

УДК 519.6,551.46

ВАРИАЦИОННОЕ УСВОЕНИЕ ДАННЫХ ДЛЯ МОДЕЛИ ТЕРМОДИНАМИКИ МОРЯ И ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ МОРСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК К ОШИБКАМ НАБЛЮДЕНИЙ

© 2023 г. В. П. Шутяев^а, *, Е. И. Пармузин^а, **

^аИнститут вычислительной математики им. Г.И. Марчука РАН, ул. Губкина, 8, Москва, 119333 Россия

*e-mail: victor.shutyayev@mail.ru

**e-mail: e.parmuzin@inm.ras.ru

Поступила в редакцию 14.07.2023 г.

После доработки 14.08.2023 г.

Принята к публикации 28.08.2023 г.

Изложена методология вариационного усвоения данных наблюдений для восстановления начального состояния и потоков тепла для математической модели термодинамики моря. Разработан алгоритм оценки чувствительности модельного решения к ошибкам данных наблюдений. Вычисление градиента функции отклика модельного решения базируется на использовании гессиана функционала стоимости. Приведены результаты численных экспериментов для модели динамики Черного моря, разработанной в ИВМ РАН.

Ключевые слова: вариационное усвоение данных наблюдений, оптимальное управление, сопряженные уравнения, ковариационные матрицы, чувствительность, модель термодинамики моря

DOI: 10.31857/S0002351523060093, **EDN:** OQKOZO

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы возрастает интерес к методам исследования и численного решения задач усвоения данных, играющих фундаментальную роль в математическом моделировании процессов из самых различных областей знаний. Среди этих методов важную роль играет вариационный подход, при котором задачи усвоения данных формулируются как задачи оптимального управления. Наибольшее развитие и распространение эти методы получили в метеорологии и океанографии, где данные наблюдений усваиваются в моделях атмосферы и океана с целью получения начальных и/или граничных условий, функций источников (форсингов) или параметров модели для последующего моделирования и прогноза [Sasaki, 1958; Lions, 1968; Пененко и Образцов, 1976; Пененко, 1981; Le Dimet and Talagrand, 1986; Marchuk, 1995; Агошков, 2003; Morgensen et al., 2009; Asch et al., 2016; Zalesny et al., 2016; Fletcher, 2017; Carrassi et al., 2018; Shutyayev, 2019; Zalesny et al., 2019].

При рассмотрении задач вариационного усвоения данных наблюдений важную роль играет анализ чувствительности оптимального решения и его функционалов по отношению к входным данным [Le Dimet et al., 1997; Le Dimet et al., 2002; Le Dimet, Shutyayev, 2005; Daescu, 2008; Gejadze

et al., 2008; Gejadze et al., 2010; Chen et al., 2013; Cioaca et al., 2013; Gejadze et al., 2013; Агошков и др., 2013; Шутяев и др., 2019; Gualtieri et al., 2022; Shapiro et al., 2023; Shutyayev et al., 2023].

Для понимания и учета неопределенностей при предсказании процессов в океане важным является исследование чувствительности характеристик модели, полученных после усвоения, к ошибкам данных наблюдений. Морские характеристики представляют интерес в виде функций отклика, зависящих от переменных модели: температуры, солёности и др. В работе [Shutyayev et al., 2023] проведено исследование чувствительности функций отклика от решения задачи вариационного усвоения данных с целью восстановления потоков тепла на поверхности моря при использовании ковариационных матриц ошибок данных наблюдений и ошибок начального приближения. Настоящая работа обобщает результаты работы [Shutyayev et al., 2023] на случай задачи вариационного усвоения данных при одновременном восстановлении начального состояния и потока тепла для модели термодинамики моря. Исследована чувствительность функций отклика от решения задачи по отношению к ошибкам данных наблюдений, разработан алгоритм вычисления градиента функции отклика через гессиан функции стоимости и приведены результаты численных экспе-

риментов для модели динамики Черного моря [Zalesny et al., 2012], разработанной в ИВМ РАН.

