

УДК 551.5: 532.5

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ВИХРЕВЫЕ ДОРОЖКИ В СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЯХ

© 2019 г. М. В. Калашник^{1, 2*}, О. Г. Чхетиани^{1**}

¹Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН
119017, Москва, Пыжевский пер., 3

²ФГБУ НПО «Тайфун»
249038, Обнинск, Калужская обл., ул. Победы, 4
E-mail: *kalashnik-obn@mail.ru, **lgg@ifaran.ru

Поступила в редакцию 02.07.2019 г.
Принята к печати 07.08.2019 г.

Вихревыми дорожками называют пространственно периодические системы вихрей, формирующиеся за счет неустойчивости сдвиговых течений. В работе построен ряд точных и асимптотических решений уравнений двумерной гидродинамики, описывающих нестационарные вихревые дорожки. Показано, что суперпозиция течения с постоянным горизонтальным сдвигом и его возмущения в форме немодальной волны дает точное решение, описывающее нестационарную вихревую дорожку с вращающимися эллиптическими линиями тока. Определена ширина полосы, заключающей вихревую дорожку, получено уравнение сепаратрисы, отделяющей вихревые ячейки с замкнутыми линиями тока от внешнего меандрирующего течения. В рамках уравнения переноса потенциальной завихренности изучено влияние квазидвумерной сжимаемости и бета-эффекта на динамику вихревых дорожек. С использованием длинноволнового приближения построены решения, описывающие формирование вихревых дорожек в ходе развития неустойчивости зонального периодического течения и свободного слоя сдвига.

Ключевые слова: вихревые дорожки, гидродинамическая неустойчивость, сдвиговые течения, функция тока, горизонтальный сдвиг, бета-эффект, периодические течения, свободный слой сдвига.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0002-3515556127-138>

ВВЕДЕНИЕ

Пространственно периодические системы вихрей, формирующиеся за счет неустойчивости сдвиговых течений, называют вихревыми дорожками. Отличительная особенность их структуры состоит в наличии сепаратрис, отделяющих замкнутые вихревые ячейки от внешнего меандрирующего потока. Вихревые дорожки часто наблюдаются на спутниковых фотографиях атмосферы Земли, например, в форме неподвижной системы крупномасштабных циклонов над Антарктидой или движущейся системы облачных кластеров в районе Внутритропической зоны конвергенции (ВЗК) [1–3]. В атмосферах планет гигантов отдельные системы крупномасштабных дорожек получили специальное название — Белые и Коричневые овалы (баржи) в атмосфере Юпитера [4, 5]. Ярким примером мелкомасштабных вихревых дорожек являются дорожки Кармана, возникающие при обтекании изоли-

рованных островов в океане. Теоретическому и экспериментальному исследованию этих дорожек посвящена обширная литература [6, 7]. Следует также отметить океанические вихревые дорожки (системы рингов), возникающие в районе Гольфстрима или в районах интенсивных вдольбереговых течений [3].

Изучение структуры вихревых дорожек, как правило, проводится в рамках лабораторного или численного моделирования процессов гидродинамической неустойчивости [3, 8–12]. В теоретических исследованиях используется восходящее к Карману представление вихревой дорожки посредством периодической системы сингулярных (точечных) вихрей [13]. На этом пути были построены аналитические решения уравнений гидродинамики, обобщающие вихревое решение Кармана на случай вращающейся и стратифицированной (двухслойной или многослойной) жидкости [14]. За пределами представления Кармана фактически известно лишь одно точное аналитическое решение,

описывающее стационарную вихревую дорожку в свободном слое сдвига [15, 16]. Это решение, отвечающее периодическому течению с завихренностью, пропорциональной экспоненте от функции тока, часто приводят для иллюстрации формирования вихревой структуры типа «кошачий глаз».

Настоящая работа посвящена построению и анализу точных и асимптотических решений уравнений гидродинамики, описывающих нестационарные вихревые дорожки в горизонтально неоднородных двумерных течениях. Течение с постоянным горизонтальным сдвигом и его возмущение в форме немодальной волны с переменными параметрами (амплитудой и фазой) рассматривается в разделе 2. Суперпозиция течения и возмущения дает точное решение 2D-уравнений Эйлера, описывающее вихревую дорожку с переменной амплитудой и вращающимися эллиптическими линиями тока. Обобщение этого точного решения на случай квазигеострофических движений вращающегося слоя мелкой воды представлено в разделе 3. Новые особенности динамики вихревых дорожек здесь связаны с бета-эффектом и эффектом деформации свободной поверхности (квазидвумерной сжимаемости). В то время как бета-эффект приводит к перемещению вихревой дорожки как целого, со вторым эффектом связано появление длительной стадии, на которой амплитуда вихрей практически постоянна и вращение линий тока отсутствует. В заключительных разделах статьи построены асимптотические решения, описывающие формирование вихревых дорожек на начальной стадии развития неустойчивости пространственно периодических течений и свободного слоя сдвига. Построение решений проведено в рамках длинноволнового приближения с привлечением интегрального соотношения, восходящего к работам Сивашинского и др. [17, 18].

ВИХРЕВЫЕ ДОРОЖКИ В ДВУМЕРНОМ ТЕЧЕНИИ С ПОСТОЯННЫМ ГОРИЗОНТАЛЬНЫМ СДВИГОМ

В данном разделе рассматриваются двумерные движения идеальной несжимаемой жидкости. Их динамика описывается уравнением переноса завихренности

$$q_t + \psi_x q_y - \psi_y q_x = 0, \quad q = \Delta \psi, \quad (1)$$

где ψ — функция тока, $u = -\psi_y$, $v = \psi_x$ — компоненты скорости, $\Delta \psi = \psi_{xx} + \psi_{yy}$ — двумерный

оператор Лапласа. Точное стационарное решение уравнения (1)

$$\bar{\psi}(y) = -u_0 y - \Lambda y^2 / 2, \quad \bar{u}(y) = u_0 + \Lambda y, \quad (2)$$

отвечает течению с постоянной средней скоростью u_0 и постоянным горизонтальным сдвигом Λ . Завихренность течения $\bar{q}(y) = -\Lambda = \text{const}$. Для определенности, далее рассматривается случай $\Lambda > 0$.

Полагая в (1) $\psi = \bar{\psi}(y) + \psi'(x, y, t)$, для описания нелинейной динамики возмущений течения (2) получим уравнение

$$q'_t + (u_0 + \Lambda y)q'_x + \psi'_x q'_y - \psi'_y q'_x = 0, \quad q' = \Delta \psi'. \quad (3)$$

Будем искать решение (3) в форме гармонической волны с переменными параметрами

$$\psi' = a(t) \cos \theta, \quad \theta = \theta(x, y, t) = kx + l(t)y - p(t). \quad (4)$$

Здесь $a(t)$ и $l(t)$ — переменные амплитуда и поперечное волновое число, $p(t)$ — фазовая функция, связанная с локальной частотой волны $\omega(t)$ соотношением $\omega(t) = dp/dt$. Для решений (4) входящий в уравнение (3) якобиан тождественно обращается в ноль и подстановка (4) в (1) приводит к уравнению

$$\cos(\theta) \frac{d}{dt} \left(\kappa^2(t) a(t) \right) + \sin(\theta) \kappa^2(t) a(t) \left(\frac{dp}{dt} - u_0 k \right) - \kappa^2(t) a(t) y \left(\frac{dl}{dt} + \Lambda k \right) = 0, \quad (5)$$

где $\kappa^2(t) = k^2 + l^2(t)$ — квадрат модуля волнового вектора. Из (5) следует система уравнений для нахождения параметров

$$\frac{d}{dt} \left(\kappa^2(t) a(t) \right) = 0, \quad \frac{dl}{dt} = -\Lambda k, \quad \frac{dp}{dt} = u_0 k, \quad (6)$$

откуда

$$a(t) = \frac{\kappa^2(0)}{\kappa^2(t)} a(0), \quad l = l(t) = l(0) - \Lambda kt, \\ p(t) = p(0) + u_0 kt. \quad (7)$$

Согласно (7), волновое число $l(t)$ линейно зависит от времени. Эта зависимость приводит к вращению линий постоянной фазы θ вокруг горизонтальной оси. При положительных значениях волновых чисел k , $l(0)$ амплитуда волны $a(t)$ сначала растет, в момент времени $t = t_m = l(0)/\Lambda k$ достигает максимального значения $a_m = \sqrt{1 + r^2(0)} a(0)$, $r(0) = l(0)/k$, и далее, на больших временах, затухает как t^{-1} .

