности часто используемой для параметризации вертикального турбулентного обмена  $k-\varepsilon$  модели [7, 9], с особенностями  $k-\omega$  модели. Первая основана на системе двух уравнений для кинетической энергии турбулентности (КЭТ)  $k$  и ее диссипации  $\varepsilon$ . Вторая — на уравнениях для КЭТ и ее частоты диссипации  $\omega$ . Запишем уравнения  $k-\varepsilon$  и  $k-\omega$  моделей в  $\sigma$ -системе координат [7] (предполагая  $k \neq 0$ ,  $\varepsilon \neq 0$ ):

$$\begin{cases} \frac{dk}{dt} - \frac{1}{H^2} \frac{\partial v_u}{\partial \sigma} \frac{\partial k}{\partial \sigma} - \Lambda k = v_u G^2 - v_p N^2 - \varepsilon \\ \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{1}{H^2} \frac{\partial v_u}{\partial \sigma} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma} - \Lambda \varepsilon = \left[ c_1^\varepsilon v_u G^2 - c_3^\varepsilon v_p N^2 - c_2^\varepsilon \varepsilon \right] \frac{\varepsilon}{k} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{dk}{dt} - \frac{1}{H^2} \frac{\partial v_u}{\partial \sigma} \frac{\partial k}{\partial \sigma} - \Lambda k = \\ = v_u G^2 - v_p N^2 - (c_s^0)^4 \omega k \\ \frac{d\omega}{dt} - \frac{1}{H^2} \frac{\partial v_u}{\partial \sigma} \frac{\partial \omega}{\partial \sigma} - \Lambda \omega = \\ = \left[ c_1^\omega v_u G^2 - c_3^\omega v_p N^2 - c_2^\omega (c_s^0)^4 k \omega \right] \frac{\omega}{k}. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь  $\sigma = (Z - \zeta) / (H - \zeta)$ ,  $Z$ ,  $\zeta$ ,  $H$  — геопотенциальная вертикальная координата, уровень и глубина океана;  $G$ ,  $N$  — частоты сдвига скорости и плавучести, рассчитываемые в МОЦО ( $N^2 > 0$  соответствует устойчивой стратификации)

$$G^2 = \left( \frac{1}{H} \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right)^2 + \left( \frac{1}{H} \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right)^2,$$

$$N^2 = \frac{g}{H \rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial \sigma};$$

$\Lambda$  — оператор горизонтальной диффузии,  $v_p$  — коэффициент вертикального турбулентного обмена потенциальной плотностью;  $\sigma_k$ ,  $\sigma_\varepsilon$ ,  $\sigma_\omega$  — безразмерные турбулентные числа Шмидта для  $k$ ,  $\varepsilon$  и  $\omega$ .

Для функций и параметров моделей турбулентности выполняются соотношения:

$$\varepsilon = (c_s^0)^3 \frac{k^{3/2}}{l}, \quad \omega = \frac{\varepsilon}{(c_s^0)^4 k}, \quad l = \frac{k^{1/2}}{c_s^0 \omega},$$

$$v_\rho \equiv v_T \equiv v_s = \frac{v_u}{Pr}, \quad Pr = \frac{c_s^u}{c_s^T},$$

$$v_u = (c_s^0)^3 c_s^u \frac{k^2}{\varepsilon} \equiv \frac{c_s^u}{c_s^0} \frac{k}{\omega}, \quad v_\rho = (c_s^0)^3 c_s^\rho \frac{k^2}{\varepsilon} \equiv \frac{c_s^T}{c_s^0} \frac{k}{\omega},$$

$$\sigma_k \equiv \sigma_\varepsilon \equiv \sigma_\omega = 2.0, \quad (3)$$

где  $l$  — характерный масштаб турбулентных возмущений,  $c_s^u, c_s^\rho = c_s^T$  — безразмерные функции устойчивости для вектора и скаляра. Значения параметров  $c_s^0, c_1^\varepsilon, c_2^\varepsilon, c_3^\varepsilon, c_1^\omega, c_2^\omega, c_3^\omega$  можно найти в [7]:

$$c_s^0 \approx 0.5544, \quad c_1^\omega = 0.555, \quad c_2^\omega = 0.833,$$

$$c_3^\omega = \begin{cases} -0.6, & N^2 > 0 \\ 1, & N^2 \leq 0, \end{cases}$$

$$c_1^\varepsilon = 1.44, \quad c_2^\varepsilon = 1.92, \quad c_3^\varepsilon = \begin{cases} -0.4, & N^2 > 0 \\ 1.0, & N^2 \leq 0. \end{cases} \quad (4)$$

К (1)–(2) присоединяются соответствующие граничные и начальные условия [13].

Учитывая (3), системы (1), (2) можно переписать в виде

$$\begin{cases} \frac{dk}{dt} - \frac{1}{H^2} \frac{\partial v_u}{\partial \sigma} \frac{\partial k}{\partial \sigma} - \Lambda k = \\ = (c_s^0)^3 c_s^u (G^2 - N^2 / Pr) \frac{k^2}{\varepsilon} - \varepsilon \\ \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{1}{H^2} \frac{\partial v_u}{\partial \sigma} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma} - \Lambda \varepsilon = \\ = (c_s^0)^3 c_s^u (c_1^\varepsilon G^2 - c_3^\varepsilon N^2 / Pr) k - c_2^\varepsilon \frac{\varepsilon^2}{k} \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \frac{dk}{dt} - \frac{1}{H^2} \frac{\partial v_u}{\partial \sigma} \frac{\partial k}{\partial \sigma} - \Lambda k = \\ = \left[ \frac{c_s^u}{c_s^0} (G^2 - N^2 / Pr) \frac{1}{\omega} - (c_s^0)^4 \omega \right] k \\ \frac{d\omega}{dt} - \frac{1}{H^2} \frac{\partial v_u}{\partial \sigma} \frac{\partial \omega}{\partial \sigma} - \Lambda \omega = \\ = \frac{c_s^u}{c_s^0} (c_1^\omega G^2 - c_3^\omega N^2 / Pr) - c_2^\omega (c_s^0)^4 \omega^2. \end{cases} \quad (6)$$

Видно, что в отличие от  $k$ - $\varepsilon$ , система  $k$ - $\omega$  уравнений (6) имеет более простой вид, поскольку уравнение для  $\omega$  не зависит от  $k$ !