1. ВАРИАЦИОННОЕ УСВОЕНИЕ ДАННЫХ НАБЛЮДЕНИЙ ДЛЯ МОДЕЛИ ТЕРМОДИНАМИКИ МОРЯ

Модель термодинамики моря является частью модели общей циркуляции океана INMOM [Дианский и др., 2002; Zalesny et al., 2020], разработанной в ИВМ РАН. Модель INMOM описывается системой примитивных уравнений [Марчук, Дымников и Залесный, 1987; Марчук и Залесный, 2012] и включает следующее уравнение для температуры:

$$\begin{aligned} T_t + (\bar{U}, \text{Grad})T - \text{Div}(\hat{a}_T \text{Grad}T) &= \\ = f_T \text{ в } D \times (0, \bar{t}), \quad T = T_0 \text{ при } t = 0 \text{ в } D, \\ -\nu_T \frac{\partial T}{\partial z} = Q \text{ на } \Gamma_S \times (0, \bar{t}), \\ \bar{U}_n^{(-)} T + \frac{\partial T}{\partial N_T} = \bar{U}_n^{(-)} d_T + Q_T \text{ на } \Gamma_{w,op} \times (0, \bar{t}), \\ \frac{\partial T}{\partial N_T} = 0 \text{ на } \Gamma_{w,c} \times (0, \bar{t}), \\ \frac{\partial T}{\partial N_T} = 0 \text{ на } \Gamma_H \times (0, \bar{t}), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $T = T(x, y, z, t)$ – неизвестная функция температуры, $t \in (0, \bar{t})$, $(x, y, z) \in D = \Omega \times (0, H)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $H = H(x, y)$ – функция рельефа дна, $Q = Q(x, y, t)$ – суммарный приток тепла, $\bar{U} = (u, v, w)$, $\hat{a}_T = \text{diag}((a_T)_{ii})$, $(a_T)_{11} = (a_T)_{22} = \mu_T$, $(a_T)_{33} = \nu_T$, $f_T = f_T(x, y, z, t)$ – заданные функции. Здесь $\bar{U}_n^{(-)} = (|\bar{U}_n| - \bar{U}_n)/2$, где \bar{U}_n – нормальная компонента вектора скорости. Скорости u, v, w зависят в общем случае от пространства и времени. Граница области $\Gamma \equiv \partial D$ представляется как объединение четырех непересекающихся частей $\Gamma_S, \Gamma_{w,op}, \Gamma_{w,c}, \Gamma_H$, где $\Gamma_S = \Omega$ (невозмущенная поверхность моря), $\Gamma_{w,op}$ – жидкая (открытая) часть вертикальной боковой границы, $\Gamma_{w,c}$ – твердая часть вертикальной боковой границы, Γ_H – дно моря. Другие обозначения и детальное описание постановки задачи можно найти в работах [Agoshkov et al., 2007; Агошков, Пармузин и Шутяев, 2008; Zalesny et al., 2012].

Для краткости будем записывать систему (1.1) в форме операторного уравнения

$$T_t + LT = F + BQ, \quad t \in (0, \bar{t}), \quad T = T_0 \text{ при } t = 0, \quad (1.2)$$

которое понимается в обобщенном смысле:

$$\begin{aligned} (T_t, \hat{T}) + (LT, \hat{T}) &= F(\hat{T}) + (BQ, \hat{T}), \\ \forall \hat{T} \in W_2^1(D), \end{aligned} \quad (1.3)$$

где операторы L, F, B определяются интегральными соотношениями:

$$\begin{aligned} (LT, \hat{T}) &= \int_D (-T \text{Div}(\bar{U} \hat{T})) dD + \int_{\Gamma_{w,op}} \bar{U}_n^{(+)} T \hat{T} d\Gamma + \\ &+ \int_D \hat{a}_T \text{Grad}(T) \text{Grad}(\hat{T}) dD, \\ F(\hat{T}) &= \int_{\Gamma_{w,op}} Q_T \hat{T} d\Gamma + \int_D f_T \hat{T} dD, \\ \bar{U}_n^{(+)} &= (|\bar{U}_n| + \bar{U}_n)/2, \\ (BQ, \hat{T}) &= \int_{\Omega} Q \hat{T}|_{z=0} d\Omega, \quad (T_t, \hat{T}) = \int_D T_t \hat{T} dD, \end{aligned}$$

при этом функции \hat{a}_T, Q_T, f_T, Q таковы, что равенство (1.3) имеет смысл. Отметим, что правая часть уравнения (1.3) включает слагаемое BQ , которое определяется через граничную функцию Q из (1.1).

Рассмотрим задачу об усвоении данных о температуре поверхности моря, следуя [Агошков и др., 2008; Le Dimet et al., 2016].

