

УДК 551.466.2; 551.509.313.11; 532.517.3

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЦЕПОЧКИ ВОЛНОВЫХ СТРУКТУР И АНОМАЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС ПАССИВНОЙ ПРИМЕСИ В БАРОТРОПНОМ СТРУЙНОМ ТЕЧЕНИИ

© 2019 г. В. П. Реутов, Г. В. Рыбушкина

*Институт прикладной физики РАН
603950, Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46
E-mail: reutov@appl.sci-nnov.ru*

Поступила в редакцию 29.04.2019 г.
Принята к печати 07.08.2019 г.

Исследуется аномальный перенос пассивной примеси при возбуждении нестационарных цепочек волновых структур с замкнутыми линиями тока в баротропном струйном течении, моделирующем мезомасштабные зональные течения в атмосфере и океане Земли и в лабораторных экспериментах. Анализ проводится в рамках динамической модели, описывающей насыщение баротропной неустойчивости струйного течения в канале между жесткими стенками с учетом бета-эффекта и внешнего трения. Уравнения баротропного течения решаются численно с помощью псевдоспектрального метода. Показано, что генерация высоких мод в струе с «двугорбым» профилем скорости приводит к ускоренному переходу к сложной динамике, на начальной стадии которого возникает мультигармонический режим с дискретным спектром. Вычислены показатели степенных зависимостей от времени среднего (по ансамблю) смещения частиц-трассеров и его дисперсии в основных режимах генерации волновых структур, подтверждающие наличие аномальной диффузии примеси. Получена автомодельная плотность вероятности смещения частиц и выяснена зависимость перехода к сложной динамике от числа вихрей в цепочке и величины бета-эффекта. Приводятся численные оценки, подтверждающие возможность генерации нестационарных вихревых цепочек и связанного с ними переноса пассивной примеси.

Ключевые слова: баротропное течение, цепочки волновых структур, динамический хаос, аномальная адвекция и диффузия.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0002-3515556201-210>

ВВЕДЕНИЕ

Цепочки мезомасштабных вихревых структур наблюдаются на фоне зональных течений в активном погодном слое атмосферы и в океане Земли, а также в атмосферах Юпитера и Сатурна [1–4]. Аналогичные цепочки структур получены при возбуждении волн в лабораторных экспериментах с квазидвумерными (баротропными) кольцевыми течениями несжимаемой жидкости, что можно считать косвенным подтверждением их баротропной природы в природных зональных течениях [2, 4–7]. Экспериментально доказано, что в нестационарных цепочках структур с замкнутыми линиями тока возможен аномальный перенос пассивной примеси [8, 9]. К настоящему времени наибольшее развитие получили кинематические модели аномального переноса, которые обычно включают в себя основную моду течения, порождающую стационарную цепочку вихрей, и до-

полнительные моды, в присутствии которых на границах замкнутых линий тока возникают стохастические слои [10–13]. Все эти моды обычно предполагаются нейтральными и описываются в рамках линейного приближения.

Неопределенность в выборе дополнительных нейтральных мод, которая является поводом для критики кинематических моделей [13], исключается в динамически согласованных моделях, основанных на решении полной нелинейной системы уравнений движения жидкости, которая позволяет изучать движение частиц-трассеров в режиме насыщения баротропной неустойчивости [13–18]. В работе [14] рассмотрена динамическая модель аномального переноса в баротропной меандрирующей струе. Слабое затухание волны в отсутствие внешних сил, поддерживающих равновесный профиль скорости, приводит к образованию аperiодических во времени цепочек структур, порождающих аномальный перенос примеси. В [15] продемонстрирована возможность

хаотической адвекции примеси в рамках динамической модели, основанной на концепции нелинейного критического слоя. Однако условия малой толщины критического слоя и малой диссипации, необходимые для реализации данной модели, зачастую трудновыполнимы. В работах [16, 17] разрабатывались динамические модели аномального переноса в слоях сдвига с модифицированным профилем скорости. В [16] показано, что течение в виде вязкого слоя сдвига с двумя максимумами на профиле завихренности имеет две неустойчивые моды, фазовые скорости которых различны. Численно изучено взаимодействие двух вихревых цепочек, каждая из которых содержит на периоде одну структуру с замкнутыми линиями тока. Обнаружен лагранжев хаос (перемешивание жидких частиц) при регулярном и хаотическом эйлеровом поле скорости. В [17] построена динамическая модель аномального переноса для течения типа слоя сдвига с немонотонным равновесным профилем скорости. В отличие от [16] рассмотрено возбуждение цепочки, содержащей семь структур на периоде с учетом вязкости, бета-эффекта и внешнего (донного) трения, что в большей степени соответствует геофизическим приложениям. Показано, что после ряда бифуркаций происходит переход к динамическому хаосу эйлерова поля скорости, который порождает аномальный перенос пассивной примеси. В работе [18] сообщалось о лагранжевом хаосе, возникающем в рамках в баротропной динамической модели полярного стратосферного вихря.

Наблюдаемые в лабораторных кольцевых течениях цепочки волновых структур, как правило, остаются стабильными даже при высоких надкритичностях [2, 6, 19]. Объяснение состоит в том, что в большинстве экспериментов создавались моноструйные течения и простые слои сдвига. В работе [20] показано, что переход к динамическому хаосу в струе Бикли, локализованной в канале, происходит при весьма высокой надкритичности (близкой к 16). Кроме того, при большой надкритичности в лабораторном эксперименте могут возникать эффекты нестационарности, связанные с разрушением квазидвумерной структуры течения [21, 22]. Более быстрый переход к динамическому хаосу возможен в течениях с усложненным профилем скорости, что согласуется и приведенными выше результатами для слоев сдвига. Это подтверждается также экспериментальным исследованием генерации волновых структур в течении Колмогорова [23].

В природных условиях зональные течения в атмосфере Земли и планет могут иметь «изрезанный»

профиль горизонтальной скорости, содержащий последовательность максимумов и минимумов [1]. Существование «многоструйных» зональных течений в океане подтверждается результатами численного моделирования [24]. Целью данной работы является построение динамической модели аномального транспорта в баротропном течении с равновесным профилем скорости в виде «двугорбой» струи, которую можно рассматривать как простейшую модель многоструйного профиля скорости. Вязкое плоскопараллельное струйное течение, подверженное влиянию бета-эффекта и внешнего трения, локализовано в канале с жесткими стенками, на которых ставятся условия прилипания и непротекания. В отличие от слоя сдвига в данном случае в потоке возникают две цепочки вихревых структур, каждая из которых способна формировать стохастические слои. Изучаются условия перехода к нестационарным цепочкам структур и связанного с ними аномального переноса примеси при увеличении надкритичности течения, которая определяется как отношение максимального значения скорости на профиле скорости струи к критической скорости возникновения неустойчивости. Расчеты проводятся до значений надкритичности, при которых впервые возникает динамический хаос. Выясняется роль бета-эффекта и числа вихрей на периоде цепочки на переход к сложной динамике.