Применим к (5), (6) метод расщепления по физическим процессам. Процедуру решения уравнений расщепим на два этапа, описывающих процессы переноса–диффузии и генерации–диссипации. На каждом этапе по времени  $t^j < t < t^{j+1}$  решаются более простые расщепленные подсистемы, полученное на текущем этапе решение используется в качестве начального условия на последующем этапе.

Процессы переноса–диффузии и генерации–диссипации имеют разные характерные времена. Перенос–диффузия — медленная трехмерная эволюция полей  $k, \varepsilon, \omega$ , аналогичная эволюции фоновых полей МОЦО. Генерация–диссипация — быстрый локальный по пространству процесс, описывающий динамику турбулентных возмущений.

На этапе трехмерного переноса–диффузии имеем:

$$\begin{aligned} \frac{dk}{dt} &= \frac{1}{H^2} \frac{\partial v_u}{\partial \sigma} \frac{\partial k}{\partial \sigma} + \Lambda k, \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{1}{H^2} \frac{\partial v_u}{\partial \sigma} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma} + \Lambda \varepsilon, \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{1}{H^2} \frac{\partial v_u}{\partial \sigma} \frac{\partial \omega}{\partial \sigma} + \Lambda \omega. \end{aligned} \quad (7)$$

На верхней границе океана, при  $\sigma = 0$ , поставим условия:

$$\begin{aligned} \frac{v_u}{\sigma_k} \frac{1}{H} \frac{\partial k}{\partial \sigma} &= -c_g (u_*^s)^3, \quad \frac{v_u}{\sigma_\varepsilon} \frac{1}{H} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma} = Q_\varepsilon^0, \\ \frac{v_u}{\sigma_\omega} \frac{1}{H} \frac{\partial \omega}{\partial \sigma} &= Q_\omega^0, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $u_*^s$  — скорость трения в воде у поверхности океана,  $c_g$  — безразмерный параметр, зависящий от ветра и волн (параметр ветровой генерации):  $c_g \approx 10$  [11] или  $c_g \approx 40$  [12],  $Q_\varepsilon^0, Q_\omega^0$  — «потоки диссипации и частоты диссипации» на поверхности. Об одном способе задания «потока диссипации» дана информация на с. 22–23 работы [18]. В экспериментах далее мы полагали  $Q_\omega^0 = 0$ .

На дне океана, при  $\sigma = 1$ , поставим условия отсутствия потоков  $k, \varepsilon$  и  $\omega$  по нормали.

На этапе генерации–диссипации имеем уравнения:

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \left[ (c_s^0)^3 c_s^u \left( G^2 - \frac{N^2}{Pr} \right) \frac{k}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{k} \right] k, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \left[ (c_s^0)^3 c_s^u \left( c_1^\varepsilon G^2 - c_3^\varepsilon \frac{N^2}{\text{Pr}} \right) \frac{k}{\varepsilon} - c_2^\varepsilon \frac{\varepsilon}{k} \right] \varepsilon, \quad (10)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \left[ \frac{c_s^u}{c_s^0} \left( G^2 - \frac{N^2}{\text{Pr}} \right) \frac{1}{\omega} - (c_s^0)^4 \omega \right] k, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \left[ \frac{c_s^u}{c_s^0} \left( c_1^\omega G^2 - c_3^\omega \frac{N^2}{\text{Pr}} \right) \frac{1}{\omega} - c_2^\omega (c_s^0)^4 \omega \right] \omega. \quad (12)$$

### 3. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ $k-\omega$ МОДЕЛИ НА ЭТАПЕ ГЕНЕРАЦИИ–ДИССИПАЦИИ

Перепишем (11), (12) в виде

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \left( \frac{A}{\omega} - D\omega \right) k, \quad (13)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = B - C\omega^2, \quad (14)$$

$$A = \frac{c_s^u}{c_s^0} \left( G^2 - \frac{N^2}{\text{Pr}} \right) \equiv \frac{1}{c_s^0} (c_s^u G^2 - c_s^T N^2), \quad (15)$$

$$B = \frac{c_s^u}{c_s^0} \left( c_1^\omega G^2 - c_3^\omega \frac{N^2}{\text{Pr}} \right) \equiv \frac{1}{c_s^0} (c_1^\omega c_s^u G^2 - c_3^\omega c_s^T N^2), \quad (16)$$

$$C = c_2^\omega (c_s^0)^4, \quad D = (c_s^0)^4. \quad (17)$$

Отметим, что  $B > 0$ ,  $C > 0$ ,  $D > 0$ , в то время как  $A$  может менять знак. Предположим, что  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  не зависят от времени на временном шаге модели. Тогда, поскольку уравнение для  $\omega$  не зависит от  $k$ , его несложно решить аналитически, а затем найти из (13)  $k$ . Аналитическое решение (14), (13) имеет вид:

$$\omega = \sqrt{\frac{B}{C}} \frac{E_1}{E_2},$$

$$k = k^0 \left( \frac{E_1}{E_2} \right)^{A/B} \left( \frac{E_3}{E_4} \right)^{D/C},$$

или

$$\omega = \sqrt{\frac{B}{C}} \frac{(\omega^0 / \sqrt{B/C}) \text{ch}(\sqrt{BC} t) + \text{sh}(\sqrt{BC} t)}{(\omega^0 / \sqrt{B/C}) \text{sh}(\sqrt{BC} t) + \text{ch}(\sqrt{BC} t)} \quad (18)$$

$$k = k^0 \frac{\left[ \text{ch}(\sqrt{BC} t) + (\sqrt{B/C} / \omega^0) \text{sh}(\sqrt{BC} t) \right]^{A/B}}{\left[ \text{ch}(\sqrt{BC} t) + (\omega^0 / \sqrt{B/C}) \text{sh}(\sqrt{BC} t) \right]^{D/C}}. \quad (19)$$

Здесь

$$E_1 = a \exp(2\sqrt{BC} t) + b, \quad E_2 = 2\omega^0 \exp(\sqrt{BC} t), \\ E_3 = 2\sqrt{B/C} \exp(\sqrt{BC} t), \quad E_4 = a \exp(2\sqrt{BC} t) - b, \\ a = \omega^0 + \sqrt{B/C}, \quad b = \omega^0 - \sqrt{B/C},$$

$\omega^0$  и  $k^0$  — значения в начальный момент времени на этапе генерации–диссипации.