Поскольку (4) есть точное решение уравнения для возмущений (3), суперпозиция этого решения и фонового потока

$$\psi = \bar{\psi}(y) + \psi' = -u_0 y - \Lambda y^2 / 2 + a(t) \cos(kx + l(t)y - p(t)), \quad (8)$$

есть точное решение нелинейного уравнения (1). Как показано ниже, решение (8) описывает нестационарную вихревую дорожку в сдвиговом потоке.

В исследовании (8) используем стандартный анализ функции $\psi = \psi(x, y, t)$ на экстремум. В фиксированный момент времени стационарные точки (8) находятся из системы уравнений

$$\begin{aligned} \psi_x &= -a(t)k \sin \theta = 0, \\ \psi_y &= -u_0 - \Lambda y - a(t)l(t) \sin \theta = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Из (9) следует $\sin \theta = 0$, и для стационарных точек (x_*, y_*) получим

$$kx_* = \pi n + l(0)\Lambda^{-1}u_0 + p(0), \quad y_* = -u_0 / \Lambda, \quad (10)$$

где $n = 0 \pm 1 \pm 2, \dots$. Обратим внимание, что координаты точек не зависят от времени. Это связано с вытекающим из системы (6) законом сохранения $dJ/dt = 0$, $J = \Lambda p(t) + u_0 l(t)$.

Характер стационарных точек определяется знаком определителя матрицы второго дифференциала $\delta = AC - B^2$, где $A = \psi_{xx}$, $C = \psi_{yy}$, $B = \psi_{xy}$. С учетом $\cos(\pi n) = (-1)^n$, из выражения (8) следует

$$\begin{aligned} A = \psi_{xx} &= -a(t)k^2 \cos \theta = -a(t)k^2(-1)^n, \\ B = \psi_{xy} &= -a(t)kl(t)(-1)^n, \\ C = \psi_{yy} &= -\Lambda - a(t)l^2(t) \cos \theta = \\ &= -\Lambda - a(t)l^2(t)(-1)^n, \end{aligned} \quad (11)$$

и $\delta = AC - B^2 = a(t)\Lambda k^2(-1)^n$. Достаточное условие экстремума $\delta > 0$ выполняется при $n = 2j$. Таким образом, с учетом $A < 0$, стационарные точки (10) при четных значениях n являются точками максимума, причем значение функции тока в этих точках $\psi_* = \psi_{\max} = a(t) + u_0^2 / 2\Lambda$.

В соответствии с общей теорией, в небольшой окрестности точек экстремума все изолинии функции тока $\psi(x, y, t) = c = \text{const}$ являются замкнутыми кривыми (в фиксированный момент времени). Поскольку вектор скорости касается этих кривых (линий тока), имеет место движение вокруг центров вихрей с координатами (x_*, y_*) (10), отвечающее вихревой дорожке. Асимптотические уравнения замкнутых линий

тока следуют из разложения (8) в ряд Тейлора в окрестности центров

$$\psi = \psi_* + \frac{1}{2} \left(A(x - x_*)^2 + 2B(x - x_*)(y - y_*) + C(y - y_*)^2 \right). \quad (12)$$

Смещая начало координат в центр, и, переходя далее к системе координат (x_1, y_1) , повернутой на угол α , где $\text{tg}(2\alpha) = 2B / (A - C)$, из (12) получим

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_* - \frac{1}{2} (\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2) \\ \lambda_{1,2} &= -(1/2) \left(A + C \mp \sqrt{(A - C)^2 + 4B^2} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Непосредственно из (13) следует, что в повернутой системе координат и в окрестности центров изолинии функции тока являются эллипсами с отношением полуосей $\lambda_1 / \lambda_2 = \lambda_1^2 / \delta$. Поскольку $\delta \sim \Lambda^{-1} a(0) \kappa^2(0) t^{-2}$, $\lambda_1 \sim -(A + C) = a(0) \kappa^2(0) + \Lambda$ при $t \rightarrow \infty$, на больших временах отношение полуосей $\lambda_1 / \lambda_2 \rightarrow \infty$, т.е. эллипсы, непрерывно вращаясь, сжимаются вдоль малой оси.

Замкнутые изолинии функции тока отделены от незамкнутых изолиний сепаратрисой. Выделяя в (8) полный квадрат

$$\psi = -\frac{\Lambda}{2} \left(y + \frac{u_0}{\Lambda} \right)^2 + a(t) \cos \theta + \frac{u_0^2}{2\Lambda}, \quad (14)$$

и, полагая в уравнении $\psi(x, y, t) = c$ зависящую от времени константу $c = (u_0^2 / 2\Lambda) - a(t)$ (минимальное значение суммы последних двух слагаемых (14)), найдем точное уравнение сепаратрисы в произвольный момент времени

$$(y - y_*)^2 = 2\Lambda^{-1} a(t) (1 + \cos \theta). \quad (15)$$

В частности, в отсутствие среднего течения $u_0 = 0$ (когда $y_* = 0$), уравнение сепаратрисы $y^2 = 2\Lambda^{-1} a(t) (1 + \cos \theta)$. Из уравнения (15) следует, что вихревая дорожка заключена в горизонтальной полосе $|y - y_*| < L(t)$, где

$$L(t) = 2\sqrt{\Lambda^{-1} a(t)} = 2 \frac{\kappa(0)}{\kappa(t)} \sqrt{\frac{a(0)}{\Lambda}}. \quad (16)$$

Поскольку полуширина полосы $L(t)$ пропорциональна корню из амплитуды, она достигает максимума в момент времени $t = t_m = l(0) / \Lambda k$ и далее со временем убывает как $t^{-1/2}$. В фиксированный момент времени полуширина $L(t)$ обратно пропорциональна корню из сдвига, т.е. чем больше сдвиг Λ , тем меньше полуширина области, занятой вихрями.