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Для описания баротропного струйного течения воспользуемся квазигеострофическими уравнениями, записанными в приближении бета-плоскости с учетом внешнего (донного) трения [2, 15]. Выберем масштаб скорости равным максимальной скорости течения в струе U и введем масштаб поперечного сдвига скорости L . Уравнения квазидвумерного плоскопараллельного течения в записи через абсолютную завихренность и функцию тока, после перехода к безразмерным переменным принимают вид

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\lambda (\zeta - \zeta_0) + \text{Re}^{-1} \Delta (\zeta - \zeta_0), \quad \Delta \psi = -\zeta, \quad (1)$$

где x и y — оси декартовой системы координат, направленные соответственно вдоль и поперек течения (в геофизическом течении это направления на восток и на север соответственно), $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ — двумерный лапласиан,

ψ — функция тока, связанная с компонентами вектора горизонтальной скорости $\mathbf{v} = (u, v)$ выражениями $u = \partial\psi/\partial y$, $v = -\partial\psi/\partial x$; $\zeta = (\text{rot } \mathbf{v})_z = \partial v/\partial x - \partial u/\partial y$ — вертикальная компонента абсолютной завихренности, $\text{Re} = UL/\nu$ — число Рейнольдса по эффективной кинематической вязкости ν ; $\lambda = \lambda^{**}L/U$ — безразмерный коэффициент внешнего трения λ^{**} ; $\beta = \beta^{**}L^2/U$ — безразмерный градиент параметра Кориолиса β^{**} ; $\zeta_0 = -du_0/dy$ — завихренность первичного плоскопараллельного течения с нормированным профилем скорости $u_0(y)$. Стационарный (в отсутствие волн) профиль скорости $u_0(y)$ создается внешней силой, которая моделируется неоднородными членами в первом уравнении (1). Следуя [20], рассмотрим плоскопараллельное струйное течение в канале с жесткими стенками $y = \pm y_1$, на которых зададим условия непротекания и прилипания

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0 \Big|_{y=\pm y_1}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0 \Big|_{y=\pm y_1}. \quad (2)$$

На краях интервала $0 \leq x < L$ в продольном направлении (вдоль оси x) налагаем периодические граничные условия (этот интервал в дальнейшем будем называть вычислительной областью). В этом случае решение краевой задачи (1) и (2) можно представить в виде

$$\zeta = \bar{\zeta}(y, t) + \tilde{\zeta}, \quad \psi = \int \bar{u}(y, t) dy + \tilde{\psi}, \quad (3)$$

где $\tilde{\zeta}$ и $\tilde{\psi}$ — осциллирующие по x компоненты завихренности и функции тока, $\bar{\zeta}(y, t)$ — профиль средней завихренности, $\bar{u}(y, t)$ — профиль скорости среднего течения. Подставляя (3) в (1), после несложных преобразований получим уравнения для осциллирующих и средних полей

$$\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \beta \right) \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} \tilde{\zeta} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} \tilde{\zeta} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y} \tilde{\zeta} \right) - \lambda \tilde{\zeta} + \text{Re}^{-1} \Delta \tilde{\zeta}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} \right) - \lambda (\bar{u} - u_0) + \text{Re}^{-1} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \right), \quad \Delta \tilde{\psi} = -\tilde{\zeta}, \quad (5)$$

где черта сверху означает усреднение по периоду течения L . Граничные условия (2) принимают вид

$$\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} = 0 \Big|_{y=\pm y_1}, \quad \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y} = 0 \Big|_{y=\pm y_1}, \quad \bar{u} = 0 \Big|_{y=\pm y_1}. \quad (6)$$

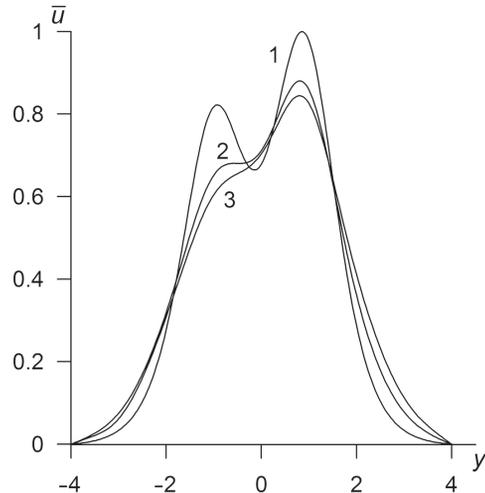


Рис. 1. Нормированные профили продольной скорости баротропного струйного течения в горизонтальном канале между стенками $y = \pm 4$: 1 — профиль скорости первичного течения $u_0(y)$, 2 и 3 — профили средней скорости при $\gamma = 1.63$ и $\gamma = 2.38$ соответственно ($\text{Re} = 60$, $\beta = 0.4$).

Уравнения решались численно для струйного течения, которое в отсутствие возмущений имеет между стенками канала $-y_1 \leq y \leq y_1$ с полушириной $y_1 = 4$ стационарный профиль скорости

$$u_0(y) = -0.004226 + 0.9566 \cdot \text{sch}^2[1.1(-0.901 + y)] + 0.7653 \cdot \text{sch}^2[1.1(1 + y)]$$

(см. кривую 1 на рис. 1). Для этого профиля скорости с высокой точностью выполнены условия $\max[u_0(y)] = 1$ и $u_0(\pm y_1) = 0$, первое из которых соответствует данному выше определению масштаба скорости U . В дальнейшем будем называть данный профиль скорости «двугорбым».

ЛИНЕЙНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СТРУИ И ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ ТЕЧЕНИЯ

Используя линеаризованные относительно $\tilde{\psi}$ и $\tilde{\zeta}$ уравнения (4) с граничными условиями (6) и представляя возмущения в виде $(\tilde{\psi}, \tilde{\zeta}) = (f_1, f_2) \exp(ikx - i\omega t)$ ($f_{1,2}(y)$ — комплексные коэффициенты), получим задачу на собственные значения для определения зависимости частоты ω от волнового числа k . Воспользуемся представлением инкремента неустойчивости в виде [2] $\text{Im } \omega(k; \beta, \text{Re}, \lambda) = \text{Im } \omega(k; \beta, \text{Re}, 0) - \lambda$. На рис. 2 показаны результаты расчета инкремента неустойчивости изгибных волн в струе с двугорбым профилем скорости в отсутствие внешнего трения $\text{Im } \omega_0 = \text{Im } \omega(k; \beta, \text{Re}, 0)$. В данном случае течение имеет две неустойчивые моды, что способствует возникновению разнообразных режимов генерации волн. Будем считать, что номера

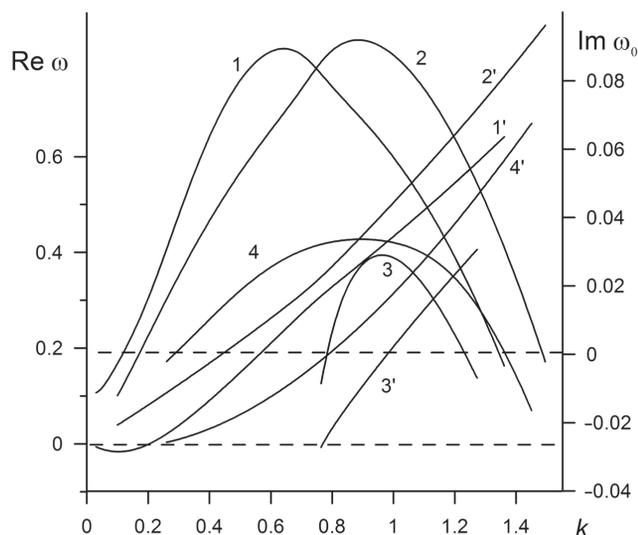


Рис. 2. Инкремент неустойчивости в отсутствие внешнего трения $\text{Im}\omega_0$ и вещественная часть частоты изгибных волн $\text{Re}\omega$ в струйном течении с «двугорбым» асимметричным профилем скорости при $\text{Re} = 60$. Кривые 1 и 2 показывают $\text{Im}\omega_0$ первой и второй моды при $\beta = 0$; 3 и 4 — то же самое при $\beta = 0.4$; 1'–4' — $\text{Re}\omega_{\text{мод}}$ с инкрементами 1–4.

кривых 1 и 2, показанные на рис. 2, одновременно являются номерами мод при $\beta = 0$. Значения волновых чисел в максимуме $\text{Im}\omega_0(k)$ для мод 1 и 2 соответственно равны 0.64 и 0.885, а их инкременты $\text{Im}\omega_0 = 0.0894$ и 0.0919 . С ростом β волновое число в максимуме $\text{Im}\omega_0$ возрастает у моды 1 и убывает у моды 2. В случае $\beta = 0.4$ моды 1 и 2 показаны кривыми 3 и 4 на рис. 2. Значения волновых чисел в максимуме $\text{Im}\omega_0$ соответственно равны 0.965 и 0.895, а их инкременты $\text{Im}\omega_0 = 0.0290$ и 0.0336 . Вычисления показали, что при $\text{Re} > 60$ максимальный инкремент неустойчивости слабо зависит от числа Рейнольдса. Стремление неустойчивости к «невязкому» пределу при увеличении имеет принципиальное значение для самой возможности лабораторного моделирования генерации цепочек волновых структур в атмосфере [2]. В дальнейшем будем рассматривать близкую к лабораторному эксперименту ситуацию, когда неустойчивость появляется вследствие увеличения скорости струи U при постоянных λ^* , β^* , ν и L [17, 20, 25]. При изменении U одновременно изменяются безразмерные параметры λ , Re и β . Критическому значению скорости $U = U_c$, при котором возникает неустойчивость, соответствуют критические значения параметров $\text{Re}_c = U_c L / \nu$, $\lambda_c = \lambda^* L / U_c$ и $\beta_c = \beta^* L^2 / U_c$. Если принять, что Re_c и β_c совпадают с Re и β , при которых построены кривые на рис. 2, получим критический параметр внешнего трения для каждой моды $\lambda_c = \text{Im}\omega_0(k_c)$, где k_c — критическое волновое

число, которое соответствует максимуму инкремента $\text{Im}\omega_0$ как функции k . Следуя [17, 20], введем параметр надкритичности течения $\gamma = U / U_c$. Отметим, что изменение γ приводит к изменению безразмерных параметров, входящих в (4), так как $\gamma = \text{Re} / \text{Re}_c = \lambda_c / \lambda = \beta_c / \beta$.

АНОМАЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС ПРИМЕСИ

Система уравнений (4)–(6) решалась численно с помощью псевдоспектрального метода в трактовке работ [26, 27]. Решение для осциллирующих по координате x полей представлялось в виде усеченных комплексных рядов Фурье

$$(\tilde{\psi}, \tilde{\zeta}) = \sum_{\substack{m=-K \\ m \neq 0}}^K (\hat{\psi}_m(y, t), \hat{\zeta}_m(y, t)) e^{ik_m x}, \quad (7)$$

где $k_m = mk_1$ ($k_1 = 2\pi / \Lambda$ — волновое число первой гармоники); $\hat{\zeta}_{-m} = \hat{\zeta}_m^*$ и $\hat{\psi}_{-m} = \hat{\psi}_m^*$ — комплексные амплитудные профили гармоник завихренности и функции тока, K — число «ненулевых» гармоник. Система уравнений для комплексных профилей $\hat{\psi}_m$ и $\hat{\zeta}_m$ приведена в [17]. Производные по координате y аппроксимировались конечными разностями второго порядка точности. Дискретное преобразование Фурье включало в себя $N = 64$ комплексных гармоник, а число узлов дискретизации по y принималось равным 200. Для исключения влияния «алиасинга» значение K выбиралось из условия $K = N / 3$ [27]. Начальные профили гармоник завихренности имели малые амплитудные факторы и псевдослучайное распределение фаз (при каждом новом задании начальных условий формировались одинаковые наборы фаз гармоник). При этом начальные профили гармоник функции тока определялись через профили завихренности и удовлетворяли граничным условиям. На пороге возникновения неустойчивости ($\gamma = 1$) волновое число фундаментальной гармоники в разложении Фурье выбиралось из условия $k_1 = (1/7)k_c$. В этом случае при $\gamma > 1$ в струе возникают вихревые цепочки, содержащие 7 вихревых структур на периоде течения. Для описания аномального переноса примеси система уравнений (4)–(6) дополнялась уравнениями движения жидких частиц-трассеров, которые в сопутствующей системе отсчета имеют вид

$$\frac{dx'_j}{dt} = \bar{u}(y, t) - c + \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y} \right)_{x=x'_j+ct}, \quad \frac{dy}{dt} = - \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} \right)_{x=x'_j+ct}, \quad (8)$$

где $x'_j = x_j - ct$, j — номер частицы, c — фазовая скорость волны, равная скорости переноса цепочек вихревых структур.

