

УДК 519.71:551.583

## ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ТЕПЛОВОЙ ИНЕРЦИИ И ОБРАТНЫХ СВЯЗЕЙ В СИСТЕМЕ «АТМОСФЕРА–ОКЕАН» НА ИЗМЕНЧИВОСТЬ ГЛОБАЛЬНОЙ ПРИПОВЕРХНОСТНОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ ВОЗДУХА

© 2019 г. С. А. Солдатенко, Р. М. Юсупов

Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН  
199178, Санкт-Петербург, 14 линия Васильевского острова, 39

E-mail: soldatenko@iias.spb.su

Поступила в редакцию 24.04.2019 г.

Принята к печати 07.08.2019 г.

Современный климат нашей планеты характеризуется не только трендом, обусловленным ростом в атмосфере концентрации парниковых газов, но и колебаниями, охватывающими широкий диапазон частот и масштабов. Изменчивость глобального климата, рассчитанная по данным результатов моделирования в рамках пятой фазы проекта по взаимному сравнению совместных моделей Всемирной программы исследования климата, имеет значительные межмодельные расхождения. В частности, для декадных аномалий глобальных и полусферных температур межмодельные отличия стандартного отклонения достигают четырехкратной величины. Однако в отличие от межмодельных расхождений чувствительности климата, причины, обуславливающие широкий диапазон оценок климатической изменчивости, до сих пор остаются не совсем понятными. В статье на основе двухкомпонентной энергобалансовой стохастической модели выполнен анализ чувствительности межгодовой и междекадной изменчивости среднеглобальной приповерхностной температуры воздуха (ПТВ) к обратным связям и тепловой инерции системы «атмосфера–океан» в предположении, что основным внешним воздействующим фактором являются случайные флуктуации радиационного баланса на верхней границе атмосферы. С помощью полученных в статье абсолютных и относительных функций чувствительности оценено влияние тепловой инерции и обратных связей в климатической системе на межгодовую и междекадную изменчивость (дисперсию) ПТВ и спектр ее флуктуаций.

**Ключевые слова:** изменчивость климата, чувствительность климата, обратные связи, тепловая инерция, уравнение Фоккера–Планка, функция чувствительности.

**DOI:** <https://doi.org/10.31857/S0002-3515556114-126>

### ВВЕДЕНИЕ

Абстрактная математическая модель системы произвольной природы, помимо структуры и основных переменных состояния, характеризуется некоторым набором независимых величин, называемых параметрами, в роли которых могут выступать внешние воздействия на систему. Исследование изучаемого объекта с помощью «подходящей» математической модели предполагает наличие априорной информации о значениях ее параметров. Поскольку часть параметров модели может быть известна с невысокой точностью и/или входить в приближенные соотношения (например, в полуэмпирические схемы параметризации физических процессов), а некоторые параметры в процессе

функционирования системы могут отклоняться от «базовых» (номинальных) значений, возникает закономерный вопрос о том, как система реагирует на малые изменения параметров? Принципы и методы исследования вариаций параметров на свойства динамических систем объединяет теория чувствительности, являющаяся самостоятельным разделом кибернетики [1]. Количественно реакция системы на возмущения параметров оценивается с помощью функций (коэффициентов) чувствительности, определяемых как частные производные от переменных состояния (или некоторых функционалов от них) по параметрам. Допустим, что исходная динамическая система задана одним автономным линейным дифференциальным уравнением первого порядка с одним параметром

$\alpha$ :  $dx/dt = f(x, \alpha)$ , где  $x$  — переменная состояния, а  $f$  — некоторая функция. Пусть  $\alpha_0$  — базовое («невозмущенное») значение параметра  $\alpha$ , которому соответствует основная («невозмущенная») траектория системы  $x_0(t, \alpha_0)$ . Тогда абсолютная функция чувствительности (АФЧ) переменной  $x$  по параметру  $\alpha$  определяется выражением:

$$S_\alpha = \left. \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha_0}.$$

С помощью АФЧ влияние параметрической неопределенности на фазовую траекторию динамической системы оценивается следующим образом:  $\delta x = x_0 - x \approx \delta \alpha S_\alpha$ , где  $\delta \alpha$  — вариация параметра  $\alpha$ .

В климатических исследованиях используются модели, которые, как правило, содержат значительное число параметров, имеющих различную размерность и различный класс эквивалентности (т.е. параметры модели обычно неравнозначны по смыслу), поэтому с помощью АФЧ достаточно сложно произвести ранжирование параметров по степени влияния их вариаций на переменные модели (или функционалы от них). Для этой цели подходят так называемые относительные функции чувствительности (ОФЧ), отражающие связь между относительными вариациями параметров и переменных модели [1]. Для рассмотренного выше примера ОФЧ определяется следующим образом:

$$S_\alpha^R = \left. \frac{\alpha}{x} \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right|_{\substack{x=x_0 \\ \alpha=\alpha_0}} = \frac{\alpha_0}{x_0} S_\alpha \approx \frac{\delta x / x_0}{\delta \alpha / \alpha_0}.$$

Отсюда следует, что ОФЧ  $S_\alpha^R$  численно равна относительному изменению переменной состояния  $x$  (в процентах от невозмущенного значения  $x_0$ ) при изменении величины параметра  $\alpha$  на 1% от базового значения  $\alpha_0$ . Практически процедура сравнения относительного влияния параметров модели на переменные состояния выполняется следующим образом. В окрестности некоторых невозмущенных значений параметров модели вычисляются значения ОФЧ по параметрам, представляющим интерес, и затем сравниваются модули полученных ОФЧ. Наиболее значимому параметру (по степени его влияния на переменные состояния) соответствует наибольшее значение модуля ОФЧ.

Земная климатическая система (ЗКС) является саморегулируемой динамической системой с обратными связями, обладающей тепловой инерцией [2, 3]. Для исследования ее реакции на внутренние и внешние возмущения методы теории чувствительности получили достаточно

широкое и эффективное применение (см., например, [4–7]). Однако каждая область науки имеет свой специфический понятийный аппарат. В исследованиях климата для оценки реакции ЗКС на заданное внешнее (радиационное) воздействие в качестве одной из основных характеристик используется равновесная чувствительность, которая определяется как ожидаемое изменение средней глобальной приповерхностной температуры в состоянии равновесия, обусловленное удвоением концентрации эквивалента двуокиси углерода ( $\text{CO}_2$ ) в атмосфере [8]:  $\Delta T_{2\times}^{eq} = \alpha \Delta F_{2\times}$ , где  $\alpha$  — коэффициент климатической чувствительности, характеризующий изменение  $\Delta T_{2\times}^{eq}$  в ответ на единичное изменение радиационного воздействия,  $\Delta F_{2\times} \approx 3.7 \text{ Вт м}^{-2}$  — радиационный форсинг, вызванный удвоенной концентрацией  $\text{CO}_2$  в атмосфере [9, 10].

Примечательно, что диапазон значений  $\Delta T_{2\times}^{eq}$ , полученный с помощью различных моделей совместной циркуляции атмосферы и океана (МОЦА), «с высокой степенью достоверности находится в интервале  $1.5\text{--}4.5 \text{ }^\circ\text{C}$ » [8]. Авторы недавно опубликованной работы [11] утверждают, что им удалось уменьшить неопределенность величины  $\Delta T_{2\times}^{eq}$ : полученный ими вероятный диапазон значений  $\Delta T_{2\times}^{eq}$  принадлежит интервалу  $2.2\text{--}3.4 \text{ }^\circ\text{C}$ . Межмодельные расхождения в оценках климатической изменчивости в значительной степени объясняются различиями воспроизведения обратных связей в ЗКС [12–15]. По отношению к внешним радиационным воздействиям обратные связи играют роль регуляторных механизмов, либо усиливающих (положительные обратные связи), либо уменьшающих (отрицательные обратные связи) эффект этих воздействий. Результаты наблюдений и численного моделирования указывают на то, что в совокупности обратные связи в ЗКС усиливают реакцию радиационных воздействий на климатическую систему нашей планеты [16–18]. Параметр, обратный коэффициенту чувствительности  $\lambda = \Delta F_{2\times} / \Delta T_{2\times}^{eq}$ , характеризует обратные связи в ЗКС [18–20].