Таким образом, точное решение (8) (волна плюс фоновый поток) описывает вихревую

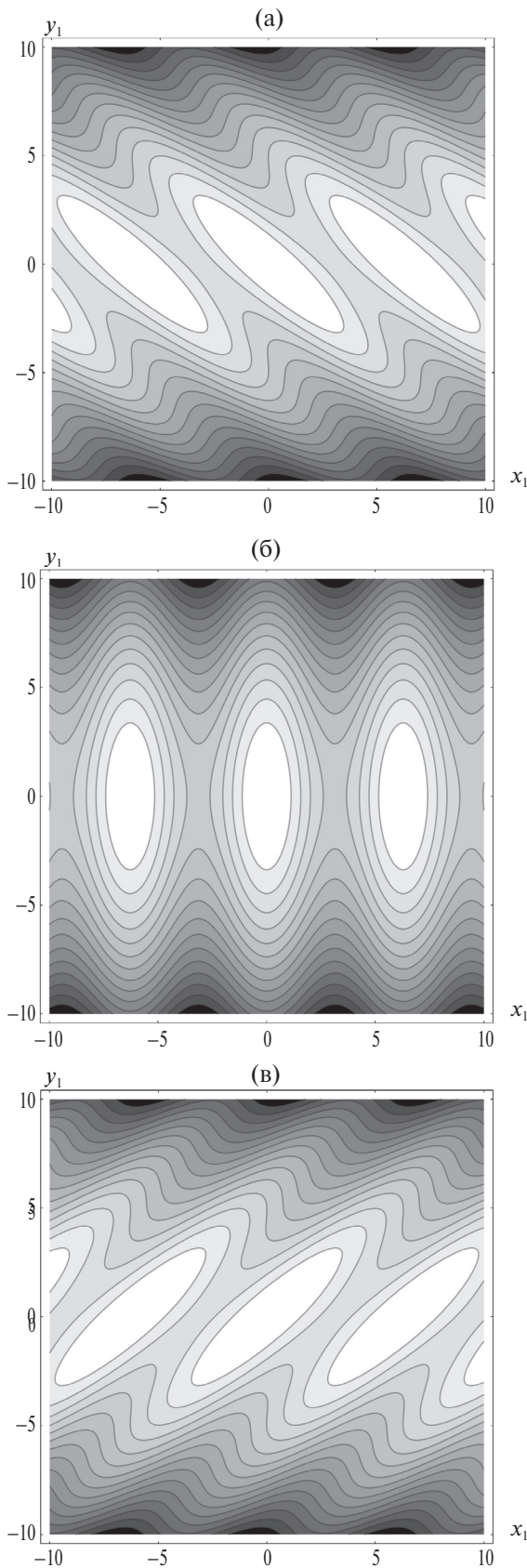


Рис. 1. Теневые картины изолиний поля безразмерной функции тока ψ_1 для трех моментов времени: (а) $\tau = 0$; (б) $\tau = 1$; (в) $\tau = 2$.

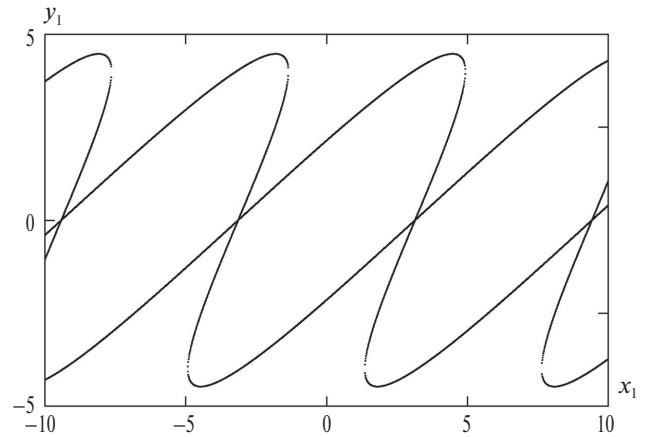


Рис. 2. Положение сепаратрисы в момент времени $\tau = 2$.

дорожку в течении с постоянным горизонтальным сдвигом. Подчеркнем, что в этой дорожке неподвижные центры вихрей (10) лежат на линии смены знака фоновой скорости $\bar{u}(y)$, а ограничивающие вихри замкнутые линии тока сжимаются и вращаются вокруг горизонтальной оси.

Для графического изображения поля функции тока удобно записать выражение (8) в безразмерных переменных. Так, с учетом выражения для амплитуды и в случае $u_0 = 0$, безразмерная форма (8)

$$\psi_1(x_1, y_1, \tau) = -\alpha y_1^2 + \frac{1+r_0^2}{1+r^2(\tau)} \cos(x_1 + r(\tau)y_1),$$

$$r(\tau) = r_0 - \tau, \quad r_0 = l(0)/k.$$

Здесь $x_1 = kx$, $y_1 = ky$, $\tau = \Lambda t$ — безразмерные координаты и время, $\psi_1 = \psi/d$, $d = (1+r_0^2)a(0)$, $\alpha = \Lambda/2k^2d$ — безразмерный параметр, характеризующий влияние сдвига. Теневые картины изолиний безразмерной функции тока ψ_1 для трех моментов времени $\tau = 0, 1, 2$ и значений параметров $r_0 = 1$, $\alpha = 0.05$ приведены на рис. 1. Данный рисунок иллюстрирует динамику вихревой дорожки. При $u_0 = 0$, уравнение сепаратрисы (15) в безразмерных переменных можно записать в виде $\alpha y_1^2 = 2(1+r^2(\tau))^{-1} \cos^2(\theta/2)$. Ее положение в момент времени $\tau = 2$ показано на рис. 2.

Формирование вихревых дорожек происходит и в присутствии вязкости, учет которой осуществляется добавлением в правую часть уравнения (3) слагаемого $\nu \Delta q'$, где ν — коэффициент вязкости. Соответствующее уравнение также имеет точное решение в форме волны (4). Вязкость не влияет на динамику волнового числа $l(t)$, однако приводит к дополнительному

затуханию амплитуды, которая удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}(\kappa^2(t)a(t)) + \nu \kappa^4(\tau)a(t) = 0.$$

Переходя к безразмерному времени $\tau = \Lambda t$ и делая замену $a_1 = \kappa^2 a$, уравнение можно записать в виде $da_1/d\tau + R(1 + (r_0 - \tau)^2)a_1 = 0$, где $r_0 = l(0)/k$ и безразмерный параметр $R = \nu k^2/\Lambda$ является аналогом обратного числа Рейнольдса. Решение последнего уравнения $a_1(\tau) = a_1(0)\exp(-Rh(\tau))$, $h(\tau) = \tau + (1/3)((\tau - r_0)^3 + r_0^3)$, описывает затухание амплитуды волны за счет вязкости. Поскольку вязкость не приводит к изменению фонового потока (2), суперпозиция этого потока и волны (4) также дает точное решение, отвечающее вихревой дорожке.

Завершая данный раздел, отметим, что волновые решения (4) ранее рассматривались в контексте линейной теории устойчивости для иллюстрации так называемого немодального роста энергии возмущений [19–21]. В данном разделе показано, что каждое решение (4) в действительности есть точное решение и что наложение этого решения (немодальной волны) на фоновый поток приводит к формированию вихревой дорожки.

ВИХРЕВЫЕ ДОРОЖКИ В СДВИГОВОМ ТЕЧЕНИИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ СЛОЯ МЕЛКОЙ ВОДЫ

Квазигеострофические движения вращающегося слоя мелкой воды описываются уравнением переноса потенциальной завихренности (уравнением Чарни–Обухова) [22, 23]

$$q_t + \psi_x q_y - \psi_y q_x = 0, \\ q = \Delta\psi - L_R^{-2}\psi + \beta y. \quad (17)$$

Здесь ψ — геострофическая функция тока, пропорциональная отклонению глубины η от невозмущенного значения H , $u = -\psi_y$, $v = \psi_x$ — компоненты скорости, $L_R = \sqrt{gH}/f$ — радиус деформации Россби. Первые два слагаемых в выражении для q (17) описывают соответственно вклад в потенциальную завихренность относительного вихря и деформации свободной поверхности. Радиус деформации представляет масштаб, для которого оба вклада сопоставимы. Последнее слагаемое учитывает так называемый бета-эффект, обусловленный слабой горизонтальной неоднородностью распределения пол-

ной глубины или неоднородностью распределения параметра Кориолиса.