При исследовании бифуркаций динамических режимов надкритичность γ увеличивалась посредством малых приращений, после каждого из которых она оставалась постоянной до достижения установившегося режима генерации (в расчетах увеличение γ производилось путем скачкообразного уменьшения параметра λ с постоянным шагом 0.0005). После каждого приращения γ к полю скорости добавлялись малые возмущения, моделирующие шумы в реальной системе (подробнее см. [17, 20, 25]). Основные расчеты проводились при $\beta_c = 0.4$, $Re_c = 60$ и $k_1 = (1/7)k_{c_2}$, где $k_{c_2} = 0.895$ — критическое значение волнового числа 2-й моды (кривая 4 на рис. 2), которому соответствует $\lambda_c = \text{Im} \omega_0(k_{c_2}) = 0.0336$.

Вычисления показали, что при $\gamma > 1$ в течениях возбуждается стационарная волна волновым числом $k_7 = 7k_1$, порождающая две цепочки волновых структур с замкнутыми линиями тока. Далее при $\gamma = 1.063$ и $\gamma = 1.217$ последовательно происходят скачкообразные переходы к генерации стационарных волн с волновыми числами k_6 и k_5 . Подобные переключения волновых режимов неоднократно наблюдались экспериментально и получены при численном моделировании (см., например, [2, 19, 25]). Отметим, что эти стационарные волны являются нелинейными, поскольку в спектрах их поля скорости и завихренности присутствуют кратные гармоники. При $\gamma = 1.555$ скачкообразно возникает мультигармонический режим, в котором доминирует (формирует цепочки структур) нелинейная волна с волновым числом k_6 . На рис. 3а показан частотно-волновой спектр $A_{\omega k}$ возмущений продольной скорости $\tilde{y}(x, y, t)$, вычисленный в этом режиме на уровне $\gamma = \text{const} = 2.2$ при надкритичности $\gamma = 1.63$ (при каждом k_m спектр $A_{\omega k}$ совпадает с частотным спектром соответствующего коэффициента разложения (7)). Графические данные, представленные на рис. 3–6, получены при одних и тех же значениях $\beta_c = 0.4$, $Re_c = 60$. Линии тока в сопровождающей волну системе отсчета, рассчитанные при $\gamma = 1.63$, показаны на рис. 4а (буквами *A* и *B* обозначены цепочки структур с замкнутыми линиями тока). Спектр на рис. 3а построен на уровне внешней границы замкнутых линий тока цепочки *A*. При $\gamma = 1.806$ скачкообразно рождаются сателлиты гармоник дискретного частотно-волнового спектра, эволюция которых приводит к возникновению динамического хаоса при $\gamma \approx 2.15$. На рис. 3б показан частотно-волновой спектр, определенный на уровне $y = 2.2$ в хаотическом режиме с надкритичностью $\gamma = 2.382$. Он характеризуется наличием пьедесталов сплошного частот-

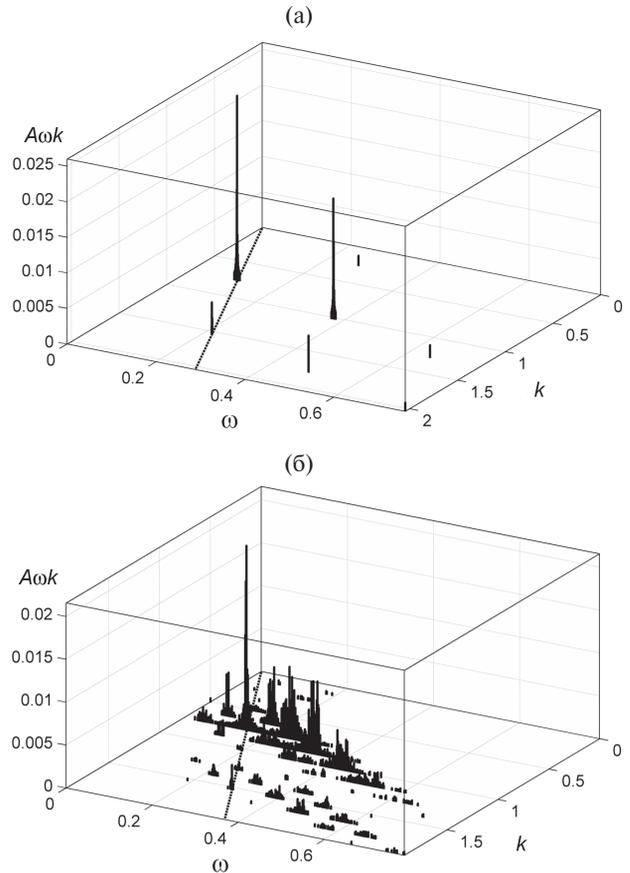


Рис. 3. Частотно-волновые спектры продольной скорости на уровне $y = 2.2$ при $\gamma = 1.63$ (а) и $\gamma = 2.38$ (б). Прямые на плоскости (ω, k) показывают фазовую скорость нелинейных волн ($c = 0.14$ и $c = 0.192$ для (а) и (б) соответственно).

ного спектра в окрестности дискретных пиков. Наличие сложной динамики подтверждено вычислением наибольшего ляпуновского показателя p (подробнее см. [17, 20]). При $\gamma = 2.382$ и $\gamma = 2.15$ были получены значения $p \approx 0.00166$ и $p \approx 0.00053$. Таким образом, p возрастает с ростом надкритичности, а значение $\gamma = 2.15$ действительно находится вблизи точки рождения динамического хаоса. Режим динамического хаоса сохраняется до надкритичности $\gamma = 2.47$, после чего он сменяется новым мультигармоническим режимом.