Отметим, что для коэффициентов  $A$ ,  $B$  с учетом (3) можно использовать две формы записи (см. (15), (16)):

$$A = (c_s^u G^2 - c_s^T N^2) / c_s^0, \\ B = (c_1^\omega c_s^u G^2 - c_3^\omega c_s^T N^2) / c_s^0. \quad (20)$$

или

$$A = c_s^u (G^2 - N^2 / \text{Pr}) / c_s^0, \\ B = c_s^u (c_1^\omega G^2 - c_3^\omega N^2 / \text{Pr}) / c_s^0. \quad (21)$$

Алгоритм, использующий аналитическое решение (18), (19), мы называем «алгоритмом расщепления турбулентности» (АРТ) [10, 13, 14].

Важными факторами повышения адекватности моделирования крупномасштабной циркуляции океана является подбор модельных параметров и использование в расчетах данных наблюдений. В наших работах [13, 14] изучена возможность повышения адекватности МОЦО с помощью учета в  $A$  и  $B$  данных наблюдений о среднегодовой климатической частоте плавучести. С этой точки зрения алгоритм является достаточно гибким. Во-первых, он позволяет варьировать  $A$  и  $B$ , изменяя функции устойчивости в (20) или число Прандтля в (21), сохраняя простоту и устойчивость вычислений. Во-вторых, — решать уравнения турбулентности с большим шагом по времени, равным шагу МОЦО. В-третьих, — алгоритм можно эффективно использовать при решении задач четырехмерной вариационной ассимиляции данных наблюдений [15, 16].

**Замечание 1.** Используя соотношение  $v_u = c_s^u / c_s^0 (k / \omega)$ , можно выписать аналитическое выражения для  $v_u$ . Из (13), (14) следует уравнение для  $v_u$

$$\frac{\partial v_u}{\partial t} = \left( \frac{A_1}{\omega} - D_1 \omega \right) v_u, \quad (22)$$

$$A_1 = c_s^u A - B / c_s^0, D_1 = c_s^u D - C / c_s^0. \quad (23)$$

Уравнение (22), с точностью до коэффициентов (23), совпадает с (13), и его решение имеет вид

$$v_u = v_u^0 \left( \frac{E_1}{E_2} \right)^{A_1/B} \left( \frac{E_3}{E_4} \right)^{D_1/C} \equiv v_u^0 \frac{\left[ ch(\sqrt{BC} t) + (\sqrt{B/C} / \omega^0) sh(\sqrt{BC} t) \right]^{A_1/B}}{\left[ ch(\sqrt{BC} t) + (\omega^0 / \sqrt{B/C}) sh(\sqrt{BC} t) \right]^{D_1/C}}. \quad (24)$$

**Замечание 2.** Из вида решений (18), (19), (24) следует, что функции  $\omega$ ,  $k$  и  $v_u$  на этапе генерации–диссипации остаются положительными. Аналитические решения для  $\omega$ ,  $k$  и  $v_u$  позволяют оценить их характерную изменчивость по времени. Например, переписывая (18), имеем:

$$\omega = \sqrt{\frac{B}{C}} \frac{\omega^0 / \sqrt{B/C} + th(\sqrt{BC} t)}{\omega^0 / \sqrt{B/C} th(\sqrt{BC} t) + 1}.$$

При  $t \rightarrow \infty$  функция  $th(\sqrt{BC} t) \rightarrow 1$ , а при  $\sqrt{BC} t = 2$  ее значение будет  $th(2) \approx 0.96$ . Отсюда характерную изменчивость  $\omega$ , или время стационарирования решения, можно оценить как

$$\tilde{t} \approx 2 / \sqrt{BC}.$$

Наши численные эксперименты показывают, что характерное время процессов вертикальной турбулентности в верхнем перемешанном слое Северной Атлантики в зимний период изменяется от 2–3 ч в тропической зоне до 1–2 мин в средних широтах.

#### 4. ПАРАМЕТРЫ МОДЕЛИ ОБЩЕЙ ЦИРКУЛЯЦИИ ОКЕАНА И $k$ - $\omega$ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ

Модель общей циркуляции океана ИВМ РАН формулируется в сигма-системе координат со свободной поверхностью [1, 2, 15]. Она основана на примитивных уравнениях, записанных в приближениях Буссинеска и гидростатики. Уравнения записываются в биполярной ортогональной системе координат на сфере, полюсы расположены на географическом экваторе в точках  $120^\circ$  з.д. и  $60^\circ$  в.д. [14]. Прогностическими

переменными модели являются горизонтальные скорости течения, высота уровня поверхности океана  $\zeta(x, y, t)$ , потенциальная температура и соленость. Морской лед рассчитывается по модели [17].

Система уравнений МОЦО расщепляется на две подсистемы: перенос–диффузия субстанций и адаптация полей течений и плотности. При решении подсистем переноса–диффузии и адаптации повторно применяется метод расщепления по физическим процессам и по отдельным пространственным координатам. Разностная аппроксимация модельных уравнений по пространству осуществляется на сетке «С». Процессы вертикального турбулентного обмена описываются в рамках «диффузионного» подхода, коэффициенты обмена рассчитываются с помощью встроенной  $k$ - $\omega$  модели. Более подробное описание МОЦО приводится в [2, 15].

Опишем основные модельные параметры. При вычислении коэффициентов вертикальной турбулентной вязкости и диффузии в МОЦО используются соотношения подобия:

$$v_u = \frac{c_s^u k}{c_s^0 \omega}, v_T = \frac{c_s^T k}{c_s^0 \omega}. \quad (25)$$

В слоях развитой турбулентности, где  $k > k_{\min} = 0.03 \text{ см}^2/\text{с}^2$  полагается  $v_s = v_T$  [18]. В слоях слабой турбулентности используются фоновые значения  $v_u = 1, v_s = v_T = 0.05 \text{ см}^2/\text{с}$ .