С целью получения количественных оценок влияния обратных связей на поведение ЗКС целесообразно ввести понятие «базового» коэффициента климатической чувствительности  $\alpha_0$ , соответствующего ЗКС, в которой присутствует только планковский механизм обратной связи, обеспечивающий рост величины длинноволнового уходящего излучения при повышении температуры подстилающей поверхности:  $\alpha_0 = (4\varepsilon\sigma T_0^3)^{-1} \approx 0.3 \text{ К(Вт м}^{-2}\text{)}^{-1}$ , где  $\varepsilon \approx 0.62$  —

коэффициент излучательной способности подстилающей поверхности, учитывающий отличие Земли от абсолютно черного тела и поглощение длинноволновой радиации водяным паром, облачностью, парниковыми газами и аэрозолями [21],  $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ Вт м}^{-2} \text{ К}^{-4}$  — постоянная Стефана–Больцмана,  $T_0 \approx 288 \text{ К}$  — осредненная по глобусу приповерхностная температура воздуха (ПТВ). В ответ на удвоение содержания  $\text{CO}_2$  в атмосфере соответствующее «базовое» изменение равновесной температуры составляет  $T_0 \approx 1.1 - 1.2 \text{ }^\circ\text{C}$ . Планковский механизм обеспечивает отрицательную обратную связь в ЗКС: изменение уходящего длинноволнового излучения приводит к такому изменению  $T_0$ , которое противодействует первоначальному ее изменению, вызвавшему «разбалансировку» ЗКС. «Базовое» значение параметра климатической обратной связи, соответствующее планковскому механизму, равно  $-(1/\alpha_0) \approx -3.3 \text{ Вт м}^{-2} \text{ К}^{-1}$  [20].

Аналогично тому, как это принято в автоматике и электронике, для характеристики обратных связей в ЗКС наряду с параметром  $\lambda$  можно рассмотреть безразмерный коэффициент (фактор) обратной связи  $f$ , который пропорционален части «выходного сигнала» ЗКС, поступающей обратно на ее «вход», связанный с коэффициентом чувствительности соотношением  $\alpha = \alpha_0 / (1 - f)$  [22]. Тогда отклик ЗКС  $\Delta T_{2x}^{eq}$  на форсинг  $\Delta F_{2x}$  выражается формулой  $\Delta T_{2x}^{eq} = G \Delta T_0$ , где  $G = 1 / (1 - f)$  — коэффициент усиления. Значения параметров  $\alpha$ ,  $\lambda$ ,  $f$  и  $G$ , вычисленные для нижней и верхней границ интервала оценок климатической чувствительности (согласно [8]), приведены в табл. 1. Можно показать, что для ЗКС фактор обратной связи  $0 < f < 1$ . Заметим, что  $f = 0$  при  $\alpha = \alpha_0$  [22].

Современный климат нашей планеты характеризуется не только трендом, обусловленным ростом в атмосфере концентрации  $\text{CO}_2$  — эквивалента, но и колебаниями, охватывающими широкий диапазон частот и масштабов [23]. Изменчивость глобального климата, рассчитанная по данным результатов моделирования в рамках Проекта по взаимному сравнению сов-

местных моделей (CMIP5) [24], также имеет очень существенные межмодельные расхождения. К примеру, для декадных аномалий глобальных и полусферных температур межмодельные отличия стандартного отклонения достигают четырехкратной величины [25]. Однако в отличие от межмодельных расхождений чувствительности климата, причины, обуславливающие широкий диапазон оценок климатической изменчивости, до сих пор остаются не совсем понятными (см. [26] и др.). Тем не менее признается, что обратные связи играют существенную роль в процессах, обуславливающих изменчивость глобального климата [22, 27–29]. Необходимо отметить, что ЗКС и ее основные компоненты, в первую очередь океан, обладают тепловой инерцией, величина которой определяет время реакции ЗКС на внешние радиационные возмущения. Тепловая инерция является одним из основных источников неопределенности в модельных оценках равновесной и неравновесной чувствительности климата [8, 30]). В определенной степени тепловая инерция влияет не только на изменение климата, но и на его вариации, сглаживая температурные возмущения.

На сегодняшний день достаточно противоречивыми остаются представления об относительном влиянии региональных климатических явлений таких, например, как Тихоокеанская декадная и Атлантическая мультидекадная осцилляции, на вариации глобального климата (см., например, [31, 32]). В тоже время важная роль явления «Эль-Ниньо — Южная осцилляция» в глобальной климатической изменчивости не оспаривается (см., например, [33]). Интересен в этой связи результат работы [34], в которой было показано, что декадная изменчивость глобального климата, воспроизводимая с помощью климатической модели, учитывающей, наряду с атмосферой, только деятельный слой океана, оказалась лишь на 5% меньше, чем декадная глобальная климатическая изменчивость, полученная с помощью той же модели, но с полной динамикой океана. Это обстоятельство дает основание полагать, что глобальная изменчивость климата «напоминает» «хассельмановскую» реакцию ЗКС на стохастическое внешнее воздействие [35].

**Таблица 1.** Значения параметров  $\alpha$ ,  $\lambda$ ,  $f$  и  $G$ , вычисленные для нижней и верхней границ интервала оценок климатической чувствительности [8]

$\Delta T_{2x}^{eq}$ , $^\circ\text{C}$	$\alpha$ , $\text{К}(\text{Вт м}^{-2})^{-1}$	$\lambda$ , $\text{К}(\text{Вт м}^{-2})^{-1}$	$f$	$G$
1.5	0.41	2.44	0.27	1.37
4.5	1.22	0.82	0.75	4.07

В данной работе нами исследуется чувствительность межгодовой и междекадной изменчивости глобального климата к тепловой инерции и обратным связям в системе «атмосфера–океан» в предположении, что основным внешним воздействующим фактором являются случайные флуктуации радиационного баланса на верхней границе атмосферы. Основным инструментом исследования служит двухслойная энергобалансовая модель (ЭБМ), допускающая аналитическое решение [36–38]. Нами получены формулы для абсолютных и относительных функций чувствительности, с помощью которых оценено влияние параметров, характеризующих тепловую инерцию и обратные связи в ЗКС, на межгодовую и междекадную изменчивость (дисперсию) ПТВ и спектр ее флуктуаций. Отметим, что изучение обратных связей в ЗКС представляет не только теоретический, но и прикладной интерес (см., например, [39]).

## МЕТОДЫ

В данном исследовании используется ЭБМ, состоящая из двух взаимодействующих подсистем. Первая подсистема включает в себя атмосферу и верхний перемешанный слой океана («быстрая» подсистема), вторая — глубокие слои океана («медленная» подсистема). Состояние «быстрой» подсистемы описывается аномалией среднглобальной ПТВ  $T$ , а состояние «медленной» подсистемы — глобально-осредненной аномалией температуры глубинных слоев океана  $T_D$ . В рамках двухслойной ЭБМ тепловая инерция ЗКС характеризуется двумя параметрами — эффективными теплоемкостями «быстрой» и «медленной» подсистем:  $C$  и  $C_D$  соответственно. Однако на рассматриваемых в статье временных масштабах основным параметром, характеризующим тепловую инерцию ЗКС, является параметр  $C$  [36]. Уравнения, описывающие эволюцию  $T$  и  $T_D$  имеют вид [36–38]:

$$C(dT/dt) = -\lambda T - \gamma(T - T_D) + F_d(t) + F(t), \quad (1)$$

$$C_D(dT_D/dt) = \gamma(T - T_D), \quad (2)$$

где  $\gamma$  — параметр, характеризующий поглощение тепла глубинными слоями океана;  $F(t)$  — случайный радиационный форсинг, представляющий собой аддитивный белый гауссовский шум с нулевым средним  $\langle F(t) \rangle = 0$  и корреляционной функцией  $\langle F(t_1)F(t_2) \rangle = 2D_s\delta(t_1 - t_2)$ , где  $\delta$  — дель-

та-функция [35, 40]. Параметр  $D_s$ , называемый обычно коэффициентом диффузии, определяется дисперсией случайного процесса  $\sigma_s^2$  и временем его корреляции  $\tau_s$ :  $D_s = \sigma_s^2\tau_s$ . Для удобства дальнейшего изложения введем дополнительное обозначение:  $q_s^2 = 2D_s$ .