Предположим, что в задаче (1.1) функции $T_0 \in L_2(D)$ и $Q \in L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$ не известны. Пусть задана функция данных наблюдений $T_{obs}(x, y, t) \in L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$, которая по своему физическому смыслу есть приближение к функции поверхностной температуры на Ω , т.е. к $T|_{z=0}$. Считаем, что $T_{obs} \in L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$. Часто возникает случай, когда T_{obs} имеется лишь на некотором подмножестве из $\Omega \times (0, \bar{t})$, характеристическую функцию которого обозначим через m_0 .

Будем предполагать, что данные наблюдений T_{obs} заданы с ошибками, а именно:

$$T_{obs} = m_0 T^t|_{z=0} + \xi_{obs},$$

где T^t – точное решение задачи (1.1) при некотором $Q = Q^t$, а $\xi_{obs} \in Y_{obs} = L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$ рассматривается как ошибка наблюдений в пространстве наблюдений Y_{obs} . Предполагается, что ошибки ξ_{obs} случайные и распределены по нормальному закону (гауссовские) с нулевым математическим ожиданием и ковариационным оператором $\mathcal{R} = E[(\cdot, \xi_{obs}) \xi_{obs}]$, где E – математическое ожидание. В дальнейшем мы будем предполагать, что \mathcal{R} положительно определен и, значит, обратим.

Рассмотрим следующую вариационную задачу: найти T, T_0 и Q , такие что

$$\begin{cases} T_t + LT = F + BQ, & t \in (0, \bar{t}), \\ T = T_0 & \text{при } t = 0, \\ J(T_0, Q) = \inf_{\tilde{T}_0, \tilde{Q}} J(\tilde{T}_0, \tilde{Q}), \end{cases} \quad (1.4)$$

где

$$\begin{aligned} J(T_0, Q) &= \frac{\alpha}{2} \int_D (T_0 - T^{(0)})^2 dD + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^{\bar{t}} \int_{\Omega} (Q - Q^{(0)}) \mathfrak{B}^{-1} (Q - Q^{(0)}) d\Omega dt + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^{\bar{t}} \int_{\Omega} (m_0 T - T_{obs}) \mathfrak{R}^{-1} (m_0 T - T_{obs}) d\Omega dt, \end{aligned}$$

$T^{(0)} = T^{(0)}(x, y, z)$, $Q^{(0)} = Q^{(0)}(x, y, t)$ – заданные функции, $\alpha = \text{const} > 0$, \mathfrak{B} – ковариационный оператор ошибок входных данных о потоке тепла.

Функция $Q^{(0)}$ обычно выбирается в качестве начального приближения для неизвестного потока Q (так называемый “фоновый поток” или среднеклиматический поток). Цель вариационного усвоения данных – используя $T^{(0)}, Q^{(0)}$, найти лучшие оценки для T_0, Q , которые приводят к решению, минимально отклоняющемуся от наблюдений, и не вызывают шокового эффекта при дальнейшем моделировании и прогнозе.

Слагаемые с параметром α и с весовым оператором \mathfrak{B}^{-1} играют роль регуляризации по Тихонову [Тихонов, 1963], они считаются заданными при рассмотрении задачи. Если оператор \mathfrak{B} положительно определен, то при $\alpha > 0$ поставленная задача вариационного усвоения данных имеет единственное решение. Существование оптимального решения следует из классических результатов теории экстремальных задач [Lions, 1968], так как можно показать, что решение задачи (1.2) непрерывно зависит от начального состояния T_0 и потока Q .

Необходимое условие оптимальности $\text{grad}J = 0$, которое определяет решение сформулированной задачи вариационного усвоения данных, приводит к системе оптимальности [Lions, 1968], включающей (1.2) и сопряженную задачу с дополнительными граничными условиями по пространству и времени:

$$-(T^*)_t + L^* T^* = B \mathfrak{R}^{-1} (m_0 T - T_{obs}), \quad (1.5)$$

$$t \in (0, \bar{t}), \quad T^* = 0 \text{ при } t = \bar{t},$$

$$\alpha (T_0 - T^{(0)}) + T^* = 0 \text{ при } t = 0 \text{ в } D, \quad (1.6)$$

$$\mathfrak{B}^{-1} (Q - Q^{(0)}) + T^* = 0 \text{ на } \Omega \times (0, \bar{t}), \quad (1.7)$$

где L^* – оператор, сопряженный к L . Последние два уравнения в этой системе означают, что градиент функции стоимости $J(T_0, Q)$ по отношению к начальному состоянию T_0 и потоку тепла Q обращается в нуль. Неизвестными в (1.2), (1.5)–(1.7) являются функции T, T^*, T_0 и Q .