В численных экспериментах для МОЦО шаг по времени  $\tau_{\text{очт}}$  равняется 1 ч. На этапе переноса–диффузии уравнения  $k$ - $\omega$  модели также решаются с шагом по времени 1 ч. На этапе генерации–диссипации уравнения решаются с шагом  $\tau_T$ , который менялся в пределах  $1 \text{ мин} \leq \tau_T \leq 1 \text{ ч}$ .

Для задания коэффициентов  $A, B$  используются два подхода. В первом используем представление (21) и полагаем, следуя [18], в каждом слое:

$$c_s^u = c_s^0. \quad (26)$$

В (21) также полагаем:

$$\text{Pr} = 1. \quad (27)$$

В этом случае, объединяя (21) с (26), (27), имеем

$$A = G^2 - N^2, B = c_1^0 G^2 - c_3^0 N^2. \quad (28)$$

Коэффициенты турбулентного обмена, с учетом (3) и (26), имеют вид:

$$v_u = \frac{k}{\omega}, \quad v_T = v_S = \frac{v_u}{Pr}, \quad (29)$$

где число Прандтля, согласно [19], есть функция от числа Ричардсона  $Ri = N^2/G^2$  в виде:

$$Pr = \begin{cases} 1, & Ri \leq 0.2 \\ 5Ri, & 0.2 < Ri < 2 \\ 10, & Ri \geq 2. \end{cases} \quad (30)$$

Во втором подходе выбираем  $A$ ,  $B$  в форме (20). В этом случае, — в предположении о локальном равновесии напряжений Рейнольдса и турбулентных потоков тепла [18, 20], — функции устойчивости в каждом слое определяются в виде:

$$\begin{aligned} c_s^u &= (c_6 + c_7 \cdot \alpha_N) / d, \\ c_s^T &= (c_8 + c_9 \cdot \alpha_G + c_{10} \cdot \alpha_N) / d, \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} c_1 &= 1.0, \quad c_2 = 18.3594, \quad c_3 = 46.8602, \\ c_4 &= 2.5392, \quad c_5 = 38.8391, \\ c_6 &= 0.9888, \quad c_7 = 6.6330, \quad c_8 = 1.0465, \\ c_9 &= 3.2061, \quad c_{10} = 0.6377, \\ d &= c_1 + (c_2 + c_3 \cdot \alpha_N) \times \\ &\times \alpha_N + (c_4 + c_5 \cdot \alpha_N) \cdot \alpha_G, \\ \alpha_G &= \frac{1}{(c_s^0)^2} \frac{G^2}{\omega^2}, \quad \alpha_N = \frac{1}{(c_s^0)^2} \frac{N^2}{\omega^2}. \end{aligned}$$

Система (31) разрешима, поскольку ее определитель  $d \neq 0$ . В качестве ограничений на развитие свободной конвекции и вырождение турбулентности можно использовать ограничения [18]:

$$\alpha_N \geq -0.064, \quad \alpha_G \leq 1.65 + 25\alpha_N.$$

## 5. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Цель численных экспериментов — изучить чувствительность решения МОЦО с встроенной в нее  $k-\omega$  моделью к вариациям коэффициентов  $A$  и  $B$ . Расчеты проводятся для акватории, включающей Атлантический оке-

ан к северу от  $30^\circ$  ю.ш., Северный Ледовитый океан и Берингово море. Открытые границы области расположены на  $30^\circ$  ю.ш. и в проливах Алеутских островов. Область включает также Средиземное, Черное и Балтийское моря. Шаг сетки по широте и долготе равен  $0.25^\circ$ . По вертикали задаются сорок сигма-уровней со сгущением к поверхности океана. Рельеф дна океана сглажен в соответствии с горизонтальным разрешением модели так, чтобы отсутствовали резкие градиенты дна. Модельная глубина ограничена минимальной величиной 10 м.

Граничные условия на поверхности океана рассчитываются с использованием атмосферных характеристик по данным CORE-2 [21]. Потоки явного и скрытого тепла, влаги и напряжение ветра рассчитываются с дискретностью в один час по данным CORE-2 о температуре воздуха, влажности, компонентах скорости ветра и давлении на уровне моря с использованием модельной температуры воды. Потоки длинноволновой и коротковолновой радиации задаются с дискретностью одни сутки [21]. Для коротковолновой радиации учитывается ее проникающая способность. Интенсивность атмосферных осадков и речного стока задается с дискретностью один месяц. Сток основных рек учитывается косвенно в граничном условии для солёности.

На твердых береговых границах ставятся условия непротекания и отсутствия потоков тепла и соли. На жидких границах от поверхности до дна задаются значения температуры и солёности, интерполированные на каждый шаг интегрирования по данным о их ежемесячных климатических значениях.

В качестве начальных условий выбирают климатические январские поля температуры и солёности океана, отсутствие движения и морского льда [14]. В граничном условии (8) положено  $Q_\omega^0 = 0$ .

Численные эксперименты проведены на период 20 лет с различными входными параметрами, указанными в табл. 1.

**Таблица 1.** Список вычислительных экспериментов

Эксперимент	Форма коэффициентов $A$ и $B$ (18), (19)	$c_g$	Шаг по времени $k-\omega$ модели $\tau_T$
EP40	(28)	40	1 ч
EC40	(20)	40	5 мин
EC10	(20)	10	5 мин
EC1h	(20)	40	1 ч

**Эксперимент EP40.** Коэффициенты  $A$  и  $B$  выбираются в форме (28). Параметр ветровой генерации в (8)  $c_g = 40$ . Коэффициенты турбулентной диффузии и вязкости рассчитываются по (29), где число Прандтля есть функция числа Ричардсона (30). Уравнения турбулентности решаются аналитически согласно (18), (19) с шагом по времени  $\tau_T = 1$  ч. Заметим, что шаг модели турбулентности по времени  $\tau_T$  равен шагу МОЦО:  $\tau_T = \tau_{ocm}$ .