Для описания климатического тренда, обусловленного, например, увеличением концентрации атмосферного  $\text{CO}_2$ , в правую часть уравнения (1) вводится слагаемое  $F_d(t)$ , аппроксимируемое (в целях простоты) линейной функцией времени:  $F_d(t) = \eta t$ , где  $\eta$  — параметр, характеризующий скорость изменения радиационного форсинга [41]. Однако, как будет показано ниже, в стохастической модели (1)–(2) детерминированный форсинг  $F_d$  не оказывает влияния на климатическую изменчивость и поэтому его можно исключить из рассмотрения. На основе калибровки ЭБМ (1)–(2), выполненной в [38] по данным CMIP5, были получены следующие значения параметров этой модели:  $C = 7.3 \text{ Вт год м}^{-2} \text{ К}^{-1}$ ;  $C_D = 105.5 \text{ Вт год м}^{-2} \text{ К}^{-1}$ ;  $\lambda = 1.13 \text{ Вт м}^{-2} \text{ К}^{-1}$ ;  $\gamma = 0.73 \text{ Вт м}^{-2} \text{ К}^{-1}$ . Заметим, что значение  $C = 7.34 \text{ Вт год м}^{-2} \text{ К}^{-1}$  эквивалентно  $2.3 \times 10^8 \text{ Дж м}^{-2} \text{ К}^{-1}$ , что, в свою очередь, соответствует толщине квазиоднородного слоя океана, равной  $\sim 75 \text{ м}$  [42]. Параметр  $q_s$  рассчитывался на основе асимптотического выражения  $\tilde{\sigma}_s^2 \approx 2\sigma_s^2\tau_s/\tilde{\tau}_s$  [43, 44]:  $q_s^2 = \tilde{\sigma}_s^2\tilde{\tau}_s$ , где  $\tilde{\sigma}_s^2$  — величина дисперсии радиационного форсинга, сглаженная по периоду  $\tilde{\tau}_s$ . На основе результатов расчетов с моделями CMIP5 [24] в работе [26] для периода сглаживания  $\tilde{\tau}_s = 1 \text{ год}$  было получено, что  $\tilde{\sigma}_s = 0.16\text{--}0.4 \text{ Вт м}^{-2}$  при среднем межмодельном значении  $\sim 0.26 \text{ Вт м}^{-2}$ . Это значение используется в данной работе, поскольку время в модели (1)–(2) выражено в годах.

При условии  $\gamma = 0$  (поглощение тепла глубинными слоями океана не учитывается) система уравнений (1)–(2) сводится к одному уравнению, представляющему собой ЭБМ нулевой размерности [21, 42], которую мы далее будем называть «однослойной» моделью:

$$C(dT/dt) = -\lambda T + F_d(t) + F(t). \quad (3)$$

Модель (3) играет роль вспомогательного инструмента исследования, служащего отправной точкой для анализа чувствительности изменчивости ПТВ к обратным связям и тепловой инерции ЗКС.

В качестве меры изменчивости климата мы будем использовать дисперсию ПТВ  $\langle \delta T^2 \rangle = \langle T^2 \rangle - \langle T \rangle^2$ , где  $\delta T = T - \langle T \rangle$ . Выражение

для расчета  $\langle \delta T^2 \rangle$  может быть получено из уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК), соответствующего системе (1)–(2) и описывающего эволюцию плотности вероятности  $p(\mathbf{x}, t)$ , где  $\mathbf{x} = (T, T_D)$ . Представим уравнения (1) и (2) в матричной форме:

$$d\mathbf{x}/dt = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B} + \mathbf{D}, \quad (4)$$

где

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} T \\ T_D \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -(\lambda + \gamma)/C & \gamma/C \\ \gamma/C_D & -\gamma/C_D \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \eta t/C \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} F/C \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Не трудно показать, что уравнению (4) соответствует следующее уравнение ФПК:

$$\frac{\partial p(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} [(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B})_i p(\mathbf{x}, t)] + \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\mathbf{D}\mathbf{D}^T)_{ij} p(\mathbf{x}, t). \quad (5)$$

Это уравнение можно записать в альтернативной форме:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial T} \left[ \left( -aT + bT_D + \frac{\eta}{C} t \right) p \right] - \frac{\partial}{\partial T_D} \left[ (gT - gT_D) p \right] + \frac{q_s^2}{2C^2} \frac{\partial^2 p}{\partial T^2}, \quad (6)$$

где  $a = (\lambda + \gamma)/C$ ;  $b = \gamma/C$ ;  $g = \gamma/C_D$ .

Умножая обе части уравнения (5) на  $\langle \mathbf{x}\mathbf{x}^T \rangle$  и интегрируя затем полученное выражение по всем возможным значениям  $\mathbf{x}$ , получим уравнение для вторых моментов  $\langle \mathbf{x}\mathbf{x}^T \rangle$  [26, 43], которое в покомпонентной форме эквивалентно следующей системе уравнений:

$$d\langle \delta T^2 \rangle / dt = -2a\langle \delta T^2 \rangle + 2b\langle \delta T \delta T_D \rangle + q_s^2 / C^2, \quad (7)$$

$$d\langle \delta T \delta T_D \rangle / dt = g\langle \delta T \rangle - (a + g)\langle \delta T \delta T_D \rangle + b\langle \delta T_D^2 \rangle, \quad (8)$$

$$d\langle \delta T_D^2 \rangle / dt = -2g\langle \delta T_D^2 \rangle + 2g\langle \delta T \delta T_D \rangle. \quad (9)$$

Для ЗКС, находящейся в стационарном состоянии или вблизи него (т.е. при  $p(\mathbf{x}, t) = const$ ), из системы уравнений (7)–(9) может быть получено выражение для дисперсии  $\langle \delta T^2 \rangle$ :

$$\langle \delta T^2 \rangle = \frac{q_s^2}{2\lambda C} \frac{\gamma C + \lambda C_D}{(\gamma + \lambda)C_D + \gamma C}. \quad (10)$$

В дальнейшем дисперсию ПТВ будем обозначать через  $\sigma_T^2$ . Из (10) следует, что в двухслойной ЭБМ (1)–(2) детерминированный форсинг (если он учитывается) не оказывает влияния на  $\sigma_T^2$ . Последовательно дифференцируя (10) по параметрам  $f$  и  $C$ , получим АФЧ, характеризующие влияние обратных связей и термической инерции ЗКС на изменчивость ПТВ:

$$S_f = \frac{\partial \sigma_T^2}{\partial f} = \frac{q_s^2}{2\alpha_0 \lambda^2 C} \frac{(\gamma C + \lambda C_D)^2 + \gamma^2 C C_D}{[(\gamma + \lambda)C_D + \gamma C]^2}, \quad (11)$$

$$S_C = \frac{\partial \sigma_T^2}{\partial C} = - \frac{q_s^2}{2\lambda C^2} \frac{(\gamma C + \lambda C_D)^2 + \gamma \lambda C_D^2}{[(\gamma + \lambda)C_D + \gamma C]^2}. \quad (12)$$

Выражения для соответствующих ОФЧ имеют вид

$$S_f^R = \frac{f}{\sigma_T^2} S_f = \frac{f}{1-f} \frac{(\gamma C + \lambda C_D)^2 + \gamma^2 C C_D}{(\gamma + \lambda)C_D + \gamma C}, \quad (13)$$

$$S_C^R = \frac{C}{\sigma_T^2} S_C = \frac{(\gamma C + \lambda C_D)^2 + \gamma \lambda C_D^2}{(\gamma C + \lambda C_D)[(\gamma + \lambda)C_D + \gamma C]}. \quad (14)$$

Для получения дополнительной информации о влиянии обратных связей и тепловой инерции на климатическую изменчивость будем использовать спектральную плотность мощности (СПМ), характеризующую распределение мощности сигнала в зависимости от частоты или, иными словами, распределение дисперсий по частотам спектра [44]. Для случайного процесса, описываемого уравнением (3), выражение для СПМ записывается следующим образом [40]:

$$\pi S_{TT}(\omega) = \frac{q_s^2}{\lambda^2 + \omega^2 C^2}. \quad (15)$$

Интеграл от  $S_{TT}(\omega)$  по положительным частотам будет равняться дисперсии  $\sigma_T^2$ :

$$\sigma_T^2 = \int_0^{+\infty} S_{TT}(\omega) d\omega = \frac{q_s^2}{2\lambda C}. \quad (16)$$