Для решения системы оптимальности (1.2), (1.5)–(1.7) мы рассмотрим итерационный алгоритм вида:

$$\begin{aligned} T_t^k + LT^k &= F + BQ^k, & t \in (0, \bar{t}), \\ T^k &= T_0^k & \text{при } t = 0, \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} -\left(T^{*k}\right)_t + L^* T^{*k} &= B \mathfrak{R}^{-1} (m_0 T^k - T_{obs}), \\ t \in (0, \bar{t}), \quad T^{*k} &= 0 \text{ при } t = \bar{t}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} T_0^{k+1} &= T_0^k - \tau_k \left(\alpha (T_0^k - T^{(0)}) + T^{*k} \right) \\ &\text{при } t = 0 \text{ в } D, \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} Q^{k+1} &= Q^k - \tau_k \left(\mathfrak{B}^{-1} (Q^k - Q^{(0)}) + T^{*k} \right) \\ &\text{на } \Omega \times (0, \bar{t}), \end{aligned} \quad (1.11)$$

где τ_k – итерационные параметры, T^k, T^{*k}, T_0^k, Q^k – итерационные последовательности, k – номер итерации, $k = 1, 2, \dots$. Такие итерационные алгоритмы исследовались и применялись в работах [Marchuk, 1995; Марчук и Залесный, 2012; Шутяев, 2001].

2. ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ К ОШИБКАМ НАБЛЮДЕНИЙ

Рассмотрим функцию отклика $G(T)$, зависящую от T , которая предполагается вещественнозначной и может рассматриваться как функционал на $X = L_2(D \times (0, \bar{t}))$. Нас интересует чувствительность функции отклика $G(T)$ к данным наблюдений T_{obs} при условии, что T получена после вариационного усвоения из системы оптимальности (1.2), (1.5)–(1.7). Как известно [Marchuk, 1995; Casuci, 1981], чувствительность функционала определяется градиентом по T_{obs} , который является производной Гато:

$$\frac{dG}{dT_{obs}} = \frac{\partial G}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial T_{obs}}. \quad (2.1)$$

Обозначим через δT_{obs} вариацию функции T_{obs} . Из (1.2), (1.5)–(1.7) выводим систему оптимальности для вариаций:

$$\delta T_t + L\delta T = B\delta Q, \quad (2.2)$$

$$t \in (0, \bar{t}), \quad \delta T = \delta T_0 \text{ при } t = 0,$$

$$-(\delta T^*)_t + L^*\delta T^* = B\mathcal{R}^{-1}(m_0\delta T - \delta T_{obs}), \quad (2.3)$$

$$t \in (0, \bar{t}), \quad \delta T^* = 0 \text{ при } t = \bar{t},$$

$$\alpha\delta T_0 + \delta T^* = 0 \text{ при } t = 0 \text{ в } D, \quad (2.4)$$

$$\mathcal{B}^{-1}\delta Q + \delta T^* = 0 \text{ на } \Omega(0, \bar{t}). \quad (2.5)$$

В (2.2)–(2.5) отсутствуют функции $T^{(0)}, Q^{(0)}$, которые исчезают при дифференцировании системы (1.2), (1.5)–(1.7).

Нетрудно видеть [Шутяев, 2001], что система (2.2)–(2.5) эквивалентна уравнению для вариации оптимального решения $\delta\Theta = (\delta T_0, \delta Q)^T$:

$$\mathcal{H}\delta\Theta = \Theta^*, \quad (2.6)$$

где \mathcal{H} – гессиан функционала стоимости $J(T_0, Q)$, $\Theta^* = (\theta^*|_{t=0}, \theta^*|_{z=0})^T$, а θ^* – решение сопряженной задачи

$$-(\theta^*)_t + L^*\theta^* = B\mathcal{R}^{-1}\delta T_{obs}, \quad t \in (0, \bar{t}), \quad (2.7)$$

$$\theta^* = 0 \text{ при } t = \bar{t}.$$

Из (2.6)

$$\delta\Theta = \mathcal{H}^{-1}\Theta^*. \quad (2.8)$$

Формула (2.8) дает в явном виде выражение для вариаций оптимального решения $\delta T_0, \delta Q$ через вариацию функции данных наблюдений δT_{obs} , которая входит через Θ^* в правую часть (2.8). Уравнение вида (2.8) может быть положено в основу исследования чувствительности оптимального решения и его функционалов к ошибкам данных наблюдений.