Следует отметить, что определение скорости сопутствующей системы отсчета (в которой центры замкнутых линий тока неподвижны) в случае мультигармонического и хаотического режимов нуждается в уточнении. С этой целью был использован видеофильм, показывающий эволюцию цепочек при различных значениях скорости c , которая подбиралась из условия остановки цепочки. Отметим, что в сопровождающей системе отсчета остается пространственно-временная модуляция замкнутых линий тока. Наличие гармоник разными фазовыми

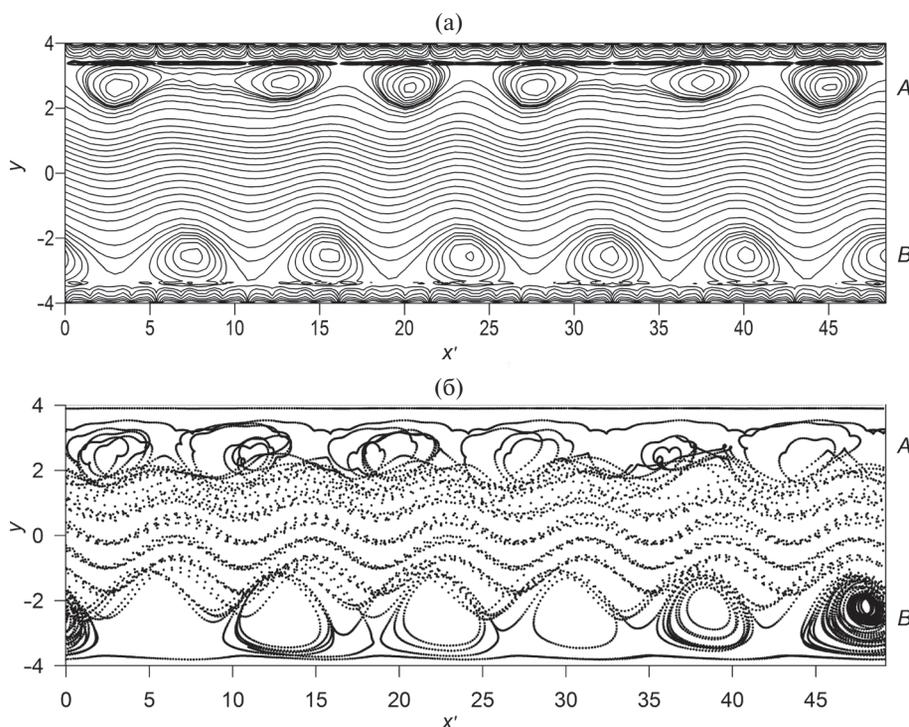


Рис. 4. Мгновенный снимок линий тока струйного течения в сопутствующей волне системе отсчета при $\gamma = 1.63$ (а) и траектории 11 частиц-трассеров с начальными координатами $x' = 0$, $y = 0.7 \times (1 + i)$ и дискретизацией перемещения частиц с шагом по времени $\Delta t = 1$ (б). Траектории частиц в области замкнутых линий тока и в центральной части потока показаны на временах $t = 3000$ и $t = 600$ соответственно.

скоростями на рис. За является необходимым условием для аномального переноса пассивной примеси, связанного с образованием стохастических слоев в окрестности границы замкнутых линий тока цепочки *A* на рис. 4а [10]. Поэтому частотно-волновой спектр является удобным инструментом для выяснения возможности аномального переноса пассивной примеси в рамках динамической модели течения, когда структура волновых возмущений не является предопределенной и определяется насыщением баротропной неустойчивости.

Из рис. 4а видно, что линии тока цепочки *A*, находящейся со стороны основного «горба» на профиле скорости (см. рис. 1), модулированы значительно сильнее по сравнению с линиями тока цепочки *B* (дополнительные гармоники в частотно-волновом спектре на границе цепочки *B* имеют более низкие амплитуды по сравнению с основной волной, чем в цепочке *A*). Обе цепочки имеют одинаковую скорость переноса $c = 0.14$, совпадающую с фазовой скоростью нелинейной волны, формирующей цепочки структур. Построение линий уровня потенциальной завихренности $Z = \zeta + \beta y$ (которая в идеальном течении переносится жидкими частицами) показывает, что наиболее интенсивные вихревые возмущения локализованы в областях максимального наклона профиля скорости, показанного на рис. 1. На рис. 3б показаны

траектории частиц-трассеров, находящихся в начальный момент на линии $x' = 0$ и имеющих различные значения y . Для наглядности расположение частиц-трассеров отмечено точками с шагом по времени $\Delta t = 1$. Кроме того, траектории частиц в окрестности замкнутых линий тока выведены на существенно большем интервале времени ($t \sim 3000$), чем траектории пролетных частиц в средней части струи ($t \sim 600$). Это сделано для того, чтобы уменьшить расхождение траекторий в средней части потока, вызванное нестационарностью линий тока. На временах $t \sim 600$ траектории частиц в средней части течения близки к линиям тока, показанным на рис. 3а.

Поведение траекторий в местах расположения цепочек структур *A* и *B* указывает на наличие спонтанных переходов от вращения частиц внутри замкнутых линий тока (захваченные частицы) к их поступательному движению за пределами замкнутых линий тока (пролетные частицы) и обратно. Видно, что в цепочке *A* частицы-трассеры достигают центров замкнутых линий тока, тогда как в цепочке *B* вращение частиц почти всегда происходит вблизи их границы с основным потоком. Это учтено ниже при выборе начальных условий для трассеров в цепочках *A* и *B*. Различие траекторий частиц в этих цепочках обусловлено более слабой модуляцией линий тока в цепочке *B*. Таким образом, траек-

тории частиц-трассеров, показанные на рис. 4б, наглядно иллюстрируют механизм возникновения стохастических слоев в нестационарных цепочках волновых структур, который сводится к спонтанным переходам частиц через сепаратрисные контура, находящиеся на границе замкнутых линий тока [10, 11, 16].

При вычислении статистических характеристик смещения частиц-трассеров $\delta x = x'(t) - x'(0)$ начальные условия для частиц, относящихся к цепочке *A*, задавались в тонком слое толщиной 0.2 вблизи уровня $y = 2.7$, на котором находятся центральные точки замкнутых линий тока. При расчете перемешивания частиц в цепочке *B* начальные условия задавались в слое толщиной 0.2 по обе стороны двух общих «псевдосепаратрисных» контуров, которые проходили вдоль всех границ замкнутых линий тока и аппроксимировались отрезками ряда Фурье с периодом π/k_1 (аналогично см. [17]). В расчетах, проведенных для ансамбля из 1600 частиц, были получены степенные зависимости от времени для среднего смещения частиц $M = \langle \delta x \rangle \sim t^s$ и его дисперсии $\sigma^2 = \langle (\delta x - \langle \delta x \rangle)^2 \rangle \sim t^\alpha$ (скобки означают среднее по ансамблю), которые характерны для аномального переноса [10]. Установление степенных законов для цепочек *A* и *B* в мультигармоническом и хаотическом режимах иллюстрируют зависимости $|M|$ и σ^2 от времени, представленные на рис. 5. Поскольку для каждой цепочки $\alpha > 1$, имеет место аномальная диффузия примеси, которую можно классифицировать как супердиффузию [10] (при нормальной диффузии $\alpha = 1$). Найденные значения показателя *s* показывают, что адвекция близка к нормальной (при которой строго $s = 1$).