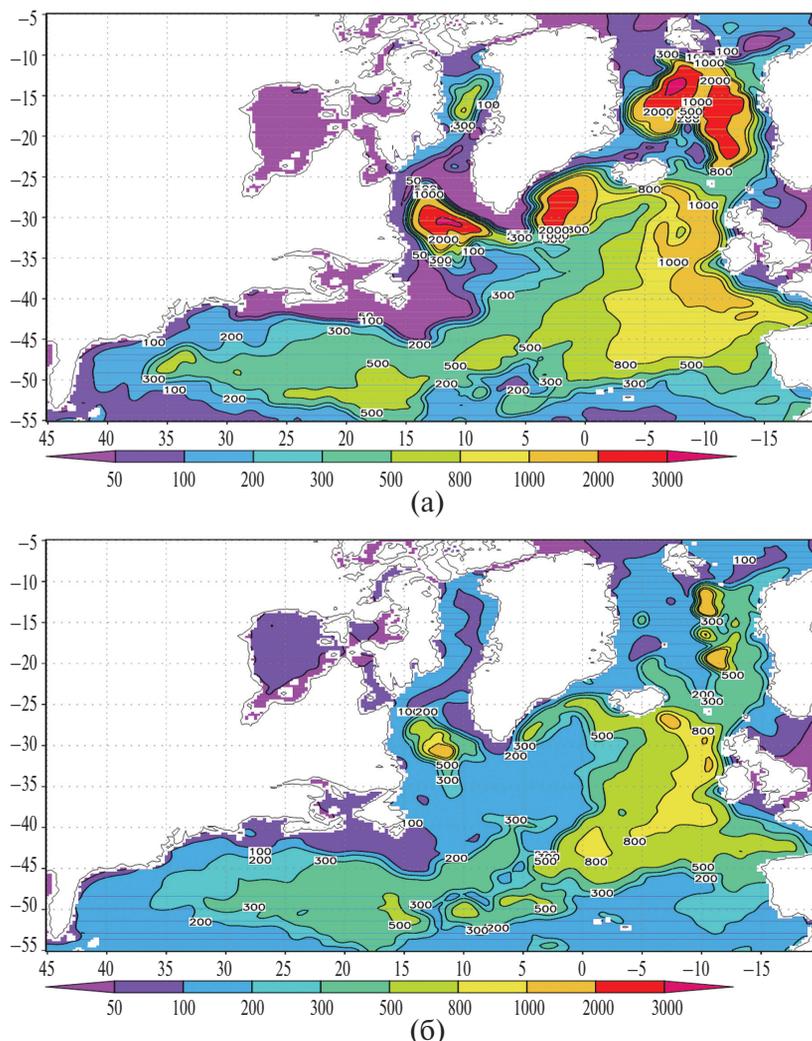
**Эксперимент ES40.** Коэффициенты  $A$  и  $B$  выбираются в форме (20) с функциями устойчивости в форме (31), коэффициенты вертикальной турбулентной вязкости и диффузии в форме (25), параметр  $c_g = 40$  в (8). Уравнения турбулентности решаются аналитически согласно (18), (19) с шагом по времени  $\tau_T = 5$  мин.

**Эксперимент ES10.** Он отличается от ES40 только тем, что в граничном условии (8)  $c_g = 10$ .

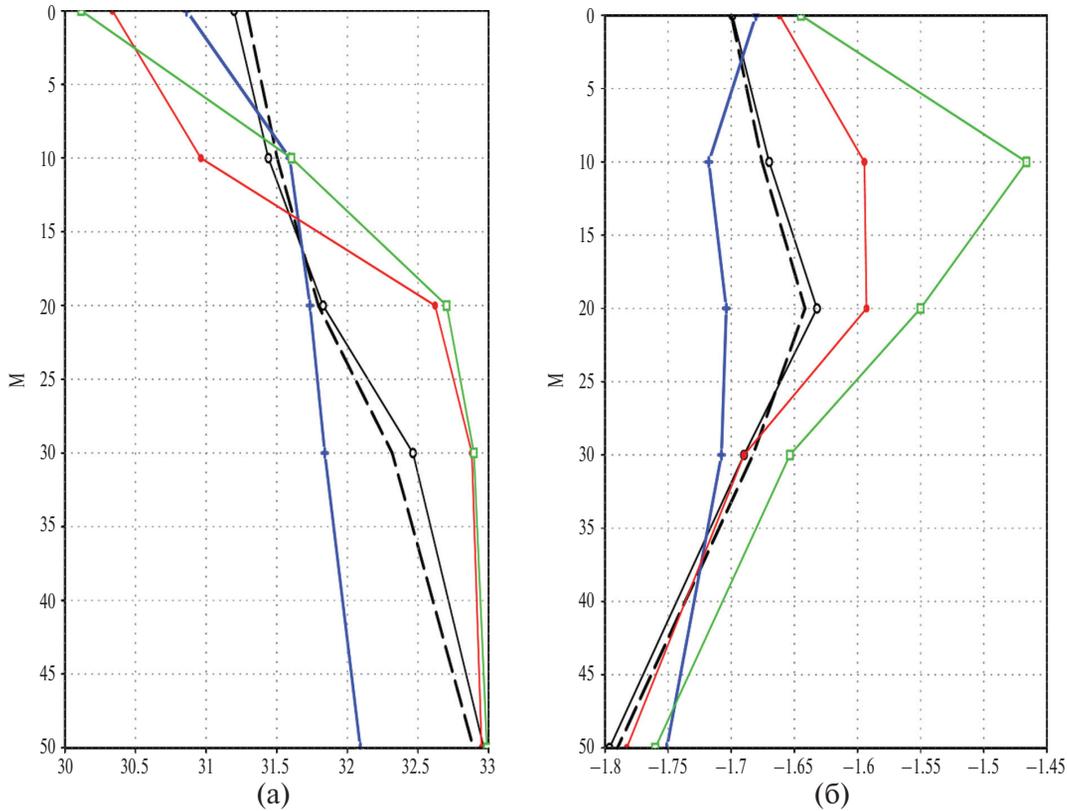
**Эксперимент ES1h.** В отличие от ES40 уравнения турбулентности решаются аналитически с шагом по времени равным шагу МОЦО:  $\tau_T = \tau_{ocm} = 1$  час. Функции устойчивости (31) на расчетном интервале  $t^j < t < t^{j+1}$  берутся с предыдущего шага по времени  $t = t^j$ . Функции устойчивости пересчитываются далее при  $t = t^{j+1}$ .