Как и ранее, рассматриваем течение с горизонтальным сдвигом (2), которое является точным решением (17). Нелинейная динамика возмущений течения описывается уравнением

$$q'_t + (u_0 + \Lambda y)q'_x + \bar{q}_y \psi'_x + (\psi'_x q'_y - \psi'_y q'_x) = 0, \\ \bar{q}_y = \beta + k_R^2 u_0 + \Lambda k_R^2 y, k_R = L_R^{-1}. \quad (18)$$

Принципиальное отличие уравнения (18) от уравнения (3) состоит в наличии слагаемого, пропорционального градиенту \bar{q}_y . В математическом плане с этим слагаемым связано появление волн Россби и ряда новых особенностей динамики вихревых дорожек.

Точное решение (18) ищем в форме немодальной волны (4). Подстановка (4) в (18) приводит к системе уравнений для нахождения параметров волны

$$\frac{d}{dt}(K^2(t)a(t)) = 0, \frac{dl}{dt} = -\Lambda k \frac{\kappa^2(t)}{K^2(t)}, \\ \frac{dp}{dt} = \frac{k}{K^2(t)}(u_0 \kappa^2(t) - \beta), \quad (19)$$

где $\kappa^2(t) = k^2 + l^2(t)$ и $K^2(t) = \kappa^2(t) + k_R^2$. При $k_R = \beta = 0$ система (19) сводится к системе (6).

Как и ранее, суперпозиция фонового потока и немодальной волны дает точное решение (8), описывающее вихревую дорожку. В отсутствие бета-эффекта, образующие дорожку эллиптические вихри с неподвижными центрами (10) вращаются вокруг горизонтальной оси. Временная динамика этого процесса, однако, сильно меняется. Действительно, обозначая $r(t) = l(t)/k$ и переходя к безразмерному времени $\tau = \Lambda t$, уравнение для поперечного волнового числа в (19) можно свести к уравнению

$$\frac{dr}{d\tau} + \frac{1+r^2}{1+r^2+F} = 0, \quad (20)$$

где параметр $F = k_R^2/k^2$ есть квадрат отношения длины волны к радиусу деформации. Решение (20) с начальным условием $r(0) = r_0 = l(0)/k$, записывается в неявном виде

$$r(\tau) + F \operatorname{arctg}(r(\tau)) = r_0 + F \operatorname{arctg}(r_0) - \tau. \quad (21)$$

При $F \ll 1$ из (21) следует практически линейная зависимость волнового числа $l(t)$ от времени (как и в случае двумерных движений $L_R = \infty$). При умеренных и больших значениях F появляется важная особенность — достигая нулевого значения, волновое число в течение долгого

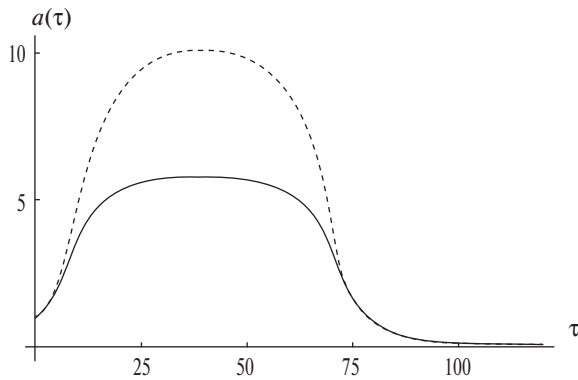


Рис. 3. Зависимость от безразмерного времени нормированной амплитуды $a(\tau)/a(0)$ для значения $F = 10$ (пунктир) и $F = 20$ (сплошная линия).

времени практически не меняется со временем. Соответственно, не меняется и амплитуда $a(t) = K^2(0)a(0)/K^2(t)$ (рис. 3).

Таким образом, в ситуации, когда длина волны сопоставима с радиусом деформации, существует длительная стадия практически постоянных значений волнового числа ($l(t) \sim 0$) и амплитуды ($a(t) \sim (1 + (1 + F^2)^{-1} r_0^2) a(0)$). Этой стадии отвечает формирование квазистационарной вихревой дорожки. Оси симметрии эллиптических вихрей в этой дорожке строго горизонтальны и вертикальны, полуширина вихревой полосы $L(t) = 2\sqrt{\Lambda^{-1}a(t)}$ отвечает максимальному значению амплитуды (достигаемому в момент времени $t = t_m = l(0)/\Lambda k$). Качественная картина линий тока подобна картине, представленной на средней панели рис. 1. Подчеркнем, что формирование квазистационарной дорожки связано исключительно с эффектом деформации свободной поверхности.

Поскольку в уравнение (20) не входит параметр β , бета-эффект не оказывает влияния на динамику волнового числа и амплитуды. Вместе с тем, этот эффект приводит к перемещению вихревой дорожки как целого. Действительно, формулы для координат центров вихрей (экстремумов функции тока (8)) можно записать в виде

$$kx_* = \pi n + \Lambda^{-1}J(t), \quad y_* = -u_0/\Lambda, \quad (22)$$

где $J(t) = l(t)u_0 + \Lambda p(t)$. Из второго и третьего уравнений системы (19) следует $dJ/dt = -\Lambda k\beta/K^2(t)$. С учетом (22), для скорости перемещения центров вихревой дорожки вдоль горизонтальной оси получим

$$\frac{dx_*}{dt} = (k\Lambda)^{-1} \frac{dJ}{dt} = -\frac{\beta}{K^2(t)}. \quad (23)$$

Таким образом, вихревая дорожка распространяется на запад, причем скорость перемещения, пропорциональная амплитуде, достигает максимума при $t = t_m$ и далее монотонно стремится к нулю.

Отметим отличия в направлении распространения волн Россби и вихревых дорожек. Для классических волн Россби, существующих в отсутствие сдвига $\Lambda = 0$, из последнего уравнения системы (19) следуют известные выражения для частоты волны $\omega = dp/dt$ и фазовой скорости $c_{ph} = \omega/k = (u_0\kappa^2 - \beta)/K^2$. Согласно последнему выражению, короткие волны Россби ($\kappa^2 > \beta/u_0$) распространяются на восток, длинные волны ($\kappa^2 < \beta/u_0$) — на запад. Вихревые дорожки всегда распространяются на запад, причем на квазистационарной стадии их скорость перемещения практически постоянна и равна $-\beta/(k^2 + k_R^2)$. Обратим внимание, что, в отличие от волн Россби, скорость перемещения дорожек не зависит от средней скорости потока u_0 . Примеры распространяющихся на запад вихревых дорожек в атмосфере представлены в [1].

ВИХРЕВЫЕ ДОРОЖКИ В ПРОСТРАНСТВЕННО ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЯХ

В данном разделе построены асимптотические решения, описывающие формирование вихревых дорожек на начальной стадии развития неустойчивости пространственно периодических течений идеальной жидкости. Удобно проводить рассмотрение в безразмерных переменных, считая характерную скорость течений U , а горизонтальный масштаб (период) $2\pi L$. Принимая в качестве масштабов координат, времени и функции тока соответственно L , L/U , LU , для описания динамики течений получим уравнение (1), которое запишем в форме

$$(\Delta\psi)_t + [\psi, \Delta\psi] = 0. \quad (24)$$

Здесь квадратными скобками обозначен якобиан $[A, B] = A_x B_y - B_y A_x$.