Степенные зависимости *M* и σ^2 от времени говорят о негауссовости статистике смещения частиц пассивной примеси. Наличие траекторий с длинными пробегами частиц приводит к увеличению дисперсии смещения частиц во времени [10]. Как показано в [10], негауссова статистика характеризуется автомодельной плотностью вероятности смещения частиц-трассеров, которая имеет вид

$$P(X, t) = t^{-\alpha/2} f(X/t^{\alpha/2}), \quad (9)$$

где *f* — нормированная плотность вероятности, $X = \delta x - \langle \delta x \rangle$. В соответствии с определением дисперсии $\sigma^2 = \int X^2 P(X, t) dX$ постоянная α совпадает с показателями степенного закона дисперсии, вычисление которых представлено на рис. 5. Результаты расчета *f* как функции

$\eta = X/t^{\alpha/2}$ для цепочки структур *A* в мультигармоническом режиме ($\gamma = 1.63$) для трех последовательных моментов времени показаны на рис. 6. Совпадение функций *f*, построенных в различные моменты времени, доказывает «схлопывание» плотности вероятности к автомодельной зависимости. Функция *f* имеет выраженную негауссовскую форму, которая характеризуется подъемом при больших смещениях частиц, связанным с длинными пробегами частиц в направлении потока (см. рис. 4б).

Рассмотрим кратко вопрос о влиянии вариаций параметров течения на образование нестационарных вихревых цепочек. В расчетах для двугорбой струи без бета-эффекта ($\beta = 0$) установлено, что при совпадении критического

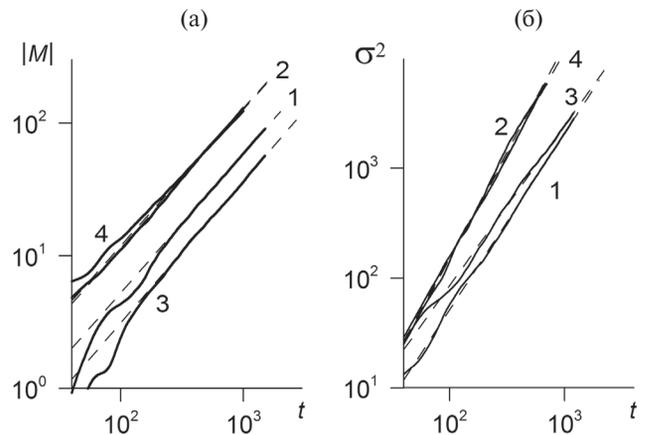


Рис. 5. Зависимость от времени среднего значения (а) и дисперсии (б) смещения частиц в мультигармоническом и хаотическом режимах генерации волн (1, 3 — $\gamma = 1.63$; 2, 4 — $\gamma = 2.38$). Пунктиром показаны линейные аппроксимации для вычисления показателей степенных зависимостей от времени. (а): 1 — $s = 1.047$, 2 — 1.044, 3 — 1.05, 4 — 1.035; (б): 1 — $\alpha = 1.42$, 2 — 1.93, 3 — 1.60, 4 — 1.90.

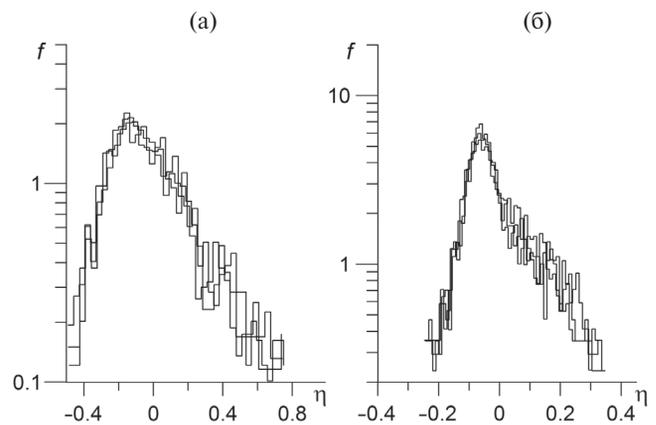


Рис. 6. Нормированная плотность вероятности смещения частиц-трассеров как функция автомодельной переменной η для цепочки структур *A* в мультигармоническом (а) и хаотическом (б) режимах генерации волн в последовательные моменты времени $t = 800, 900, 1000$.

волнового числа первой моды с седьмой пространственной гармоникой: $k_{c1} = k_7 = 0.64$, $\lambda_c = \text{Im } \omega(k_{c1}) = 0.0894$, $\text{Re } c = 60$ при надкритичности $\gamma > 1$ возникает мультигармонический режим генерации цепочек структур с волновым числом основной нелинейной волны k_7 , а при $\gamma > 1.252$ происходит скачкообразное перестроение этого спектра с сохранением доминирования этой волны. Затем в интервале $1.613 < \gamma < 1.809$ быстро нарастает модуляция амплитуд пространственных гармоник во времени. При этом происходит подавление нелинейной волны с волновым числом k_7 и переключение в режим динамического хаоса, в котором формирование цепочки структур определяется нелинейной волной с волновым числом k_6 . В обоих режимах сохраняются качественные особенности частотно-волновых спектров, представленных на рис. 3а, б (отличие состоит в количестве и величине амплитуд возбужденных гармоник дискретного спектра). Динамический хаос обнаружен в интервале $1.809 < \gamma < 2.39$. При $\gamma > 2.39$ начинается новая последовательность бифуркаций, включающая в себя возврат к регулярным режимам и повторное возникновение динамического хаоса. Отметим, что в данном примере мультигармонический режим с нестационарными цепочками структур реализуется уже при малой надкритичности, однако в отличие от кинематических моделей отсутствует неопределенность значений параметров гармоник. Таким образом, в отсутствие бета-эффекта имеет место более раннее возникновение нестационарных цепочек структур и, следовательно, более раннее возникновение аномального переноса пассивной примеси по сравнению с приведенным выше расчетом при $\beta_c = 0.4$. Переход к развитой турбулентности не рассматривался, так как его описание выходит за рамки возможностей принятой схемы численного решения полной системы уравнений.