## 6. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Рассмотрим вопрос о чувствительности толщины верхнего квазиоднородного слоя (ВКС) к вариациям коэффициентов аналитического решения (18), (19). Сравнение проведем для периода максимального развития свободной конвекции. На рис. 1 показана толщина ВКС для Северной Атлантики и Арктики в феврале 20-го года модельного расчета, полученная в экспериментах EP40 и ES1h. Отметим, что данные



**Рис. 1.** Толщина верхнего квазиоднородного слоя в Северной Атлантике и Арктике, в феврале 20-го года модельного расчета в экспериментах EP40 (а) и ES1h (б). В пределах ВКС потенциальная плотность воды отличается от плотности на поверхности океана менее чем на  $0.15 \text{ кг/м}^3$ . Координаты модельные (см. текст).



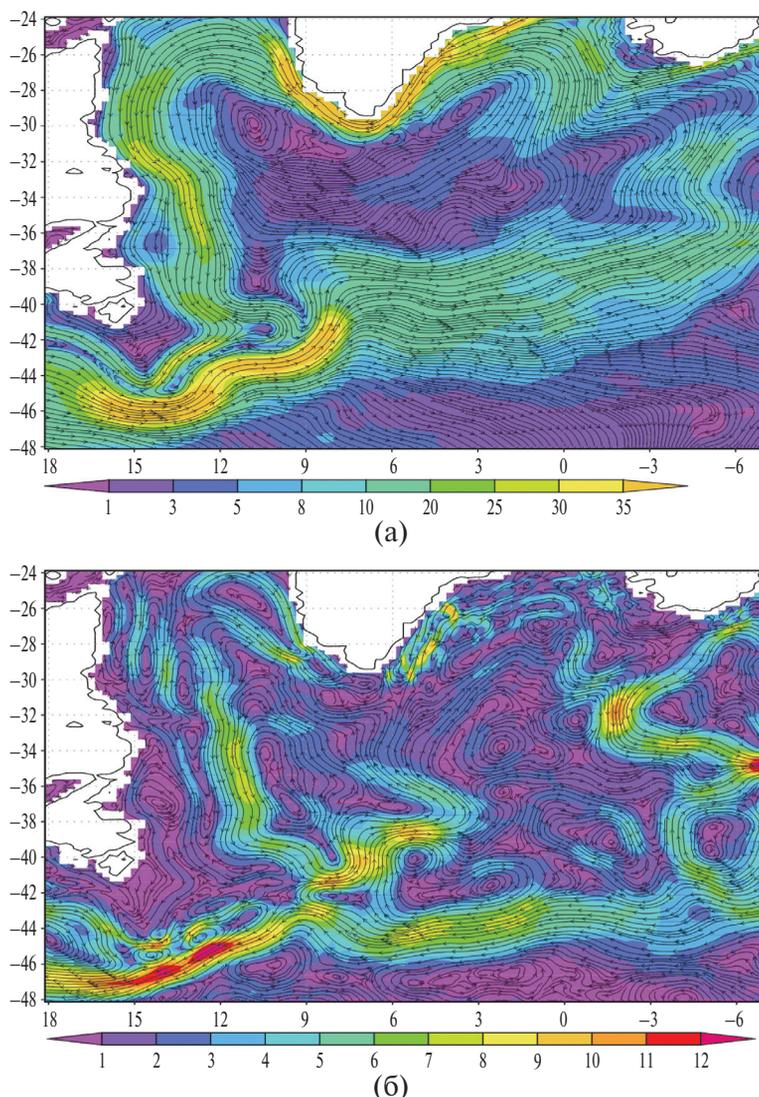
**Рис. 2.** (а) Соленость (в PSU), (б) температура (в °C) на Северном полюсе. Июль, слой 0–50 м. Эксперимент EC40 — черная линия и полые кружки; EC1h — черная линия, штрихи; EC10 — красная линия, кружки; EP40 — зеленая линия, квадраты; соответствующие климатические данные для июля из Атласа океанов — синяя линия, крестики [23, 24].

распределения типичны для всех зимних периодов. Видна высокая чувствительность толщины ВКС к изменению коэффициентов  $A$  и  $B$ . Разница между двумя расчетами составляет десятки метров в средних широтах и сотни, — а в отдельных районах интенсивной конвекции до 1–2 тысяч, — метров в Лабрадорском, Норвежском и Гренландском морях. В эксперименте EP40 (рис. 1а) в Лабрадорском и Норвежском морях толщина ВКС заметно больше по сравнению с данными наблюдений [22]. В экспериментах EC1h и EC40, в которых толщины ВПС близки друг другу, этот недостаток устраняется (рис. 1б). В них более реалистично воспроизводится также толщина ВКС в восточной Атлантике. В целом, результаты EC1h и EC40 лучше соответствуют данным наблюдений [22], чем результаты EP40.

На рис. 2 показаны типичные для летнего периода профили температуры  $T(z)$  и солености  $S(z)$  на Северном географическом полюсе при различных значениях параметров. Для сравнения приведены соответствующие климатические профили по данным Атласа океанов [23, 24]. Устойчивость стратификации верхнего слоя оке-

ана здесь в основном связана с распределением солености по вертикали. Летний период выбран для иллюстрации наибольшей чувствительности вертикальной структуры расчетных полей к вариациям параметра  $c_g$ . В этот период зона развитой турбулентности у поверхности океана относительно невелика. Уменьшение в четыре раза притока КЭТ в океан у поверхности в эксперименте EC10 по сравнению с EC40 уменьшает перемешивание. Опресненные (за счет таяния льдов и речного стока) воды проникают на меньшую глубину, и в верхнем 15-метровом слое в EC10 воспроизводится соленость на 0.6–0.9 PSU ниже, чем в EC40. Ниже 15 м, в галоклине, из-за недостатка КЭТ и слабого перемешивания (с верхними опресненными слоями), соленость в EC10 выше, чем в EC40 (рис. 2а). Указанные причины обуславливают наличие в EC10 более теплой воды в верхнем 25-метровом слое, в июне, по сравнению с EC40 (рис. 2б). В целом  $S(z)$  и  $T(z)$  в эксперименте EC40 ближе к климатическим данным наблюдений, чем в EC10.