Чувствительность СПМ (15) к вариациям параметров  $C$  и  $\lambda$  оценивается с помощью следующих АФЧ и ОФЧ:

$$S_{TT, \lambda} = \frac{\partial S_{TT}}{\partial \lambda} = - \frac{2\lambda q_s^2 \pi^{-1}}{(\lambda^2 + \omega^2 C^2)^2},$$

$$S_{TT, C} = \frac{\partial S_{TT}}{\partial C} = - \frac{2C \omega^2 q_s^2 \pi^{-1}}{(\lambda^2 + \omega^2 C^2)^2}, \quad (17)$$

$$S_{TT,\lambda}^R = \frac{\lambda}{S_{TT}} S_{TT,\lambda} = -\frac{2\lambda^2}{\lambda^2 + \omega^2 C^2},$$

$$S_{TT,C}^R = \frac{C}{S_{TT}} S_{TT,C} = -\frac{2C^2 \omega^2}{\lambda^2 + \omega^2 C^2}. \quad (18)$$

Дифференцируя выражение (16) по параметрам  $C$  и  $\lambda$ , получим соответствующие АФЧ и ОФЧ, характеризующие влияние вариаций параметров  $f$  и  $C$  на дисперсию  $\sigma_T^2$ :

$$S_f = \frac{q_s^2}{2\alpha_0 \lambda^2 C}, \quad S_C = -\frac{q_s^2}{2\lambda C^2}. \quad (19)$$

$$S_f^R = \frac{f}{1-f}, \quad S_C^R = -1. \quad (20)$$

Из (20) следует, что в однослойной модели относительное влияние фактора обратной связи  $f$  на дисперсию  $\sigma_T^2$  не зависит от временного масштаба рассматриваемого процесса, определяемого параметром  $C$ , а зависит только от величины самого параметра  $f$ , тогда как относительное влияние параметра  $C$  не зависит от обратных связей и является постоянной величиной для всех временных масштабов.

## РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

В двухслойной модели (1)–(2) временной масштаб климатической изменчивости (межгодовая, междекадная) определяется эффективной теплоемкостью «быстрой» подсистемы, т.е. параметром  $C$  [26, 35, 45]. При рассмотрении межгодовой изменчивости климата «быстрая» подсистема включает в себя атмосферу и квазиоднородный слой океана. Для этого случая параметр  $C$  принимает значения в диапазоне от 4.7 до 8.6 Вт год  $m^{-2} K^{-1}$  при среднем межмодельном значении 7.3 Вт год  $m^{-2} K^{-1}$  [38]. При моделировании междекадной изменчивости полагаем, что значения параметра  $C$  находятся в интервале от 15 до 25 Вт год  $m^{-2} K^{-1}$  [26, 36, 45], а в качестве характерного значения примем  $C = 20$  Вт год  $m^{-2} K^{-1}$ . Параметр  $\lambda$ , характеризующий обратные связи в ЗКС, также задается в соответствии со значениями, приведенными в [37]:  $0.61 \leq \lambda \leq 1.70$  Вт  $m^{-2} K^{-1}$  при среднем межмодельном значении 1.13 Вт  $m^{-2} K^{-1}$ . Для указанного интервала значений параметра  $\lambda$  фактор обратной связи  $0.49 \leq f \leq 0.82$  при среднем межмодельном значении 0.66. Указанные диапазоны изменения параметров  $C$ ,  $\lambda$  и  $f$  будем называть областями допустимых значений (ОДЗ) этих параметров.

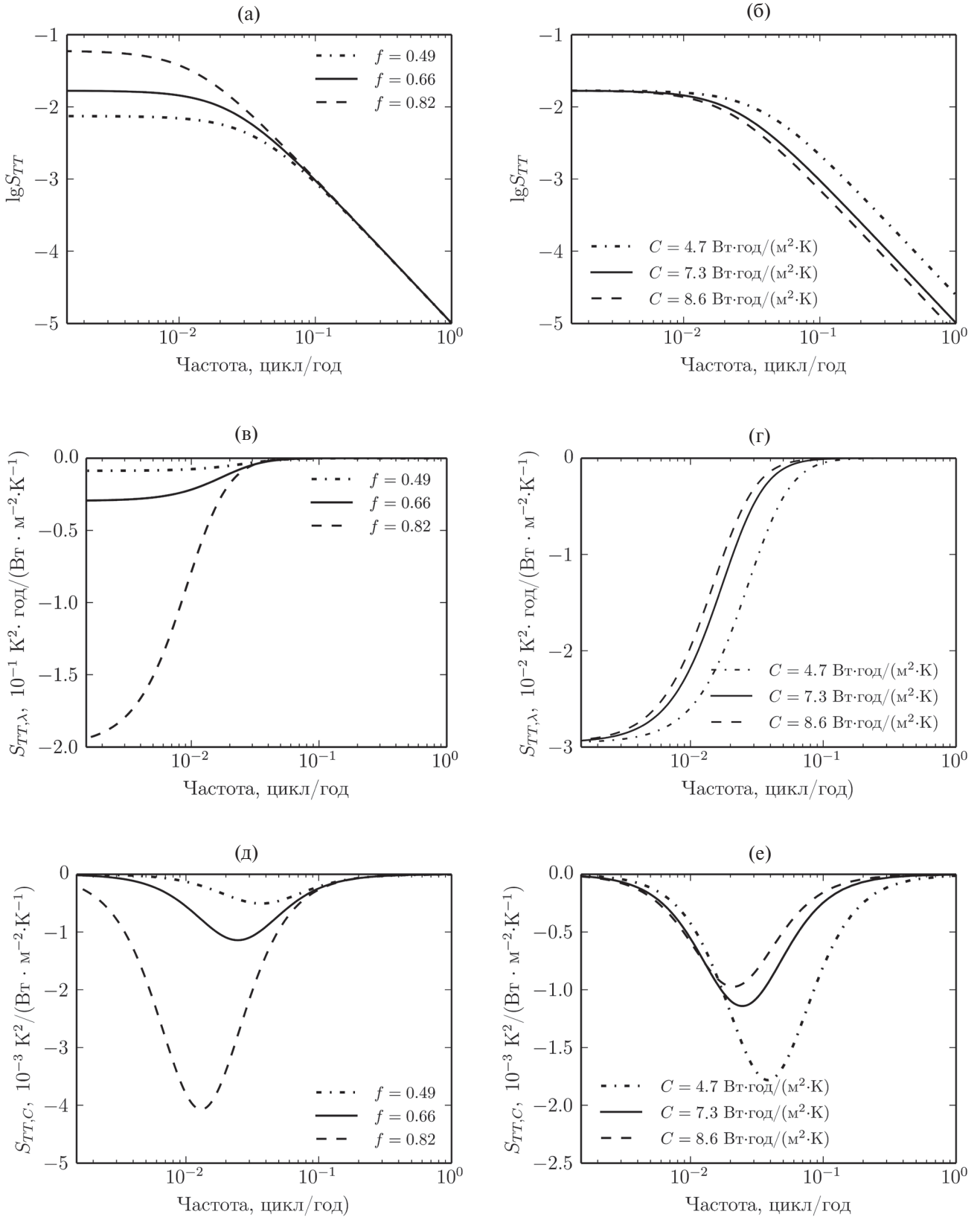
Прежде, чем перейти к анализу чувствительности дисперсии ПТВ к параметрам  $C$  и  $\lambda$  двухслойной модели, обратимся к однослойной ЭБМ (3). Несколько преобразуем выражение для спектральной плотности (15):

$$\pi S_{TT}(\omega) = \frac{q_s^2 / C^2}{(\lambda / C)^2 + \omega^2}. \quad (21)$$

Формула (21) показывает, что в однослойной модели при заданном параметре  $C$  наблюдаются два колебательных режима [46]. В области высоких частот ( $\omega \gg \lambda / C$ ) спектр пропорционален  $1/\omega^2$  и, таким образом, не зависит от параметра  $\lambda$ , характеризующего обратные связи в ЗКС, а при низких частотах ( $\omega \ll \lambda / C$ ) спектр не зависит от частоты колебаний, а обуславливается параметром  $\lambda$ . Таким образом, отношение  $\lambda / C$  определяет частоту  $\omega^*$ , при которой имеет место переход от одного режима к другому.