Рассмотрим значение градиента (2.1) на вариации δT_{obs} :

$$\left(\frac{dG}{dT_{obs}}, \delta T_{obs} \right) = \left(\frac{\partial G}{\partial T}, \delta T \right), \quad (2.9)$$

где $\delta T = \frac{\partial T}{\partial T_{obs}} \delta T_{obs}$ – решение системы (2.2)–(2.5). Поскольку

$$\left(\frac{\partial G}{\partial T}, \delta T \right) = (\phi^*|_{t=0}, \delta T_0) + (\phi^*|_{z=0}, \delta Q), \quad (2.10)$$

где ϕ^* – решение сопряженной задачи

$$-(\phi^*)_t + L^*\phi^* = \frac{\partial G}{\partial T}, \quad (2.11)$$

$$t \in (0, \bar{t}), \quad \phi^* = 0 \text{ при } t = \bar{t},$$

то в силу (2.8) получаем

$$\left(\frac{dG}{dT_{obs}}, \delta T_{obs} \right) = (m_0\mathcal{R}^{-1}\delta T|_{z=0}, \delta T_{obs}), \quad (2.12)$$

где δT – решение (2.2). Таким образом, градиент определяется по формуле

$$\frac{dG}{dT_{obs}} = m_0\mathcal{R}^{-1}\delta T|_{z=0}. \quad (2.13)$$

Приходим к алгоритму вычисления градиента функции отклика модельного решения:

- 1) решаем сопряженную задачу (2.11) и полагаем $\mathcal{F} = (\phi^*|_{t=0}, \phi^*|_{z=0})^T$,
- 2) решаем уравнение с гессианом $\mathcal{H}\delta\Theta = \mathcal{F}$ и определяем $\delta\Theta = (\delta T_0, \delta Q)^T$,
- 3) решаем прямую задачу (2.2) и определяем δT ,
- 4) вычисляем градиент по формуле (2.13).

Сформулированный алгоритм использовался при численных расчетах для оценки чувствительности функций отклика, связанных с температурой после вариационного усвоения, по отношению к ошибкам данных наблюдений T_{obs} .

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Для численных экспериментов использовалась трехмерная численная модель гидротермодинамики Черного моря, разработанная в ИВМ РАН на основе метода расщепления [Zalesny et al., 2012] и дополненная процедурой усвоения температуры поверхности моря (ТПМ) для восстановления начального состояния T_0 и тепловых потоков Q с учетом ковариационных матриц ошибок наблюдений и ошибок данных о потоке тепла.

Параметры рассматриваемой области Черного моря и ее географические координаты можно описать следующим образом: σ -сетка $306 \times 200 \times 27$ (широта, долгота и глубина соответственно). Первая точка "сетки С" [Дианский и др., 2002] имеет координаты 26.65° E и 40.15° N . Шаги сетки по x и y постоянны и равны $0,05$ и $0,036$ градуса соответственно. Шаг по времени равен $\Delta t = 2.5$ мин. На рис. 1 представлена расчетная область с топографией Черного моря.

В качестве данных наблюдений T_{obs} в данном эксперименте были выбраны данные ТПМ спектрометра MODIS на спутнике Aqua, предоставленные спутниковой службой 'See the Sea', входящей в состав ЦКП "ИКИ Мониторинг" [Лупян и др., 2012]. Данные ТПМ были пересчитаны на сетку численной модели [Захарова, 2016].