При использовании функций устойчивости в виде (31) модельное решение лучше соответствует данным наблюдений, чем при задании



**Рис. 3.** (а) Линии тока и модуль скоростей течений (см/с, цветной фон) в слое 10–300 м. Среднее за 20 февралей (1948–1967 гг.); (а) — эксперимент EC1h, (б) — векторная разность течений «EC1h минус EР40». Координаты модельные: вверху — очертания Гренландии и Исландии, слева — Лабрадор и Ньюфаундленд.

числа Прандтля как функции от числа Ричардсона в эксперимент EР40 (рис. 2). В эксперименте EР40, как и в EC10, приповерхностный слой более пресный, чем в EC40 и EC1h. При этом в EР40 в 20-метровом слое заметно завышаются градиент солёности и температура воды, и возникает завышенная по сравнению с наблюдениями термическая инверсия (рис. 26). В целом можно сказать, что в EР40 уменьшен приток КЭТ. Распределение КЭТ в слое 0–20 м показывает, что в эксперименте EC40 величина КЭТ равна  $\sim 30 \text{ см}^2/\text{с}^2$ , а в EР40  $\sim 5\text{--}15 \text{ см}^2/\text{с}^2$ .

Следует особо отметить малую чувствительность вертикальной структуры верхнего слоя океана при переходе от эксперимента EC40 к EC1h (рис. 2).

Эксперименты показывают заметное изменение полей температуры, солёности и плотности в верхнем слое океана при вариации коэффициентов  $A$  и  $B$  (18), (19), что отражается и в поле течений. На рис. 3а показано среднее за 20 февралей поле течений в слое 10–300 м в Субполярном циклоническом круговороте в эксперименте EC1h. Хорошо выражены все известные течения региона. Пространственное распределение течений в эксперименте EР40 имеет ту же структуру, что и в EC1h. Чтобы показать различия в скоростях между этими экспериментами, на рис. 3б приведена их разность: «EC1h минус EР40». Относительные изменения модулей течений в отдельных районах могут достигать

величины 20–30%. Так, на южной периферии Северо-Атлантического течения скорости в ЕС1h меньше, чем в EP40. Скорости в ЕС1h возрастают по сравнению с EP40 на северной периферии Северо-Атлантического течения и на западной периферии Лабрадорского течения (рис. 3). В целом в экспериментах ЕС40 и ЕС1h Северо-Атлантического течения приобретает более выраженный струйный характер, чем в EP40.

## 7. ВЫВОДЫ

Описывается развитие модели общей циркуляции океана ИВМ РАН, используемой в различных исследованиях динамики морей и океанов [1–4, 15, 16]. Модель циркуляции включает  $k-\omega$  параметризацию вертикального турбулентного обмена. Уравнения турбулентности расщепляются на два этапа, описывающие процессы трехмерного переноса–диффузии и локальной генерации–диссипации  $k$  и  $\omega$ . На этапе генерации–диссипации уравнения решаются аналитически, что обуславливает эффективность и устойчивость расчетов. С вычислительной точки зрения алгоритм является достаточно гибким. Он позволяет варьировать коэффициенты аналитического решения, изменяя функции устойчивости или число Прандтля и сохраняя при этом простоту и устойчивость вычислений.

Изучена чувствительность модельных крупномасштабных полей Северной Атлантики — Северного Ледовитого океана к изменению коэффициентов турбулентного обмена. Изменение коэффициентов обмена производится путем изменения коэффициентов аналитического решения  $k-\omega$  модели. Эксперименты показывают, что, варьируя коэффициенты аналитического решения на стадии генерации–диссипации  $k-\omega$  модели, можно повышать адекватность моделирования. Приводятся оценки чувствительности совместной модели циркуляции и турбулентности к вариациям притока кинетической энергии турбулентности на поверхности океана. Даны также оценки времени выхода на стационар турбулентных процессов, показавшие принципиальную необходимость использования нестационарных уравнений турбулентных характеристик.

**Источники финансирования.** Работа выполнена в ИВМ РАН при поддержке Российского научного фонда (грант № 18-11-00163) и РФФИ (грант 18-05-00177).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zalesny V.B., Gusev A.V.* Mathematical model of the World Ocean dynamics with algorithms of variational assimilation of temperature and salinity fields // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2009. V. 24. № 2. P. 171–191.
2. *Zalesny V.B., Marchuk G.I., Agoshkov V.I., Bagno A.V., Gusev F.V., Diansky N.A., Moshonkin S.N., Volodin E.M., Tamsalu R.* Numerical modeling of the large-scale ocean circulation on the base of multi-component splitting method // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modeling. 2010. V. 25. № 6. P. 581–609.
3. *Володин Е.М., Дианский Н.А., Гусев А.В.* Воспроизведение современного климата с помощью совместной модели общей циркуляции атмосферы и океана INMCM 4.0 // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2010. Т. 46. № 4. С. 1–17.
4. *Zalesny V.B., Diansky N.A., Fomin V.V., Moshonkin S.N., Demyshev S.G.* Numerical model of the circulation of the Black Sea and the Sea of Azov // Russ. J. Num. Anal. Math. Modelling. 2012. V. 27. № 1. P. 95–111.
5. *Ибраев Р.А., Хабеев Р.Н., Ушаков К.В.* Вихререзшающая  $1/10^\circ$  Модель Мирового океана // Изв. РАН. Физ. атм. и океана. 2012. Т. 48. № 1. С. 37–46.
6. *Перов В.Л.* Расчет коэффициентов турбулентного перемешивания на основе спектрального алгоритма и его использование в модели COSMO-RU. // Труды Гидрометцентра РФ. 2012. Вып. 347. С. 81–94.
7. *Warner J.C., Sherwood C.R., Arango H.G., Signell R.P.* Performance of four turbulence closure models implemented using a generic length scale method // Ocean Modelling. 2005. V. 8. № 1–2. P. 81–113.
8. *Large W.G., McWilliams J.C., Doney S.C.* Oceanic vertical mixing: a review and a model with a nonlocal boundary layer parameterization // Rev. Geophys. 1994. V. 32. № 4. P. 363–403.
9. *Canuto V.M., A.M. Howard, Y. Cheng, et al.* Ocean turbulence, III: New GISS vertical mixing scheme // Ocean Modelling. 2010. V. 34. № 3. P. 70–91.
10. *Moshonkin S.N., Zalesny V.B., Gusev A.V.* A splitting turbulence algorithm for mixing parameterization in the ocean circulation model. Turbulence, Atmosphere and Climate Dynamics // IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science. 2019. V. 231. 012038 IOP Publishing. doi: 10.1088/1755–1315/231/1/012038
11. *Заславский М.М., Залесный В.Б., Кабатченко И.М., Тамсалу Р.* О самосогласованном описании приводного слоя атмосферы, ветровых волн и верхнего слоя моря // Океанология. 2006. Т. 46. № 2. С. 178–188.
12. *Noh Y., Ok H., Lee E., et al.* Parameterization of Langmuir circulation in the ocean mixed layer model using LES and its application to the OGCM // J. Phys. Oceanogr. 2016. V. 46. № 1. P. 57–78.
13. *Moshonkin S.N., Zalesny V.B., Gusev A.V.* Simulation of the Arctic -North Atlantic Ocean Circulation