Рассмотрим влияние параметров  $C$  и  $\lambda$  на спектральную плотность однослойной модели  $S_{TT}$ . Как известно [40], СПМ, описываемая формулой (21), убывает с ростом частоты. На рис. 1а, б приведены графики СПМ, построенные, соответственно, для различных значений фактора обратной связи  $f$  и параметра  $C$ . В области низких частот, как уже отмечалось,  $S_{TT} \propto 1/\lambda^2 = \alpha_0^2 / (1-f)^2$ , поэтому в длинноволновой части спектра рост параметра  $f$  сопровождается увеличением  $S_{TT}$ , причем это увеличение носит нелинейный характер (рис. 1а). В высокочастотной области спектральная плотность  $S_{TT}$  мало зависит от параметра  $\lambda$ , а определяется параметром  $C$  ( $S_{TT} \propto 1/C^2$ ), что иллюстрирует рис. 1б.

Графики АФЧ  $S_{TT,\lambda}$ , характеризующих влияние обратных связей на спектр однослойной модели, построенные для различных значений параметра  $f$ , показаны на рис. 1в, а АФЧ  $S_{TT,\lambda}$ , вычисленные для различных значений параметра  $C$ , приведены на рис. 1г. Представленные на этих рисунках графики функций  $S_{TT,\lambda}$  в очередной раз указывают на то, что в низкочастотном диапазоне спектральная плотность достаточно остро реагирует на малые изменения параметра  $f$ . К примеру, для базового значения параметра  $f = 0.66$  модуль АФЧ  $|S_{TT,\lambda}|_{\omega \rightarrow 0} \rightarrow 0.03$ , тогда как при  $f = 0.82$  имеем  $|S_{TT,\lambda}|_{\omega \rightarrow 0} \rightarrow 0.20$ . Вариации параметра  $C$  также влияют на АФЧ  $S_{TT,\lambda}$ , но в значительно меньшей степени, чем вариации параметра обратной связи (см. рис. 1г).



**Рис. 1.** Спектры флуктуаций глобальносредней приповерхностной температуры воздуха ((а) — для различных значений фактора обратной связи  $f$ ; (б) — для различных значений эффективной теплоемкости «быстрой» подсистемы  $C$ ), и абсолютные функции чувствительности дисперсии  $\sigma_T^2$  по параметрам  $\lambda$  ((в) — для различных значений  $f$ ; (г) — для различных значений  $C$ ) и  $C$  ((д) — для различных значений  $f$ ; (е) — для различных значений  $C$ ).

Интересное поведение демонстрирует АФЧ по параметру  $C$ . Функция  $S_{TT,C}$  для любой комбинации параметров  $C$  и  $\lambda$  имеет очевидный экстремум, которому, как можно показать, соответствует уже известная нам точка с абсциссой  $\omega^* = \lambda/C$  (рис. 1д, е). В спектрах колебаний ПТВ, вычисленных при  $f=0.66$  и двух значениях эффективной теплоемкости «быстрой» подсистемы, равных  $7.3$  и  $20$  Вт год  $\text{м}^{-2} \text{К}^{-1}$ , этой точке отвечает длина цикла  $6.5$  и  $17.7$  лет соответственно.

Очень показательным, на наш взгляд, является рис. 2, на котором построены графики ОФЧ по параметрам  $C$  и  $\lambda$ , вычисленных для базовых значений этих параметров. Графики функций  $S_{TT,\lambda}^R$  и  $S_{TT,C}^R$ , представленные на этом рисунке, оставляют в силе приведенные выше качественные рассуждения относительно роли параметров  $C$  и  $\lambda$  в формировании спектрального состава колебаний ПТВ. В то же время функции  $S_{TT,\lambda}^R$  и  $S_{TT,C}^R$  количественно характеризуют относительное влияние вариаций параметров  $C$  и  $\lambda$  на спектральную плотность ПТВ при различных частотах. Также небезынтересно, что графики функций  $S_{TT,\lambda}^R$  и  $S_{TT,C}^R$  пересекаются в точке, абсцисса которой равна  $\omega^* = \lambda/C$ .

Рассмотрим результаты исследования чувствительности дисперсии ПТВ  $\sigma_T^2$  к вариациям параметров, характеризующих термическую инерцию «быстрой» подсистемы (параметр  $C$ ) и обратные связи в ЗКС (параметр  $f$  или  $\lambda$ ). Поскольку параметры  $f$  и  $\lambda$  — линейно зависимы, то АФЧ  $S_f$ , рассчитываемая по параметру  $f$ , будет отличаться от АФЧ  $S_\lambda$ , рассчитываемой по параметру  $\lambda$ , только постоянным множителем  $\tilde{\alpha} = -\alpha_0^{-1}$ , и поэтому не имеет значения, какой параметр,  $f$  или  $\lambda$ , рассматривается в качестве характеристики обратных связей в ЗКС. Напомним, что меньшие значения  $f$  соответствуют большим значениям  $\lambda$ . Методически анализ чувствительности выполняется на основе однофакторного подхода, широко применяемого при исследовании чувствительности динамических систем. В рамках этого метода предполагается, что параметры  $C$  и  $\lambda$  не зависят друг от друга.

Чувствительность дисперсии  $\sigma_T^2$  к изменению величины параметра  $f$  характеризуют АФЧ  $S_f$ , графики которых для межгодового ( $C = 7.3$  Вт год  $\text{м}^{-2} \text{К}^{-1}$ ) и междекадного ( $C = 20$  Вт год  $\text{м}^{-2} \text{К}^{-1}$ ) масштабов представлены на рис. 3а. На этом рисунке, для сравнения, приведены также графики функций чувствительности, вычисленных с помощью однослойной модели. Анализ представленных на рис. 3а кривых показывает,