Для 2π периодических по координате y течений из уравнения (24) следует важное интегральное соотношение. Определим операцию осред-

нения по периоду 2π : $\langle A \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A dy$. Записывая якобиан в дивергентной форме $[\psi, \Delta\psi] = (\psi_x \Delta\psi)_y -$

$-(\psi_y \Delta \psi)_x$ и применяя к (24) операцию осреднения, получим соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \psi_{xx} \rangle - \frac{\partial}{\partial x} \langle \psi_y \psi_{xx} \rangle = 0. \quad (25)$$

которое, после понижение порядка по координате, также можно записать в виде

$$\left(\langle \psi_x \rangle \right)_t = \langle \psi_y \psi_{xx} \rangle. \quad (26)$$

Аналоги соотношений (25), (26) (применительно к уравнениям для возмущений) использовались Сивашинским и др. в исследованиях устойчивости периодических течений [17, 18].

Будем искать низкочастотные и длинноволновые по координате x решения уравнения (24), удовлетворяющие условию (26). Перейдем в (24) к «медленным» переменным $\tau = \varepsilon t$, $\xi = \varepsilon x$, где $\varepsilon \ll 1$ — малый параметр, и представим функцию тока в форме асимптотического разложения $\psi = \psi^{(0)} + \varepsilon \psi^{(1)} + \dots$. С учетом $\Delta \psi = \psi_{yy} + \varepsilon^2 \psi_{\xi\xi}$, для нулевого члена разложения получим уравнение (верхний индекс опускаем)

$$(\psi_{yy})_\tau + \psi_\xi (\psi_{yy})_y - \psi_y (\psi_{yy})_\xi = 0. \quad (27)$$

К этому уравнению присоединяется соотношение

$$\left(\langle \psi_\xi \rangle \right)_\tau = \langle \psi_y \psi_{\xi\xi} \rangle, \quad (28)$$

следующее из соотношения (26).

Как и исходное уравнение (24), уравнение (27) имеет точное стационарное решение $\psi = F(y)$, где $F(y)$ — 2π -периодическая функция. Примерами таких функций являются $F(y) = \exp(\sin y)$, $F(y) = \tanh(\sin y)$ и, в общем случае, $F(y) = \Phi(\sin y)$, где $\Phi(z)$ — произвольная функция. Каждое стационарное решение описывает зональное (направленное вдоль горизонтальной оси) периодическое течение. Случай $F(y) = \sin y$ отвечает так называемому невязкому течению Колмогорова с профилем скорости $u = -\cos y$.

Важная особенность состоит в том, что нелинейные уравнения (27), (28) имеют класс точных нестационарных решений вида

$$\begin{aligned} \psi(\xi, y, t) &= F(\theta) + c(\xi, \tau), \\ \theta &= y + \varphi(\xi, \tau), \end{aligned} \quad (29)$$

где функции $\varphi(\xi, \tau)$, $c(\xi, \tau)$ удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\begin{aligned} \varphi_\tau + c_\xi &= 0, \quad c_\tau - m^2 \varphi_\xi = 0, \\ m^2 &= \langle F'^2(\theta) \rangle. \end{aligned} \quad (30)$$

Это устанавливается непосредственной проверкой. Так, подстановка представления (29) в уравнение (27) приводит к уравнению

$$F'''(\theta) \varphi_\tau + (F'(\theta) \varphi_\xi + c_\xi) F'''(\theta) - F'(\theta) F'''(\theta) \varphi_\xi = 0,$$

из которого, после сокращений, следует первое уравнение (30). Прямое вычисление входящих в правую часть соотношения (29) производных дает

$$\psi_y \psi_{\xi\xi} = F'(\theta) F''(\theta) \varphi_\xi^2 + F'^2(\theta) \varphi_{\xi\xi} + F'(\theta) c_{\xi\xi}.$$

Отсюда, после осреднения $\langle \psi_y \psi_{\xi\xi} \rangle = \langle F'^2(\theta) \rangle \varphi_{\xi\xi}$. Аналогичное осреднение левой части, после понижения порядка дает второе уравнение (30).

Каждое нестационарное решение (29) можно рассматривать как возмущенную форму стационарного решения $\psi = F(y)$ и интерпретировать в терминах нелинейной теории устойчивости стационарных периодических течений. В отличие от стандартной линейной теории устойчивости, где фигурирует только аддитивное возмущение $c(\xi, \tau)$, в решениях (29) учитывается также возмущение фазы $\varphi(\xi, \tau)$.

Система (30) сводится к одному уравнению $c_{\tau\tau} + m^2 c_{\xi\xi} = 0$, которое имеет экспоненциально растущие решения $c \sim \exp(\gamma t) \exp(ikx)$, где $\gamma^2 = (mk)^2$. Решение системы (30) с начальными условиями $\varphi(\xi, 0) = \varphi_0 \sin(k\xi)$, $c(\xi, 0) = c_0 \cos(k\xi)$ записывается в виде

$$\begin{aligned} \varphi(\xi, \tau) &= \tilde{\varphi}(\tau) \sin(k\xi), \quad c(\xi, \tau) = \tilde{c}(\tau) \cos(k\xi), \\ \tilde{\varphi}(\tau) &= \varphi_0 \cosh(\gamma\tau) + (c_0 / m) \sinh(\gamma\tau), \quad \gamma = mk, \\ \tilde{c}(\tau) &= m\varphi_0 \sinh(\gamma\tau) + c_0 \cosh(\gamma\tau). \end{aligned} \quad (31)$$

Непосредственно из (31) следует существование неустойчивости периодического течения с инкрементом нарастания возмущений $\gamma = mk$. В частности, для невязкого течения Колмогорова $F(\theta) = \sin(\theta)$, $m^2 = \langle F'^2(\theta) \rangle = \langle \cos^2(\theta) \rangle = 1/2$ и инкремент нарастания возмущений $\gamma = k / \sqrt{2}$. Отвечающее этому течению нестационарное решение (29) для функции тока имеет вид

$$\psi(\xi, y, t) = \sin(y + \tilde{\varphi}(\tau) \sin(k\xi)) + \tilde{c}(\tau) \cos(k\xi). \quad (32)$$

Теневые картины изолиний функции тока (32) для трех моментов времени $\tau = 0, 2, 4$ и в ситуации, когда начальное аддитивное отклонение отсутствует ($c_0 = 0$, $\varphi_0 = 0.1$) представлены на рис. 4. Как видно, в ходе развития неустойчивости формируются периодические системы замкнутых вихревых ячеек, отделен-