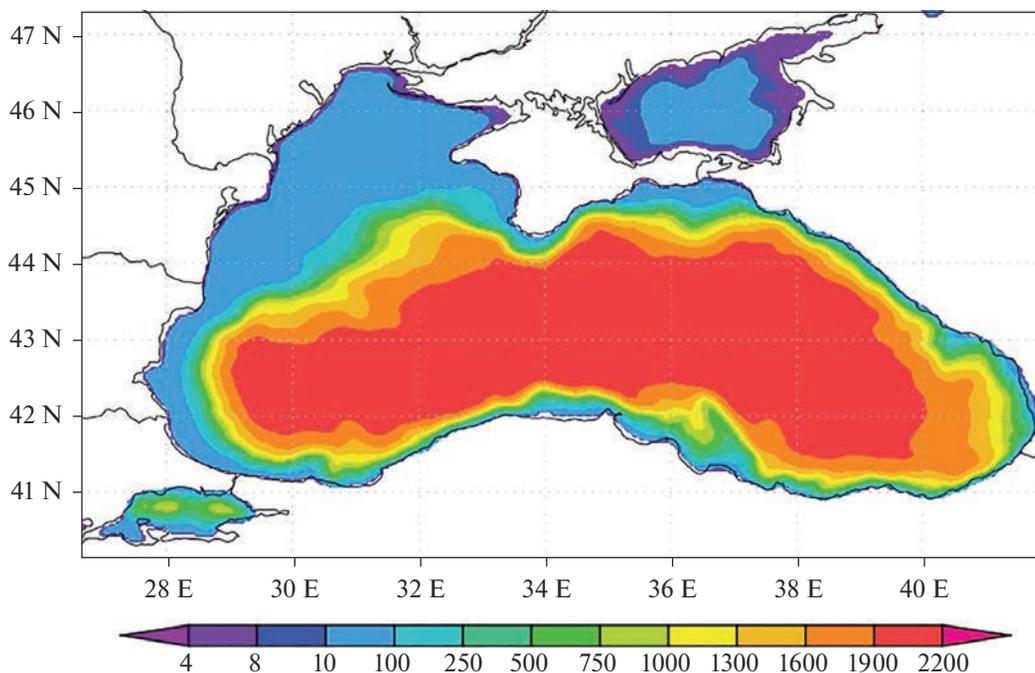


Рис. 1. Расчетная область и топография Черного моря (м). (а)

Значения среднего климатического теплового потока $Q^{(0)}$ использовались в процедуре усвоения данных в качестве начального приближения. Поток тепла на поверхности моря рассчитан по данным реанализа Era 5 за период с 1979 по 2021 гг. [Hersbach et al., 2020]. По данным за 1979–2021 гг. рассчитаны средние значения и дисперсии теплового потока по дневным и ночным данным для каждого дня года. Полученные дисперсии представляют собой диагональные элементы ковариационной матрицы ошибок бэкграунда \mathcal{B} . Аналогичным образом [Агошков и др., 2019] на основе данных ТПМ сервиса Copernicus (data.marine.copernicus.eu) за период с 1982 по 2019 гг. рассчитывались элементы ковариационной матрицы ошибок данных наблюдений \mathcal{R} .

С использованием модели гидротермодинамики Черного моря, дополненной процедурой усвоения температуры поверхности T_{obs} , были проведены численные расчеты на исследуемой акватории. Алгоритм усвоения работал лишь в некоторые моменты времени t_k , при этом $\bar{t} = t_{k+1} = t_k + \Delta t$. При реализации процедуры усвоения на одном шаге по времени (t_k, t_{k+1}) рассматривалась система вида (1.2), (1.5)–(1.7) с диагональными ковариационными матрицами \mathcal{B} и \mathcal{R} . На каждом из таких шагов был проведен расчет чувствительности функции отклика $G(T)$ к ошибкам данным наблюдений согласно алгоритму из раздела 2.

В численных расчетах, следуя [Shutyaev et al., 2023], рассматривалась функция отклика вида

$$G(T) = \frac{1}{\tau} \int_{t_1-\tau}^{t_1} dt \left(\frac{1}{\text{mes } \omega} \int_{\omega} T(x, y, 0, t) d\Omega \right), \quad (3.1)$$

которая определяет среднюю температуру в избранной акватории моря ω при $z = 0$ в интервале $t_1 - \tau \leq t \leq t_1$, где $\text{mes } \omega$ означает площадь района ω .

На рис. 2 представлены диагональные элементы матриц \mathcal{B} (рис. 2а) и \mathcal{R} (рис. 2б), используемые в эксперименте. На рис. 3а приведены данные наблюдений, полученные со спутника Aqua, на 1 июля 2021 года 11 часов 00 мин. Заметим, что пробелы на графике показывают области акватории с отсутствием данных. Пример потока тепла на 1 июля 2021 года приведен на рис. 3б.

Разработанный алгоритм позволяет определять области наибольшего градиента функции отклика как средней по интервалу температуры поверхности океана для избранного района, полученной в результате процедуры усвоения. Результаты расчета градиента функции отклика (3.1) по отношению к ошибкам данным наблюдений согласно алгоритму для 1 июля 2021 года приведены на рис. 4. Из рис. 4 видно, что мелководные северо-западная и западная части Черного моря наиболее чувствительны к этим ошибкам с максимальным значением градиента 5.0×10^{-3} . Отметим, что область, близкая к побережью южной части Черно-