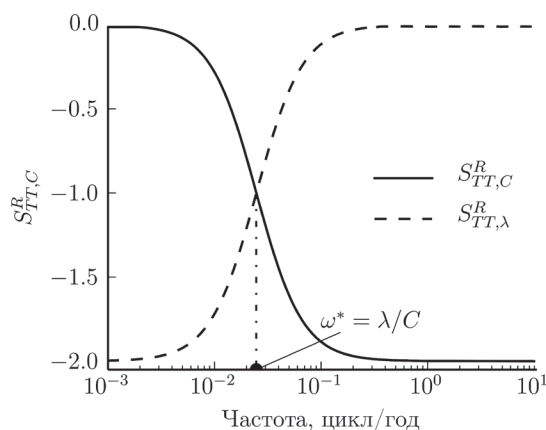
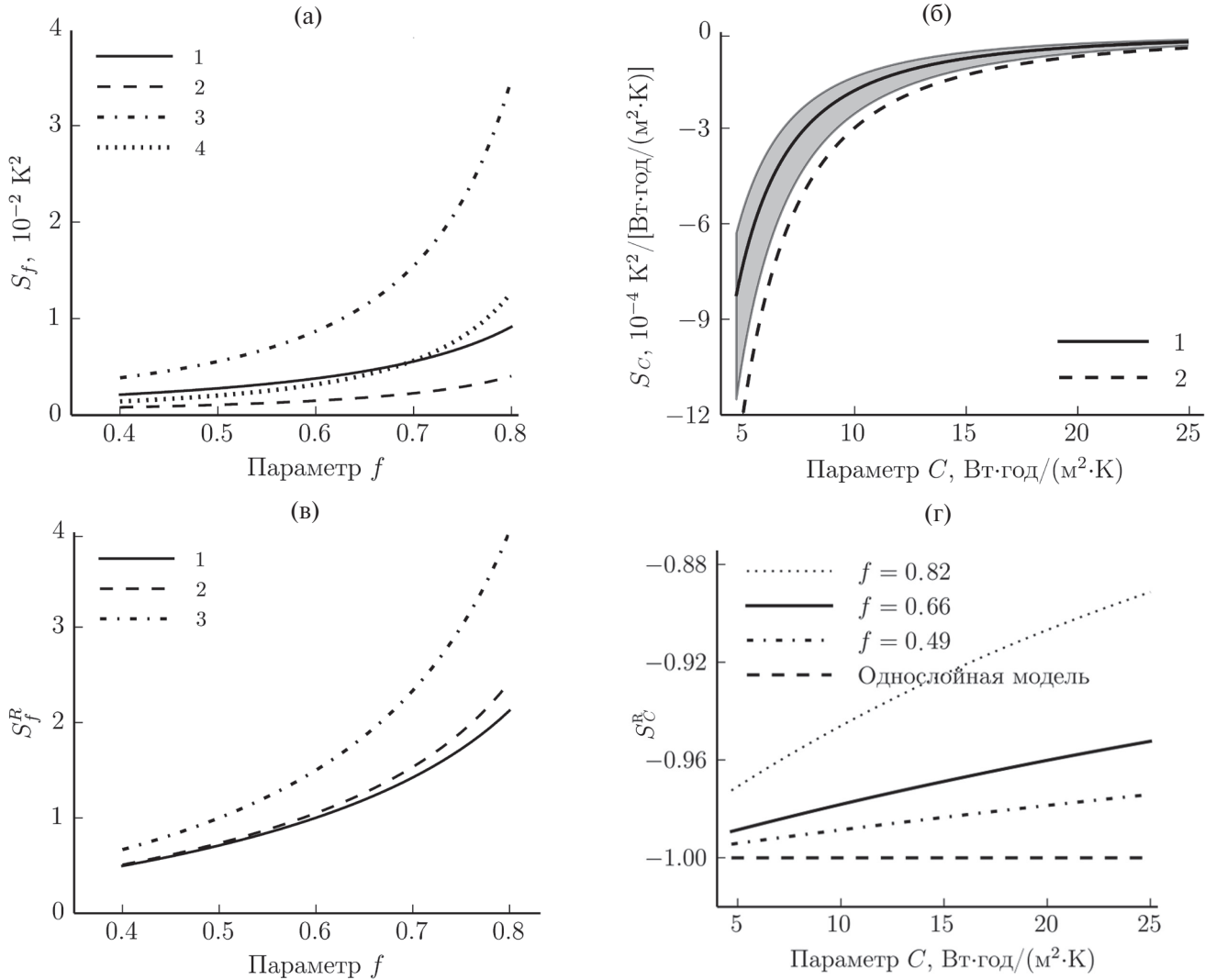


Рис. 2. Относительные функции чувствительности дисперсии  $\sigma_T^2$  по параметрам  $\lambda$  и  $C$ , вычисленные с помощью однослойной модели.

что АФЧ  $S_f$  демонстрируют нелинейный рост при увеличении параметра  $f$ . Расчеты показывают, что чувствительность межгодовой дисперсии  $\sigma_{T,A}^2$  к параметру  $f$  примерно в 2.5 раза превосходит чувствительность междекадной дисперсии  $\sigma_{T,D}^2$  (здесь и далее подстрочные индексы  $A$  и  $D$  обозначают временной масштаб — межгодовой и междекадный соответственно). Для средних межмодельных значений параметров  $C$  и  $\lambda$  получено, что  $S_{f,A} \approx 0.47 \cdot 10^{-2} \text{К}^2$  и  $S_{f,D} \approx 0.19 \cdot 10^{-2} \text{К}^2$ . Поскольку на всем допустимом интервале изменения параметра  $f$  функции чувствительности по этому параметру принимают только положительные значения, знак изменения дисперсии  $\sigma_T^2$ , вызванный вариацией  $\delta f$ , совпадает со знаком самой вариации. Функции чувствительности  $S_{f,A}$  и  $S_{f,D}$ , рассчитанные с помощью однослойной модели, значительно (в 2–4 раза, в зависимости от значений параметров  $C$  и  $\lambda$ ) превосходят по величине соответствующие АФЧ, рассчитанные с помощью двухслойной модели. Неопределенность параметра  $f$  ощутимо влияет на АФЧ  $S_f$ . Значения функций  $S_{f,A}$  и  $S_{f,D}$ , вычисленные при  $f = 0.49$  и  $0.82$  (эти значения параметра  $f$  соответствуют нижней и верхней границе ОДЗ), различаются, соответственно, в 3.8 и 4.5 раза. Поэтому неудивительно, что неопределенность обратных связей в ЗКС, присущая современным климатическим моделям, существенно влияет на прогностические оценки равновесной чувствительности климата и его изменчивости, о чем говорилось во введении.

На рис. 3б приведены графики АФЧ  $S_C$ , рассчитанных с помощью однослойной и двухслойной моделей для базового значения параметра обратной связи ( $f = 0.66$ ) и различных масштабов времени (т.е. для различных значений





**Рис. 3.** Абсолютные и относительные функции чувствительности межгодовой и междекадной дисперсии приповерхностной температуры воздуха: (а) —  $S_f$  как функция параметра  $f$  (1 и 2 — двухслойная модель при  $C = 7.3$  и  $20$  Вт год  $м^{-2} K^{-1}$  соответственно; 3 и 4 — однослойная модель при  $C = 7.3$  и  $20$  Вт год  $м^{-2} K^{-1}$  соответственно); (б) —  $S_C$  как функция параметра  $C$  (1 — двухслойная модель; 2 — однослойная модель); (в) —  $S_f^R$  как функция параметра  $f$  (1 и 2 — двухслойная модель при  $C = 7.3$  и  $20$  Вт год  $м^{-2} K^{-1}$  соответственно; 3 — однослойная модель); (г) —  $S_C^R$  как функция параметра  $C$ .

параметра  $C$ ). Напомним, что функции  $S_C$  характеризуют чувствительность дисперсии ПТВ к вариациям параметра  $C$ . Из выражений (12) и (19) следует, что зависимость АФЧ  $S_C$  от параметра  $C$  является нелинейной. Вид графиков, представленных на рис. 3б, иллюстрирует существующую между  $S_C$  и  $C$  нелинейную зависимость, имеющую следующую особенность: степень нелинейности увеличивается по мере уменьшения параметра  $C$ . Как следствие, неопределенность параметра  $C$  в большей степени влияет на точность определения межгодовой дисперсии  $\sigma_{T,A}^2$ , чем междекадной  $\sigma_{T,D}^2$ . В самом деле, для двухслойной модели функция чувствительности, соответствующая межгодовой изменчивости  $S_{C,A} \approx -3.41 \cdot 10^{-4} K^2 / (Вт \cdot год \cdot м^{-2} K^{-1})$ , расчи-

танной при  $C = 7.3$  Вт год  $м^{-2} K^{-1}$ , примерно в 7.5 раз превосходит функцию чувствительности, соответствующую междекадной изменчивости  $S_{C,D} \approx -4.56 \cdot 10^{-5} K^2 / (Вт \cdot год \cdot м^{-2} K^{-1})$ , определенной при  $C = 20$  Вт год  $м^{-2} K^{-1}$ .

О заметном влиянии неопределенности параметра  $C$  на межгодовую изменчивость ПТВ свидетельствует также то, что величина функции чувствительности  $S_{C,A} \approx -8.21 \cdot 10^{-4} K^2 / (Вт \cdot год \cdot м^{-2} K^{-1})$ , вычисленная при  $C = 4.7$  Вт год  $м^{-2} K^{-1}$  (это значение параметра  $C$  соответствует нижней границе ОДЗ), примерно в 3.3 раза превосходит величину функции чувствительности  $S_{C,A} \approx -2.45 \cdot 10^{-4} K^2 / (Вт \cdot год \cdot м^{-2} K^{-1})$ , определенную при  $C = 8.6$  Вт год  $м^{-2} K^{-1}$  (данное значение параметра  $C$  соответствует верхней границе ОДЗ).

Неопределенность параметра обратной связи  $f$  также ощутимо влияет на чувствительность дисперсии ПТВ к вариациям параметра  $C$ . Для иллюстрации этого эффекта на рис. 3б показана заштрихованная область, границы которой ограничены функциями чувствительности  $S_C$ , вычисленными для минимального ( $f_{\min} = 0.49$ ) и максимального ( $f_{\max} = 0.82$ ) значений параметра обратной связи. Для среднего межмодельного значения параметра  $C$ , равного  $7.3 \text{ Вт год м}^{-2} \text{ К}^{-1}$ , рассчитанная при  $f = f_{\max}$  величина функции чувствительности  $S_{C,A} = -4.78 \cdot 10^{-4} \text{ К}^2/(\text{Вт год м}^{-2} \text{ К}^{-1})$  по абсолютной величине почти в два раза превосходит значение функции чувствительности  $S_{C,A} = -2.61 \cdot 10^{-4} \text{ К}^2/(\text{Вт год м}^{-2} \text{ К}^{-1})$ , полученное при  $f = f_{\min}$ .