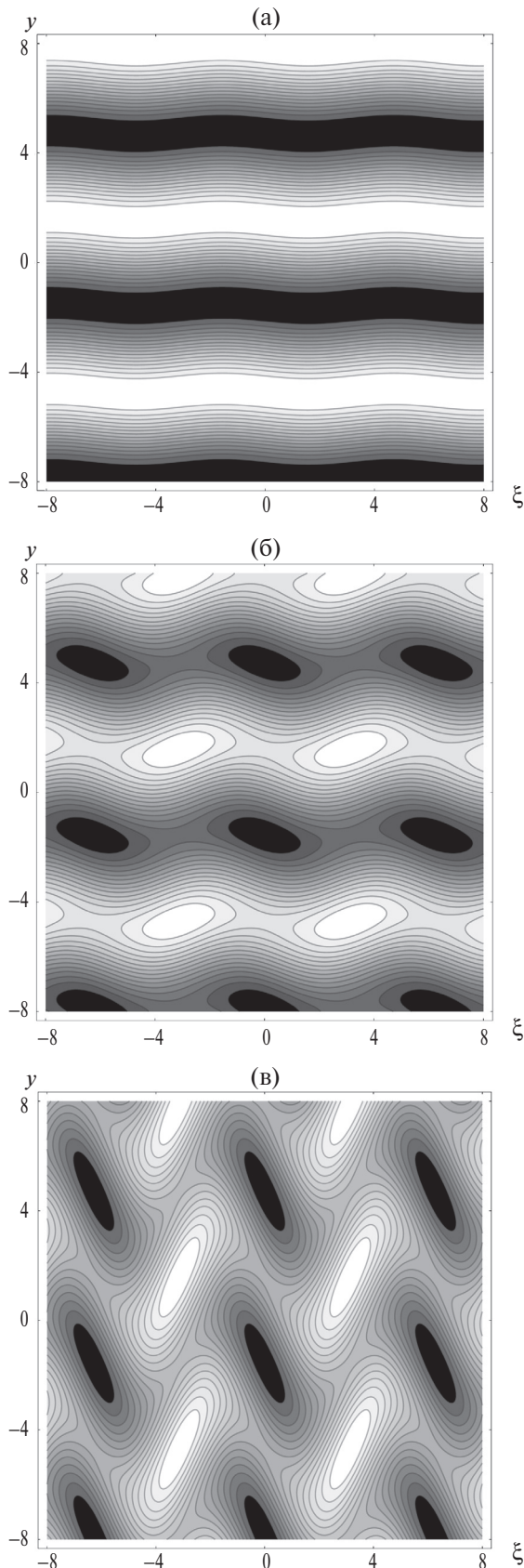


Рис. 4. Теневые картины изолиний функции тока (32) для трех моментов времени: (а) $\tau = 0$; (б) $\tau = 2.5$; (в) $\tau = 5$. Значения параметров $c_0 = 0$, $\varphi_0 = 0.1$, $k = 1$.

ных сепаратрисами от меандрирующих потоков с незамкнутыми линиями тока. С течением времени ячейки сжимаются по горизонтали и вытягиваются в поперечном направлении. Отметим, что по горизонтальной оси рисунков стоит $k\xi$, так что для получения картин в реальном масштабе их следует растянуть по горизонтали.

Аналитическое исследование структуры функции тока (32) проводится аналогично второму разделу. Из уравнений $\psi_\xi = 0$, $\psi_y = 0$ находят координаты стационарных точек $\xi_* = \pi n / k$, $y_* = (\pi/2) + \pi l$, где n, l — целые числа. Вычисление вторых производных и определителя матрицы второго дифференциала дает $\delta = AC - B^2 = k^2 \tilde{c}(\tau)(-1)^{n+l+1}$. Отсюда следует, что точки ξ_*, y_* являются центрами вихревых ячеек (точками экстремума, $\delta > 0$), если числа n, l имеют разную четность. С этим связано расположение вихрей на рис. 4 — между каждыми двумя вихрями в одном горизонтальном ряду расположен вихрь соседнего ряда. Вихри соседних рядов при этом имеют разные полярности. Как и в разделе 2, с использованием разложения Тейлора показывается, что в окрестности центров вихрей линии тока есть эллипсы с зависящими от времени полуосями.

Уравнения сепаратрис получают из рассмотрения общего уравнения для линий тока $\psi(\xi, y, t) = \sin(\theta) + \tilde{c}(\tau)\cos(k\xi) = c$, где c — константа, параметрически зависящая от времени. Удобно положить $c = \tilde{c}(\tau) - 2E$ и записать уравнения для линий тока как

$$K + P = E, \quad K = 2\tilde{c}(\tau)\sin^2(k\xi/2), \quad P = -\sin(\theta). \quad (33)$$

В такой форме, каждое уравнение (33) аналогично закону сохранения энергии для уравнения механических колебаний частицы K , и P играют роль соответственно кинетической и потенциальной энергии. Поскольку $K \geq 0$, из рассмотрения на фазовой плоскости следует существование замкнутых и незамкнутых фазовых кривых, причем отделяющей их сепаратрисе отвечает значение энергии $E = P_{\max}(\theta) = 1$. Таким образом, для представленных на рис. 4 теневых картин, уравнения сепаратрис

$$2\tilde{c}(\tau)\sin^2(k\xi/2) = 1 + \cos(\theta), \quad \theta = y + \tilde{\phi}(\tau)\sin(k\xi). \quad (34)$$

Данные уравнения определяют кривые $y = y(\xi, \tau)$ в неявном виде.

Остановимся на оценке точности решения (32). Это решение асимптотически справедливо на временах, когда выполнено длинновол-

новое приближение $\Delta\psi = \psi_{yy} + \varepsilon^2 \psi_{\xi\xi} \sim \psi_{yy}$, или, что эквивалентно, $\psi_{\xi\xi} \ll \varepsilon^{-2}$. С учетом явного выражения (32) легко показать, что, в терминах реального времени, последнее неравенство выполняется, если $t \ll T(\varepsilon)$, где $T(\varepsilon) = O(\gamma^{-1} \varepsilon^{-1} \ln(\varepsilon^{-2}))$. Поскольку $T(\varepsilon) \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ область применимости решения охватывает достаточно большой начальный временной промежуток.

Отметим, что устойчивость невязкого течения Колмогорова исследовалась в недавней работе [24] с использованием метода Галеркина. Было выделено три стадии развития неустойчивости, линейная, квазилинейная и финальная нелинейная стадия — стадия устойчивых колебаний. Асимптотические решения данного раздела отвечают квазилинейной стадии и получены без привлечения метода Галеркина. Выражение для инкремента нарастания $\gamma = k / \sqrt{2}$ следует из полученного в упомянутой работе общего выражения $\gamma^2 = k^2(1 - k^2) / 2(1 + k^2)$ в длинноволновом пределе $k \rightarrow 0$.

Укажем также на возможность построения более общего решения $\psi = \rho(\xi) \sin(y + \phi(\xi, \tau)) + c(\xi, \tau)$, дополнительно учитывающего начальную модуляцию амплитуды течения Колмогорова, описываемую функцией $\rho(\xi)$. Подстановка последнего выражения в (27), (28) приводит к системе

$$\phi_\tau + c_\xi = 0, \quad c_\tau - (1/2)\rho^2(\xi)\phi_\xi = 0,$$

для решения которой можно привлекать асимптотические и численные методы. В частности, при периодической модуляции $\rho(\xi)$ применимы методы теории осреднения уравнений с периодическими коэффициентами. Данное обобщение распространяется на случай решений $\psi = \rho(\xi)F(y + \phi(\xi, \tau)) + c(\xi, \tau)$, где $F(\theta)$ — периодическая функция, удовлетворяющая уравнению $FF''' - F'F'' = 0$.

ВИХРЕВЫЕ ДОРОЖКИ В СВОБОДНОМ СЛОЕ СДВИГА

Рассмотренный выше подход можно применить и к неограниченным течениям со структурой свободного слоя сдвига. Профиль скорости невозмущенного течения отвечает плавному переходу между двумя постоянными значениями на бесконечности. Динамика длинноволновых возмущений описывается уравнением (27), к которому присоединяется условие (28). Принципиальная разница состоит в том, что опера-

ция осреднения в (28) теперь определяется как $\langle \phi \rangle = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \phi dy$.