Изучалось также влияние числа вихревых структур в цепочке на переход к хаосу. Расчеты проводились при $k_c = 0.895$, $\beta_c = 0.4$, $\lambda_c = 0.0336$, и $\text{Re } c = 60$ наложении условия совпадения критического волнового числа с 9-й пространственной гармоникой: $k_{c2} = k_9 = 0.895$. При $\gamma = 1, 1.047, 1.098, 1.394, 1.856\dots$ и $\gamma = 2.56$ последовательно происходили следующие бифуркации: 1) рождение периодических цепочек структур, созданных волной с волновым числом k_9 ; 2) скачкообразный переход $k_9 \rightarrow k_8$; 3) скачкообразный переход $k_8 \rightarrow k_7$; 4) скачкообразный переход к мультигармоническому режиму (нестационарным цепочкам структур) с увеличением волнового числа доминирующей нелинейной

волны: $k_7 \rightarrow k_8$. В интервале $1.856 < \gamma < 2.56$ обнаружено три различных мультигармонических режима (описание которых для краткости опускаем), после чего в интервале $2.56 < \gamma < 2.90$ наблюдался режим динамического хаоса с доминированием волны с волновым числом k_7 . Дальнейшее развитие течения сводилось к возвращению к регулярным режимам и повторному рождению динамического хаоса. Таким образом, увеличение числа вихревых структур в первичной цепочке и связанное с ним сближение волновых чисел пространственных гармоник приводит к росту числа бифуркаций на пути к динамическому хаосу. Порог возникновения регулярных нестационарных цепочек незначительно повышается по сравнению со случаем возбуждения 7 вихрей. По-видимому, для ускорения перехода к хаосу более важным фактором является выполнение подходящих условий для нелинейного взаимодействия гармоник и поступления к ним энергии из потока.

Приведем оценки, подтверждающие возможность генерации нестационарных волновых структур в нижнем плотном слое атмосферы при возбуждении цепочки из 9 вихрей в течении с указанными выше безразмерными параметрами. Предположим, что течение замкнуто в кольцо на широте $\vartheta = 45^\circ$, при которой радиус окружности на земной поверхности $r^{**} = 4500$ км. Эту окружность совместим с серединой кольца (линией $y = 0$). Поскольку длина окружности $2\pi r$ равна длине волны первой гармоники $2\pi/k_1$, получим безразмерный радиус кольца $r = 9/k_c \approx 10$. Соответственно масштаб сдвига скорости $L = r^{**}/r = 450$ км. Ширина кольца $2y_1$, равная 8 в безразмерных единицах, в исходных переменных составляет 3600 км. Поскольку размерностный градиент параметра Кориолиса $\beta^{**} = 2.29 \cdot 10^{-11} \cos(\vartheta) \text{ м}^{-1}\text{с}^{-1}$ [28], критическая скорость $U_c = \beta^{**} L^2 / \beta \approx 8.2$ м/с и размерностный коэффициент внешнего трения $\lambda_c^{**} = \lambda_c U_c / L \approx 6.1 \cdot 10^{-7} \text{ с}^{-1}$. Отклонение течения от параллельного можно считать малым, так как $L/r^{**} = 1/r \approx 0.1$. Согласно приведенному выше расчету мультигармонический режим должен наблюдаться в интервале скоростей $11.5 \text{ м/с} < U < 15.2 \text{ м/с}$, а хаотический — при $U > 21 \text{ м/с}$. Полученные размерностные параметры реальны для течения в атмосфере. В случае 7 вихрей $L = 576$ км и критическая скорость течения равна 13.4 м/с.

Лабораторное моделирование кольцевых цепочек структур часто проводится при $\beta = 0$. Приведем оценки для кольцевого течения в отсутствие вращения жидкости как целого.

Для определенности будем считать, что кольцевое течение создается МГД-методом [2]. При указанных выше параметрах с возбуждением 7 вихрей примем радиус кольца в его срединной части $r^{**} = 16$ см. Поскольку $r = 7/k_{c1} \approx 11$, получим $L = r^{**}/r = 1.45$ см. Ширина канала равна $8L = 11.7$ см. Используя формулу для числа Рейнольдса при $\nu = 0.01$ см²/с находим критическую скорость $U_c = 0.4$ см/с. В соответствии с выражением для толщины вязкого пограничного слоя [2] получим толщину жидкого слоя $h = \sqrt{2\nu L / (U_c \lambda_c)} = 0.9$ см и размерностный коэффициент донного трения $\lambda_c^{**} = \lambda_c U / L = 0.025$ с⁻¹. Параметр непараллельности течения $1/r \approx 0.09$. Проведенные оценки указывают на возможность реализации аномального переноса в лабораторном эксперименте как в мультигармоническом, так и в хаотическом режиме.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе на примере струи с «двугорбым» асимметричным профилем скорости продемонстрирована возможность аномального переноса пассивной примеси в нестационарных цепочках волновых структур, возникающих при насыщении баротропной неустойчивости в плоскопараллельном струйном течении в канале с жесткими стенками в присутствии бета-эффекта и внешнего трения. Показано, что при возбуждении высоких мод возникновение нестационарных цепочек сначала происходит в режиме генерации поля скорости с дискретным мультигармоническим частотно-волновым спектром при надкритичностях существенно ниже порога первого появления динамического хаоса. Вычисление показателей степенных зависимостей среднего смещения частиц-трассеров и его дисперсии в мультигармоническом и хаотическом режимах показали, что адвекция примеси близка к нормальной, тогда как их диффузия является существенно аномальной и может классифицироваться как супердиффузия. В отсутствие бета-эффекта мультигармонический режим с дискретным спектром появляется при малых надкритичностях. Показано, что плотность вероятности смещения частиц в цепочках структур подчиняется автомодельному закону. Увеличение числа вихрей на периоде цепочек приводит к увеличению числа бифуркаций при переходе к динамическому хаосу, но не снижает порог его появления по надкритичности. Проведенные вычисления показали, что основные режимы генерации и переходы между ними являются грубыми характеристиками рассмотренного струйного течения.