Рис. 3б также показывает, что рассчитанные для однослойной модели АФЧ  $S_C$ , по абсолютной величине примерно в 1.7 раз превосходят соответствующие АФЧ, рассчитанные для двухслойной модели.

Отметим, что знак изменения дисперсии  $\sigma_T^2$ , обусловленный вариацией  $\delta C$ , противоположен знаку самой вариации, поскольку на всем допустимом интервале изменения параметра  $C$  функции чувствительности по этому параметру принимают только отрицательные значения.

На рис. 3в представлены графики ОФЧ по параметру  $f$ , вычисленные с помощью двухслойной модели для межгодового и междекадного масштабов. На этом же рисунке показана ОФЧ  $S_f^R$ , полученная с помощью однослойной модели. Отметим, что в однослойной модели графики ОФЧ для межгодового и междекадного масштабов совпадают, поскольку функция  $S_f^R$ , определяемая выражением (20), зависит только от фактора обратной связи  $f$  и не зависит от параметра  $C$ , определяющего временной масштаб процесса.

Графики ОФЧ по параметру  $C$ , рассчитанных для различных значений параметра обратной связи  $f$  по двухслойной модели, приведены на рис. 3г.

При средних межмодельных значениях параметров  $C$  и  $\lambda$  для межгодового и междекадного масштабов времени получены следующие значения ОФЧ по параметрам  $f$  и  $C$ :  $S_{f,A}^R = 1.24$ ,  $S_{f,D}^R = 1.32$ ,  $S_{C,A}^R = -0.98$  и  $S_{C,D}^R = -0.96$ . Из сравнения ОФЧ по абсолютной величине следует, что в рамках двухслойной модели относительное влияние неопределенности обратных связей в ЗКС на неопределенность оценок межгодовой и междекадной изменчивости ПТВ превышает относительное влияние неопределенности тепловой инерции «быстрой» подсистемы.

С увеличением временного масштаба климатических процессов роль обратных связей в формировании климатической изменчивости усиливается, поскольку  $S_{f,D}^R > S_{f,A}^R$ , а роль тепловой инерции — уменьшается, так как  $S_{C,D}^R < S_{C,A}^R$ . Отметим, что в однослойной модели относительное влияние параметра  $C$  на формирование изменчивости ПТВ остается постоянным для различных климатических временных масштабов, поскольку ОФЧ  $S_C^R = -1$ . В то же время величина ОФЧ  $S_f^R$ , рассчитанная с помощью однослойной модели для базовых значений параметров  $C$  и  $\lambda$ , примерно в 1.6 раз превосходит величину  $S_f^R$ , полученную посредством двухслойной модели, что служит еще одним подтверждением важности учета поглощения тепла глубинными слоями океана при рассмотрении как межгодовой, так и междекадной изменчивости климата.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Межгодовая и междекадная изменчивость ПТВ, рассчитанная по данным результатов моделирования в рамках проекта CMIP5, характеризуется очень существенными межмодельными расхождениями (см., например, [25]). Выявление причин этого расхождения и оценка роли основных факторов, влияющих на климатическую изменчивость, представляют большой научный и практический интерес. В настоящей работе с использованием двухкомпонентной энергобалансовой стохастической модели выполнен анализ чувствительности межгодовой и междекадной изменчивости ПТВ к тепловой инерции и обратным связям в системе «атмосфера–океан» в предположении, что основным внешним воздействующим фактором являются случайные флуктуации радиационного баланса на верхней границе атмосферы. С помощью абсолютных и относительных функций чувствительности, характеризующих воздействие инфинитезимальных возмущений параметров модели на дисперсию ПТВ, получены сравнительные оценки влияния тепловой инерции и обратных связей в климатической системе на межгодовую и междекадную изменчивость климата и спектр флуктуаций ПТВ.

Рассчитанные по двухслойной модели ОФЧ  $S_f^R$  и  $S_C^R$  позволяют сделать вывод о том, что относительная величина вклада неопределенности обратных связей в ЗКС в неопределенность получаемых оценок межгодовой и междекадной изменчивости ПТВ превосходит относительную

величину вклада неопределенности тепловой инерции климатической системы.

Сопоставление результатов, полученных на основе двухслойной и однослойной ЭБМ, показывает, что неучет поглощения тепла глубинными слоями океана приводит к существенному различию рассчитанных значений АФЧ и ОФЧ.

Дальнейшие исследования мы связываем с разработкой более реалистичной модели ЗКС и оцениванием на ее основе роли различных физических механизмов в формировании климатической изменчивости.

Авторы выражают глубокую признательность и благодарность П.Ф. Демченко за конструктивные и очень полезные дискуссии, имевшие место в процессе выполнения настоящей работы.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rozenwasser E., Yusupov R.* Sensitivity of automatic control systems. Boca Raton: CRC, 2000. 456 p.
2. *Гаскаров Д.В., Киселев В.Б., Солдатенко С.А. и др.* Введение в геофизическую кибернетику / Под ред. Юсупова Р.М. СПб: СПбГУ, 1998. 165 с.
3. *Soldatenko S.* Weather and climate manipulation as an optimal control for adaptive dynamical systems // *Complexity*. 2017. V. 2017. 4615072.
4. *Марчук Г.И., Скиба Ю.Н.* Роль сопряженных функций в изучении чувствительности модели теплового воздействия атмосферы и океана к вариациям входных данных // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана*. 1990. Т. 26. № 5. С. 451–460.
5. *Дымников В.П., Володин Е.М., Галин В.Я. и др.* Чувствительность климатической системы к малым внешним воздействиям // *Метеорология и гидрология*. 2004. № 4. С. 77–91.
6. *Пененко В.В.* Вариационные методы усвоения данных и обратные задачи для изучения атмосферы, океана и окружающей среды // *Сиб. журн. вычисл. матем.* 2009. Т. 12. № 4. С. 421–434.
7. *Soldatenko S., Yusupov R.* Parametric sensitivity in geoengineering and controlling the weather and climate // *WSEAS Transactions on Environment and Development*. 2015. V. 11. P. 289–301.
8. *Climate Change 2013: The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Fifth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change / Eds. Stocker T.F., Qin D., Plattner G.-K. et al.* Cambridge/New York: Cambridge University Press, 2013. 1535 p.
9. *Myhre G., Highwood E.J., Shine K.P., Stordal F.* New estimates of radiative forcing due to well mixed greenhouse gases // *Geophys. Res. Lett.* 1998. V. 25. P. 2715–2718.
10. *Myhre G.D., Shindell F.-M., Bréon W. et al.* Anthropogenic and natural radiative forcing supplementary material // *Climate Change 2013: The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Fifth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change / Eds. Stocker T.F., Qin D., Plattner G.-K. et al.* Cambridge/New York: Cambridge University Press, 2013. P. 659–740.
11. *Cox P.M., Huntingford C., Williamson M.S.* Emergent constraint on equilibrium climate sensitivity from global temperature variability // *Nature*. 2018. V. 553. P. 319–322.
12. *Bony S., Colman R.A., Kattsov V. et al.* How well do we understand and evaluate climate change feedback processes? // *J. Clim.* 2006. V. 19. P. 3445–3482.
13. *Boucher O., Randall D., Artaxo P. et al.* Clouds and aerosols // *Climate Change 2013: The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Fifth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change / Eds. Stocker T.F., Qin D., Plattner G.-K. et al.* Cambridge/New York: Cambridge University Press, 2013. P. 571–657.
14. *Collins M., Knutti R., Arblaster J. et al.* Long-term climate change: Projections, commitments and irreversibility // *Climate Change 2013: The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Fifth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change / Eds. Stocker T.F., Qin D., Plattner G.-K. et al.* Cambridge/New York: Cambridge University Press, 2013. P. 1029–1136.
15. *Flato G., Marotzke J., Abiodun B. et al.* Evaluation of climate models // *Climate Change 2013: The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Fifth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change / Eds. Stocker T.F., Qin D., Plattner G.-K. et al.* Cambridge/New York: Cambridge University Press, 2013. P. 741–866.
16. *Loeb N.G., Su W., Kato S.* Understanding climate feedbacks and sensitivity using observations of Earth's energy budget // *Current Climate Change Report*. 2016. V. 2. P. 170–178.
17. *Soden B., Held I.M.* An assessment of climate feedbacks in coupled ocean–atmosphere models // *J. Clim.* 2006. V. 19. P. 3354–3360.
18. *Gregory J.M., Ingram W.J., Palmer M.A. et al.* A new method for diagnosing radiative forcing and climate sensitivity // *Geophys. Res. Lett.* 2004. V. 31. L03205.
19. *Gregory J.M., Andrews T.* Variation in climate sensitivity and feedback parameters // *Geophys. Res. Lett.* 2016 V. 43. P. 3911–3920.
20. *Hansen J., Lacis A., Rind D. et al.* Climate sensitivity: Analysis of feedback mechanisms // *Climate processes and climate sensitivity / Eds. Hansen J.E., Taka-*