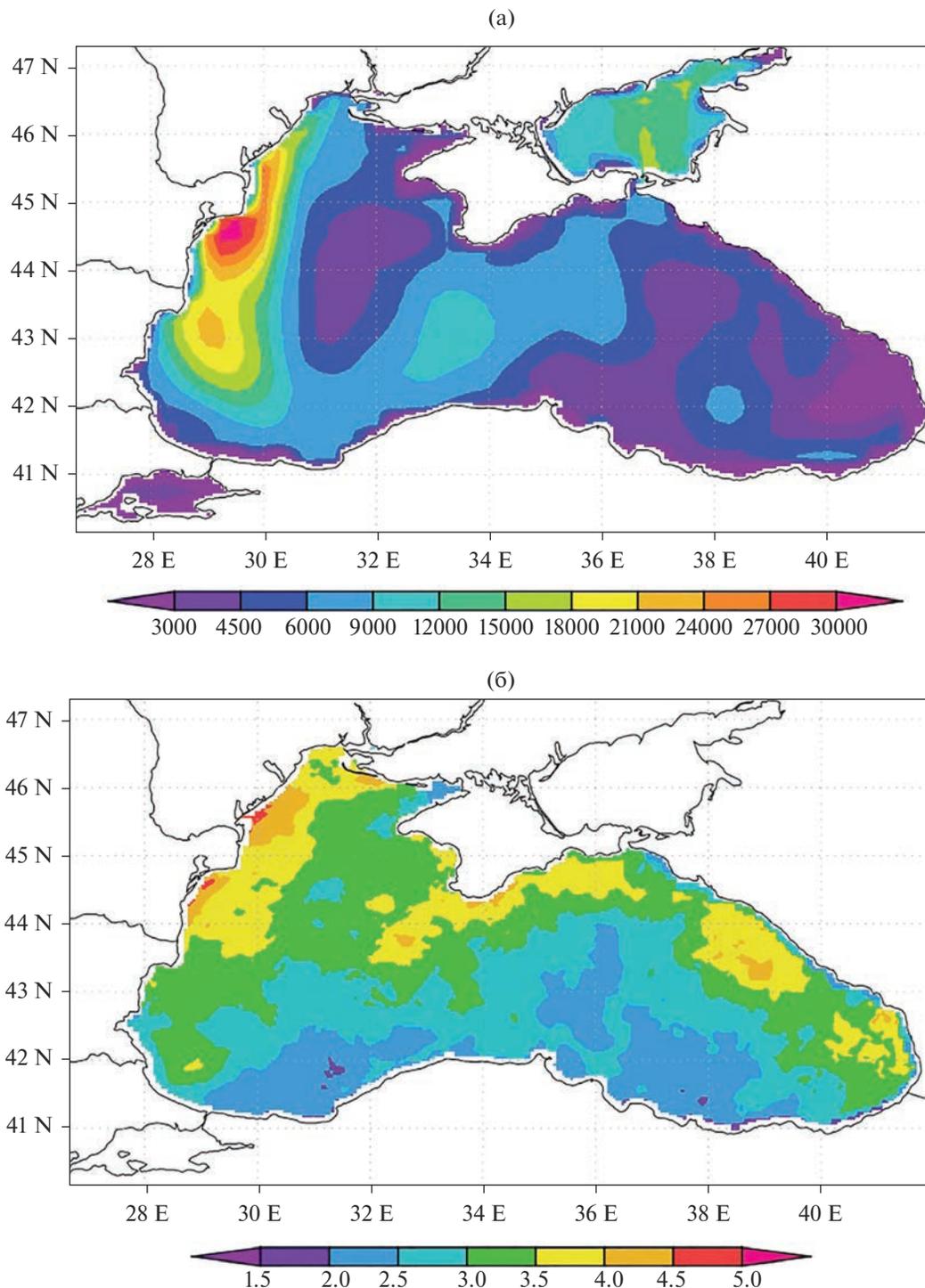


Рис. 2. Значения диагональных элементов матриц \mathcal{B} и \mathcal{R} в численном эксперименте. Диагональные элементы матрицы \mathcal{B} . (б) Диагональные элементы матрицы \mathcal{R} .

го моря, также чувствительна к ошибкам данных наблюдений. Центральная часть Черного моря, характеризующаяся наибольшей глубиной, согласно проведенным расчетам, является, наоборот, наименее чувствительной областью. Здесь значения градиента функции отклика менее 5.0×10^{-5} , т.е. на 2

порядка меньше, чем в областях с большей чувствительностью.