Источники финансирования. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-05-00747). Выполнение численного моделирования финансировалось Министерством науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания ИПФ РАН (проект № 0035-2019-0011).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Vasavada A.R., Showman A.P.* Jovian atmospheric dynamics: an update after Galileo and Cassini // *Rep. Prog. Phys.* 2005. V. 68. P. 1935–1996. doi: 10.1088/0034-4885/68/8/R06
2. *Должанский Ф.В., Крымов В.А., Манин Д.Ю.* Устойчивость и вихревые структуры квазидвумерных сдвиговых течений // *УФН.* 1990. Т. 160. № 7. С. 1–47.
3. *Hughes C.W.* The Antarctic circumpolar current as a waveguide for Rossby waves // *J. Phys. Oceanogr.* 1996. V. 26. P. 1375–1387.
4. *Aguiar A.C.B., Read P.L., Wordsworth R.D., Salter T., Yamazaki I.H.* A laboratory model of Saturn’s North Polar Hexagon // *Icarus.* 2010. V. 206. P. 755–763.
5. *Poulin F.J., Flierl G.R.* The nonlinear evolution of barotropically unstable jets // *J. Phys. Oceanogr.* 2003. V. 33. P. 2173–2192.
6. *Van de Konijnenberg J.A., Nielsen A.H., Rasmussen J.J., Stenum B.* Shear-flow instability in a rotating fluid // *J. Fluid Mech.* 1999. V. 387. P. 177–204.
7. *Алексеев В.В., Киселева С.В., Ланно С.С.* Лабораторные модели физических процессов в атмосфере и океане. М: Наука, 2005. 312 с.
8. *Solomon T.H., Weeks E.R., Swinney H.L.* Observation of anomalous diffusion and Lévy flights in a two-dimensional rotating flow // *Phys. Rev. Lett.* 1993. V. 71. P. 3975–3978.
9. *Solomon T.H., Weeks E.R., Swinney H.L.* Chaotic advection in a two-dimensional flow: Lévy flights and anomalous diffusion // *Physica D* 1994. V. 76. P. 70–84.
10. *Del Castillo-Negrete D.* Asymmetric transport and non-Gaussian statistics of passive scalars in vortices in shear // *Phys. Fluids A.* 1998. V. 10. P. 576–594.
11. *Кошель К.В., Пранц С.В.* Хаотическая адвекция в океане. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. 360 с.
12. *Tang W., Walker P.* Finite-time statistics of scalar diffusion in Lagrangian coherent structures // *Phys. Rev.* 2012. V. E86. P. 045201(R).
13. *Wiggins S.* The dynamical systems approach to Lagrangian transport in ocean flows // *Ann. Rev. Fluid Mech.* 2005. V. 37. P. 295–328.
14. *Rogerson M., Miller P.D., Pratt L.J., Jones C.K.R.T.* Lagrangian motion and fluid exchange in a barotropic

- meandering Jet // *J. Phys. Ocean.* 1999. V. 29. P. 2635–2655.
15. Шагалов С.В., Реутов В.П., Рыбушкина Г.В. Асимптотический анализ перехода к турбулентности и хаотической адвекции в сдвиговых зональных течениях на бета-плоскости // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана.* 2010. Т. 46. № 1–2. С. 105–118.
 16. Finn J.M., del-Castillo-Negrete D. Lagrangian chaos and Eulerian chaos in shear flow dynamics // *Chaos.* 2001. V. 11. № 4. P. 816–832.
 17. Reutov V.P., Rybushkina G.V. Anomalous transport of a passive scalar at the transition to dynamical chaos in a barotropic shear layer // *Eur. J. Mech. B/ Fluids.* 2019. V. 74. P. 211–218.
 18. Mizuta R.S., Yoden S. Chaotic mixing and transport barriers in an idealized stratospheric polar vortex // *J. Atmosph. Sci.* 2001. V. 58. P. 2616–2629.
 19. Poncet S., Chauve M.-P. Shear-layer instability in a rotating system // *J. Flow Vis. Image Proc.* 2007. V. 14. № 1. P. 85–105. doi: 10.1615/JFlowVisImageProc.v14.i1.60
 20. Реутов В.П., Рыбушкина Г.В. Переключение мод и динамический хаос в квазидвумерных струйных течениях // *Нелинейный мир.* 2016. Т. 14. № 6. С. 22–31.
 21. Fröh W.-G., Read P.L. Experiments on a barotropic rotating shear layer. Part 1. Instability and steady vortices // *J. Fluid Mech.* 1999. V. 383. P. 143–173.
 22. Fröh W.G., Nielsen A.H. On the origin of time-dependent behaviour in a barotropically unstable shear layer // *Nonlin. Proc. Geophys.* 2003. V.10. P. 289–302.
 23. Батчаев А.М. Экспериментальное исследование за критических режимов течения Колмогорова на цилиндрической поверхности // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.* 1988. Т. 24. № 8. С. 844–851.
 24. Nakano H., Hasumia H. Series of zonal jets embedded in the broad zonal flows in the pacific obtained in eddy-permitting ocean general circulation models // *J. Phys. Oceanogr.* 2005. V. 35. P. 474–488.
 25. Kwon H.J., Mak M. On the equilibration in nonlinear barotropic instability // *J. Atmos. Sci.* 1988. V. 45. P. 294–308.
 26. Orszag S.A. Numerical simulation of incompressible flows within simple boundaries. I. Galerkin (spectral) representations // *Stud. Appl. Math.* 1971. V. 50. № 4. P. 293–327.
 27. Reutov V.P., Rybushkina G.V. Different-scale convective structures in a cooled liquid layer with a horizontal shear flow // *Phys. Fluids.* 2013. V. 25. P. 074101.
 28. Педлоки Дж. Геофизическая гидродинамика Т. 1. Перевод с англ. М: Мир, 1984. 398с.

Unsteady Chains of Wave Structures and Anomalous Transport of a Passive Scalar in a Barotropic Jet Flow

V. P. Reutov, G. V. Rybushkina

*Institute of Applied Physics, RAS
Ulyanova St., 46, Nizhny Novgorod, 603950, Russia
E-mail: reutov@appl.sci-nnov.ru*

Received: 29.04.2019

Accepted: 07.08.2019

The onset of anomalous transport of a passive scalar at the excitation of unsteady chains of wave structures with closed streamlines in a barotropic jet flow modeling zonal flows in the Earth's atmosphere and ocean and in laboratory experiments is investigated. The analysis is performed within a dynamical model describing saturation of the barotropic instability in a plane-parallel channel flow with allowance for the beta-effect and external friction. The equations of a quasi-two-dimensional flow are solved numerically with the aid of a pseudospectral method. It is found that the generation of high modes in a jet with a “two-hump” velocity profile leads to accelerated transition to the complex dynamics, at which an increase in supercriticality first gives rise to a multiharmonic regime with a discrete spectrum. The exponents of the power dependence on the time of the averaged (over the ensemble) tracer particle displacement and its variance are computed for the basic generation regimes, which confirms the occurrence of anomalous diffusion of the scalar. A self-similar probability density function of tracer displacements is obtained and the dependence of the transition to complex dynamics on the number of vortices in the chain and on the strength of the beta-effect is elucidated. Numerical estimates are presented, which confirm the possibility of generation of unsteady vortex chains and the related anomalous transport of the scalar.

Keywords: barotropic flow, chains of wave structures, dynamical chaos, anomalous advection and diffusion.