- hashi T. AGU Geophysical Monograph 29. Maurice Ewing Vol. 5. American Geophysical Union, 1984. P. 130–163.
21. *Karper H., Engler H.* Mathematics and climate. Philadelphia: SIAM, 2013. 295 p.
  22. *Roe G.* Feedbacks, timescales, and seeing red // *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.* 2009. V. 37. P. 93–115.
  23. *Kirtman B., Power S.B., Adedoyin J.A. et al.* Near-term Climate Change: Projections and Predictability // *Climate Change 2013: The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Fifth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change* / Eds. Stocker T.F., Qin D., Plattner G.-K. et al. Cambridge/New York: Cambridge University Press, 2013. P. 953–1028.
  24. *Taylor K.E., Stouffer R.J., Meehl G.A.* An overview of CMIP5 and the experiment design // *Bull. Amer. Meteor. Soc.* 2011. V. 93. P. 485–498.
  25. *Colman R.A., Power S.B.* What can decadal variability tell us about climate feedbacks and sensitivity? // *Clim. Dyn.* 2018. V. 51. P. 3815–3828.
  26. *Soldatenko S., Colman R.* Climate variability from annual to multi-decadal timescales in a two-layer stochastic energy balance model: analytic solutions and implications for general circulation models // *Tellus A.* 2019. V. 71. P. 1–15.
  27. *Von Storch H., Zwiers F.W.* Statistical analysis in climate research. New York: Cambridge University Press, 2001. 495 p.
  28. *Colman R.A., Power S.B.* Atmospheric feedbacks under unperturbed variability and transient climate change // *Clim. Dyn.* 2010. V. 34. P. 919–934.
  29. *Bellenger H., Guilyardi E., Leloup J. et al.* ENSO representation in climate models: From CMIP3 to CMIP5 // *Clim. Dyn.* 2014. V. 42. P. 1999–2018.
  30. *Ricke K.L., Caldeira K.* Maximum warming occurs about one decade after a carbon dioxide emission // *Environ. Res. Lett.* 2014. V. 9. 124002
  31. *Liu Z.* Dynamics of interdecadal climate variability: A historical perspective // *J. Clim.* 2012. V. 25. P. 1963–1995.
  32. *Семенов В.А.* Колебания современного климата, вызванные обратными связями в системе атмосфера — арктические льды — океан // *Фундаментальная и прикладная климатология.* 2015. Т. 1. С. 232–248.
  33. *Power S.B., Delage F.P.D.* El Niño–Southern Oscillation and associated climatic conditions around the world during the latter half of the twenty-first century // *J. Clim.* 2018. V. 31. P. 6189–6207.
  34. *Middlemas E., Clement A.* Spatial patterns and frequency of unforced decadal scale changes in global mean surface temperature in climate models // *J. Clim.* 2016. V. 29. P. 6245–6257.
  35. *Hasselmann K.* Stochastic climate models. Part I. Theory // *Tellus.* 1976. V. 28. P. 473–485.
  36. *Gregory J.M.* Vertical heat transport in the ocean and their effect on time-dependent climate change // *Clim. Dyn.* 2000. V. 16. P. 501–515.
  37. *Held I.M., Winton M., Takahashi K., Delworth T., Zeng F., Vallis G.K.* Probing the fast and slow components of global warming by returning abruptly to pre-industrial forcing // *J. Clim.* 2010. V. 23. P. 2418–2427.
  38. *Geoffroy O., Saint-Martin D., Olivié D.J.L., Volodroie A., Bellon G., Tytécá S.* Transient climate response in a two-layer energy-balance model. Part I: Analytical solution and parameter calibration using CMIP5 AOGCM experiments // *J. Clim.* 2012. V. 26. P. 1841–1857.
  39. *Гинзбург А.С., Демченко П.Ф.* Обратные связи энергопотребления и климата урбанизированных территорий // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана.* 2017. Т. 53. № 5. С. 556–564.
  40. *Демченко П.Ф., Кислов А.В.* Стохастическая динамика природных объектов. Броуновское движение и геофизические примеры. М.: ГЕОС, 2010. 190 с.
  41. *Солдатенко С.А., Юсупов Р.М.* Оптимальное управление аэрозольными эмиссиями в стратосферу для стабилизации климата Земли // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана.* 2018. Т. 54. № 5. С. 566–574.
  42. *Солдатенко С.А., Юсупов Р.М.* Чувствительности нульмерной климатической модели и ее обратные связи в контексте проблемы управления погодой и климатом Земли // *Тр. СПИИРАН.* 2017. Т. 52. С. 5–31.
  43. *Leith C.E.* The standard error of time-average estimates of climate means // *J. Appl. Meteorol.* 1973. V. 12. P. 1066–1069.
  44. *Демченко П.Ф., Семенов В.А.* Оценка неопределенности климатических трендов приповерхностной температуры, связанной с внутренней динамикой атмосферы // *Доклады РАН.* 2017. Т. 476. № 3. С. 339–342.
  45. *Heinz S.* Mathematical modelling. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2011. 460 p.
  46. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей. М.: Высшая школа, 1999. 576 с.
  47. *Schwartz S.E.* Heat capacity, time constant, and sensitivity of Earth's climate system // *J. Geophys. Res.* 2007. V. 112. D24S05.
  48. *Hall A., Manabe S.* Can local linear stochastic theory explain sea surface temperature and salinity variability? // *Clim. Dyn.* 1997. V. 13. P. 167–180.

## Estimating the Influence of Thermal Inertia and Feedbacks in the Atmosphere–Ocean System on the Variability of Global Surface Temperature

S. A. Soldatenko, R. M. Yusupov

*Saint Petersburg Institute for Informatics and Automation of RAS  
14 Line, Vasilyevskiy ostrov, 39, St. Petersburg, 199178, Russia  
e-mail: soldatenko@iias.spb.su*

Received: 24.04.2019

Accepted: 07.08.2019

The present climate is characterized not only by the trend due to the increase in the concentrations of greenhouse gases in the atmosphere, but also by fluctuations covering a wide range of frequencies and scales. The global climate variability, calculated via the computational results from the Coupled Model Intercomparison Project Phase 5 of the World Climate Research Program, show significant inter-model differences. In particular, inter-model distinctions in decadal anomalies of the global and hemispheric temperatures reach four times the value. However, unlike the inter-model differences in climate sensitivity, the reasons for a wide range of estimates of climate variability are still unclear. Based on the two-component energy-balance stochastic model, the paper analyzes the inter-annual and inter-decadal variability of the mean global surface temperature (GST) to feedback and the thermal inertia of the atmosphere-ocean system, assuming that the external forcing is random fluctuations of the radiation balance at the top of the atmosphere. Using the obtained absolute and relative sensitivity functions, the influence of thermal inertia and feedbacks in the climate system on the inter-annual and inter-decadal variability (variance) of the GST and its spectrum is estimated.

**Keywords:** climate variability, climate sensitivity, feedbacks, thermal inertia, Fokker–Planck equation, sensitivity functions.