Свободному слою сдвига, отвечает точное стационарное решение уравнения (27)

$$\psi = F(y) = -\ln(\cosh(y)), \quad u = -\psi_y = \tanh(y). \quad (35)$$

Как и ранее, проверяется, что для функции $F(y)$ существует класс нестационарных решений вида (29), где функции $\phi(\xi, \tau)$, $c(\xi, \tau)$ удовлетворяют системе линейных уравнений (30). Значение входящего в систему (30) коэффициента m^2 находится прямым вычислением. С учетом $F''(\theta) = \tanh^2(\theta)$ и $\int_{-L}^L \tanh^2(\theta) d\theta = 2(L - \tanh L)$, получим

$$m^2 = \langle F''(\theta) \rangle = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} (2L - 2 \tanh L) = 1.$$

Решение системы (30) с начальными условиями $\phi(\xi, 0) = \phi_0 \sin(k\xi)$, $c(\xi, 0) = c_0 \cos(k\xi)$, таким образом, дается выражениями (31), где $m = 1$. В случае $c_0 = 0$ соответствующее нестационарное решение для функции тока записывается в виде

$$\begin{aligned} \psi(\xi, y, t) &= -\ln(\cosh(\theta)) + \tilde{c}(t) \cos(k\xi), \\ \theta &= y + \tilde{\phi}(t) \sin(k\xi), \quad \tilde{\phi}(t) = \phi_0 \cosh(kt), \\ \tilde{c}(t) &= \phi_0 \sinh(kt). \end{aligned} \quad (36)$$

Из (36) следует неустойчивость свободного слоя сдвига — длинноволновые возмущения нарастают с инкрементом $\gamma = k$.

Теневые картины изолиний функции тока (36) для трех моментов времени представлены на рис. 5. Как видно, развитие неустойчивости сдвигового слоя сопровождается формированием ярко выраженной вихревой дорожки. Из исследования (36) на экстремум следует, что центры вихрей (ξ_*, y_*) в дорожке лежат на линии смены знака скорости течения: $y_* = 0$, $\xi_* = \pi n / k$, где n четное. Аналогично предыдущему разделу, с привлечением механической аналогии, находится уравнение сепаратрисы, отделяющей замкнутые вихревые ячейки от внешнего потока: $2\tilde{c}(t) \cos^2(k\xi/2) = \ln(\cosh \theta)$. Обращая гиперболический косинус, из последнего уравнения можно получить явное уравнение сепаратрисы

$$\begin{aligned} y &= \ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right) - \tilde{\phi}(\tau) \sin(k\xi), \\ z &= \exp\left(2\tilde{c}(\tau) \cos^2(k\xi/2)\right). \end{aligned} \quad (37)$$

Обратим внимание, что при $c_0 = 0$ начальному моменту времени отвечает сепаратриса

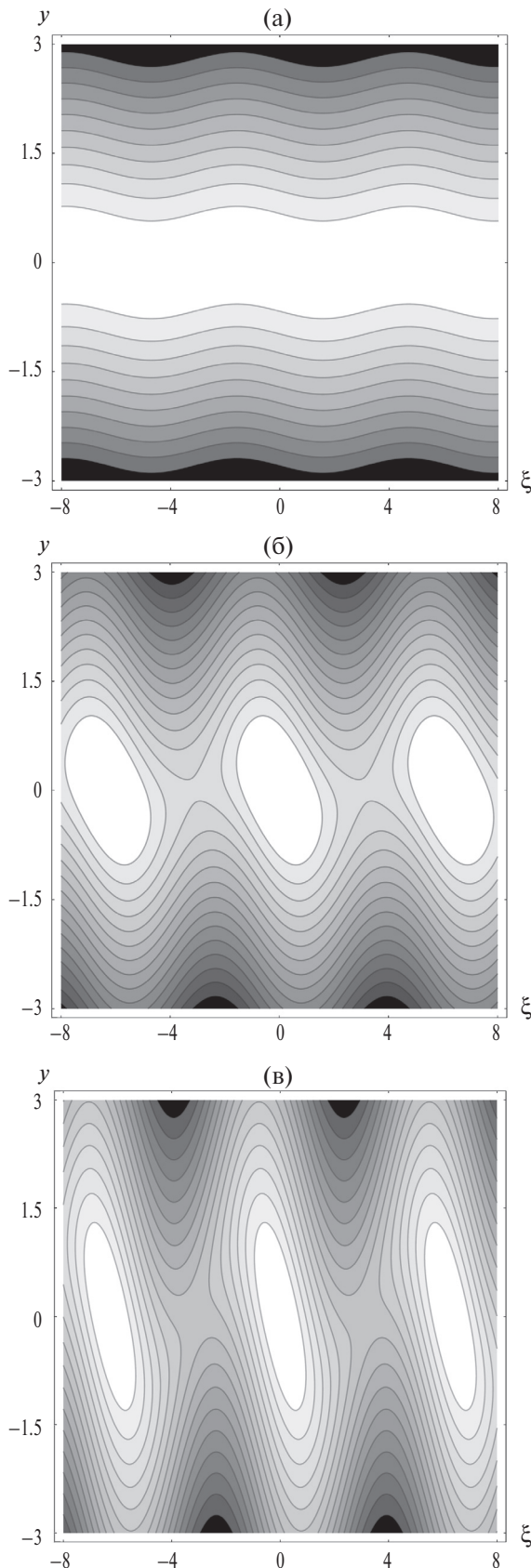


Рис. 5. Теневые картины изолиний функции тока (36) для трех моментов времени: (а) $\tau = 0$; (б) $\tau = 2$; (в) $\tau = 3$. Значения параметров $c_0 = 0$, $\varphi_0 = 0.1$, $k = 1$.

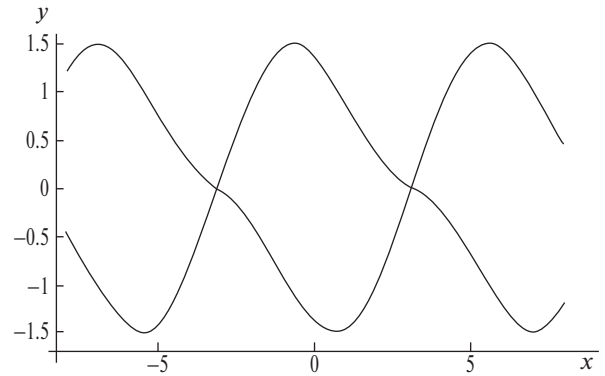


Рис. 6. Положение сепаратрисы (38) в момент времени $\tau = 1$.

$y = -\varphi_0 \sin(k\xi)$. Существование этой сепаратрисы связано с заданием начального периодического возмущения фазы. График сепаратрисы (37) в момент времени $\tau = 1$ показан на рис. 6.