- with a Two-Equation  $k$ -omega Turbulence Parameterization // *Journal of Marine Science and Engineering*. 2018. V. 95. № 6. P. 1–23. doi: 10.3390/jmse6030095
14. Мoшoнкин С.Н., Залесный В.Б., Гусев А.В. Алгоритм решения  $k$ -омега уравнений турбулентности в модели общей циркуляции океана // *Известия РАН. Физика атмосферы и океана*. 2018. Т. 54. № 5. С. 223–246.
  15. Марчук Г.И., Залесный В.Б. Моделирование циркуляции Мирового океана с четырехмерной вариационной ассимиляцией полей температуры и солёности // *Изв. РАН. сер. Физика атмосферы и океана*. 2012. Т. 48. № 1. С. 21–36.
  16. Залесный В.Б., Агошков В.И., Шутяев В.П., Ле Думе Ф., Ивченко В.О. Задачи численного моделирования гидродинамики океана с вариационной ассимиляцией данных наблюдений // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана*. 2016. Т. 52. № 4. С. 488–500.
  17. Яковлев Н.Г. Совместная модель общей циркуляции океана и эволюции морского льда в Северном Ледовитом океане // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана*. 2003. Т. 39. № 3. С. 394–409.
  18. Burchard H., Bolding K., Villarreal M. GOTM, a General Ocean Turbulence Model: Theory, Implementation and Test Cases // Centre, E.C.J.R., Institute, S.A. EUR / European Commission. Space Applications Institute. 1999. URL <https://books.google.ru/books?id=zsJUHAAACAAJ>
  19. Blanke B., Delecluse P. Variability of the tropical Atlantic ocean simulated by a general circulation model with two different mixed-layer physics // *Journal of Physical Oceanography*. 1993. V. 23. № 7. P. 1363–1388.
  20. Mellor G., Yamada T. A hierarchy of turbulence closure models for planetary boundary layers // *Journal of the Atmospheric Sciences*. 1974. V. 31. № 7. P. 1791–1806.
  21. Large W.G., Yeager S.G. The global climatology of an interannually varying air–sea flux // *Climate Dynamics*. 2009. V. 33. P. 341–364.
  22. de Boyer Montégut C., Madec G., Fischer A., Lazar A., Iudicone D. Mixed layer depth over the global ocean: An examination of profile data and a profile-based climatology // *Journal of Geophysical Research: Oceans*. 2004. V. 109. № C12. doi: 10.1029/2004JC002378
  23. Locarnini R.A., Mishonov A.V., Antonov J.I., et al. World Ocean Atlas 2009. V. 1: Temperature. S. Levitus, Ed. 2010. NOAA Atlas NESDIS68. U.S. Government Printing Office. Washington. D.C. 184 pp.
  24. Antonov J.I., Seidov D., Boyer T.P., Locarnini R.A., Mishonov A.V., Garcia H.E., Baranova O.K., Zweng M.M., Johnson D.R. World Ocean Atlas 2009. V. 2: Salinity. S. Levitus, Ed. NOAA Atlas NESDIS69. U.S. Government Printing Office. Washington. D.C. 184 pp.

## Sensitivity of the Ocean Circulation Model to the $k$ –Omega Vertical Turbulence Parametrization

V. B. Zalesny, S. N. Moshonkin

*Marchuk Institute of Numerical Mathematics, RAS  
ul. Gubkina, 8, Moscow, 119333, Russia  
E-mail: atarexm@himki.net*

Received: 19.03.2019

Accepted: 29.05.2019

Ocean general circulation model (OGCM) of the INM RAS with embedded  $k$ – $\omega$  turbulent model is developed. The solution of the  $k$ – $\omega$  model equations depends on the frequencies of buoyancy and velocity shift which are generated by the OGCM. The coefficients of vertical turbulence in OGCM depend on  $k$  and omega. The numerical algorithms of both models are based on the splitting method for physical processes. The model equations are split into two stages, describing the three-dimensional transport-diffusion of the kinetic energy of turbulence and frequency and their local generation-dissipation. The system of ordinary differential equations arising at the second stage is solved analytically, which ensures the efficiency of the algorithm. Analytical solution also written for the vertical turbulence coefficient equation. The model is used to study the sensitivity of the model circulation of the North Atlantic–Arctic Ocean to variations in the parameters of vertical turbulence. Experiments show that varying the coefficients of the analytical model solution can improve the adequacy of the simulation.

**Keywords:** ocean circulation,  $k$ – $\omega$  model, splitting method, vertical turbulent exchange, North Atlantic.