Следует отметить, что построение асимптотических решений в данном разделе носило формальный характер. Для свободного слоя сдвига это связано с тем, что уже на небольших временах длинноволновое приближение нарушается при $|y| \rightarrow \infty$. Можно предположить, что решение (36) дает удовлетворительную аппроксимацию непосредственно в пределах сдвигового слоя $|y| < 1$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Гидродинамическая неустойчивость практически любого сдвигового течения приводит к формированию вихревых дорожек. С этим связано их широкое распространение в природных условиях и условиях лабораторных экспериментов. Основная сложность в изучении вихревых дорожек состоит в том, что они представляют собой нелинейный объект гидродинамики, требующий для своего описания либо прямого численного моделирования, либо привлечения восходящих к Карману искусственных представлений дорожки в виде системы точечных вихрей с заранее заданными положениями. Двумерная функция тока $\psi = \ln((1 + A^2)^{1/2} \cosh y + a \cos x)$, описывающая стационарную вихревую дорожку в слое сдвига, до настоящего времени дает единственный пример точного решения гидродинамических уравнений [1, 16]. Результаты настоящей работы в некоторой степени восполняют этот пробел. Построенные точные и асимптотические решения для вихревых

дорожек допускают простое аналитическое исследование, позволяющее, в частности, определить ширину вихревой полосы, конфигурацию линий тока, положение сепаратрис. Кроме того, эти решения иллюстрируют принципиальную роль горизонтального сдвига скорости течений в процессе формирования вихревых дорожек. В заключение, отметим возможное обобщение представленных решений на случай медленных движений вращающейся стратифицированной жидкости, которые имеют квазидвумерный характер. Ряд таких решений рассмотрен в недавней работе [25].

Источники финансирования

Работа выполнена при поддержке РНФ (проект 19-17-00248, разделы 1–3.5) и РФФИ (проект 18-05-00831, раздел 4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Онищенко О.Г., Похотелов О.А., Астафьева Н.М.* Генерация крупномасштабных вихрей и зональных ветров в атмосферах планет // *Успехи физических наук*. 2008. Т. 178. № 6. С. 605–618.
2. *Пальмен Э., Ньютон Ч.* Циркуляционные системы атмосферы. Л.: Гидрометеиздат, 1973. 400 с.
3. *Алексеев В.В., Киселева С.В., Ланно С.С.* Лабораторные модели физических процессов в атмосфере и океане. М.: Наука, 2005. 312 с.
4. *Незлин М.В., Снежкин Е.Н.* Вихри Россби и спиральные структуры. М.: Наука, 1990. 238 с.
5. *Humphreys T., Marcus P.S.* Vortex street dynamics: The selection mechanism for the areas and locations of Jupiters vortices // *J. Atmos. Sci.* 2007. V. 64. P. 1318–1333.
6. *Young G.S., Zavislak J.* An observational study of vortex spacing in Island wake vortex streets // *Month. Weather Rev.* 2006. V. 134. P. 2285–2294.
7. *Etling D.* On atmospheric vortex streets in the wake of large islands // *Meteor. Atmos. Phys.* V. 41. P. 157–164.
8. *Ruscher P.H., Deardorff J.W.* A numerical simulation of an atmospheric vortex street // *Tellus*. 1982. V. 34. P. 555–566.
9. *Mak M.* Atmospheric dynamics. Cambridge University Press. 2011. 500 p.
10. *Lambaerts J., Lapeyre G., Zeitlin V.* Moist versus dry barotropic instability in a shallow –water of the atmosphere with moist convection // *J. Atmos. Sci.* 2011. V. 68. P. 1234–1252.
11. *Должанский Ф.В., Крымов В.А., Манин Д.Ю.* Устойчивость и вихревые структуры квазидвумерных сдвиговых течений // *Успехи физических наук*. 1990. Т. 160. Вып. 7. С. 1–47.
12. *Гледзер А.Е., Гледзер Е. Б. Хапаев А.А. Чхетиани О.Г.* Экспериментальное обнаружение блокирования переноса вихрей и волн Россби при МГД возбуждении квазидвумерных течений во вращающемся цилиндрическом сосуде // *Письма в ЖЭТФ*. 2013. Т. 97. № 6. С. 359–365.
13. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Т. 1. М.: Физматгиз, 1963. 560 с.
14. *Gryanik V.M., Borth H., Olbers D.* The theory of quasi — geostrophic von Karman vortex streets in two-layer fluids on a beta — plane // *J. Fluid Mech.* 2004. V. 505. P. 23–57.
15. *Дразин Ф.* Введение в теорию гидродинамической устойчивости. М.: Физматлит, 2005. 288 с.
16. *Stuart J.T.* On finite amplitude oscillations in laminar mixing layers // *J. Fluid Mech.* 1967. V. 29. P. 417–440.
17. *Sivashinsky G., Yakhot V.* Negative viscosity effect in large scale flows // *Phys. Fluids*. 1985. V. 28. P. 1040–1042.
18. *Libin A., Sivashinsky G., Levich A.* Long-wave instability of periodic flows at large Reynolds numbers // *Phys. Fluids*. 1987. V. 30. P. 2984–2986.
19. *Criminale W.O., Drazin P.G.* The evolution of linearized perturbations of parallel flows // *Studies in Appl. Math.* 1990. V. 83. № 2. P. 123–157.
20. *Kalashnik M.V., Mamatsashvili G.R., Chagelishvili G.D., Lominadze J.G.* Linear dynamics of non-symmetric perturbations in geostrophic flows with a constant horizontal shear // *Quart. Journ. Roy. Met. Soc.* 2006. V. 132. № 615. P. 505–518.
21. *Farrel B.F., Ioannou P.J.* Optimal excitation of three-dimensional perturbations in viscous constant shear flow // *Phys. Fluids A*. 1993. V. 5. № 6. P. 1390–1400.
22. *Pedlosky J.*, *Geophysical Fluid Dynamics*. Springer-Verlag: Berlin and New York, 1987. 710 p.
23. *Чхетиани О.Г., Калашиник М.В., Чагелишвили Г.Д.* Динамика и блокирование волн Россби в квазидвумерных сдвиговых течениях // *Письма в ЖЭТФ*. 2015. Т. 101. Вып. 2. С. 84–89.
24. *Kalashnik M.V., Kurgansky M.V.* Nonlinear dynamics of long-wave perturbations of the Kolmogorov flow for large Reynolds numbers // *Ocean Dynamics*. 2018. V. 68. P. 1001–1012.
25. *Калашиник М.В. Чхетиани О.Г., Чагелишвили Г.Д.* Новый класс краевых бароклинных волн и механизм их генерации // *Известия РАН. Физика атмосферы и океана*. 2018. Т. 54. № 4. С. 361–370.

Non-Stationary Vortex Streets in Shear Flows

M. V. Kalashnik^{1, 2*}, O. G. Chkhetiani^{1**}

¹*A.M. Obukhov Institute of Atmospheric Physics RAS*

Pyzhevski 3, Moscow, 119017, Russia

²*Research and Production Association Typhoon*

Pobedy St., 4, Kaluga region, Obninsk, 249038, Russia

*E-mail: *kalashnik-obn@mail.ru, **lgg@ifaran.ru*

Received: 02.07.2019

Accepted: 07.08.2019

Spatially periodic vortex systems that form due to unstable shear flows are called vortex streets. A number of exact and asymptotic solutions of two-dimensional hydrodynamic equations describing nonstationary vortex streets have been constructed. It is shown that the superposition of the flow with a constant horizontal shear and its perturbations in the form of a nonmodal wave provides an exact solution that describes a nonstationary vortex street with rotating elliptic current lines. The width of the zone occupied by such a vortex street has been determined. The equation of separatrix separating vortex cells with closed current lines from an external meandering flow has been obtained. The influence of the quasi-two-dimensional compressibility and beta effect on the dynamics of vortex streets has been studied based on the potential vorticity transport equation. The solutions describing the formation of vortex streets during the development of an unstable zonal periodic flow and a free shear layer have been constructed using a longwave approximation.

Keywords: vortex streets, hydrodynamic instability, shear flows, current function, horizontal shear, beta effect, periodic flows, free shear layer.