Эти результаты подтверждаются прямыми вычислениями функции отклика $G(T)$ в соответствии с (3.1), полученного после вариационного усвоения, путем введения возмущений в

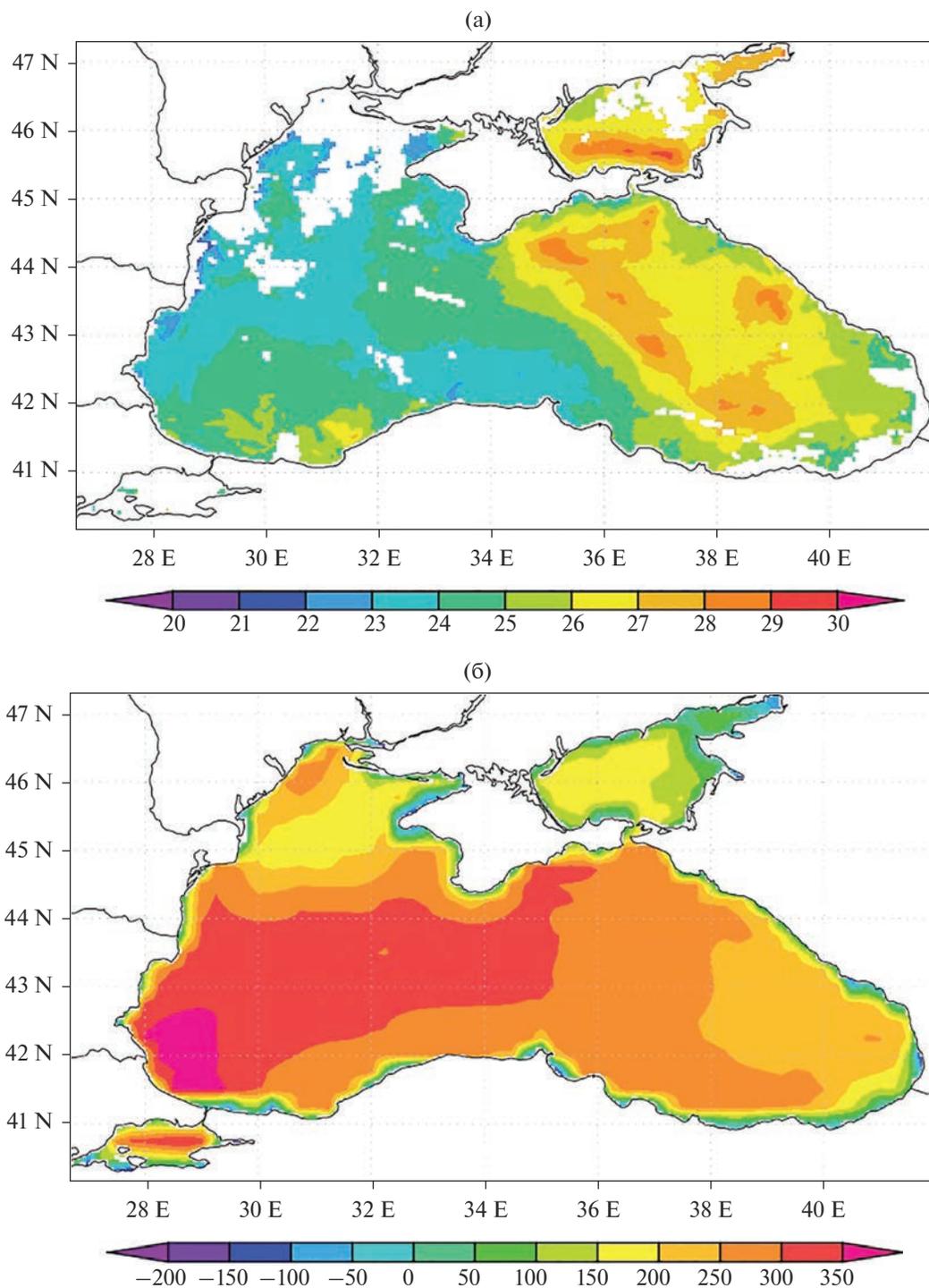


Рис. 3. Данные, используемые при расчетах. (а) Температура поверхности моря, °С. (б) Поток тепла на поверхности, Вт/м².

данные наблюдений T_{obs} , следуя работе [Le Dimet et al., 2016].

Таким образом, предложенный алгоритм позволяет оценивать чувствительность функций отклика, связанных с температурой поверхности моря после вариационного усвоения, по отношению

к ошибкам данных наблюдений в случае, когда значения этих ошибок заранее не известны.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе проведено исследование чувствительности морских характеристик как

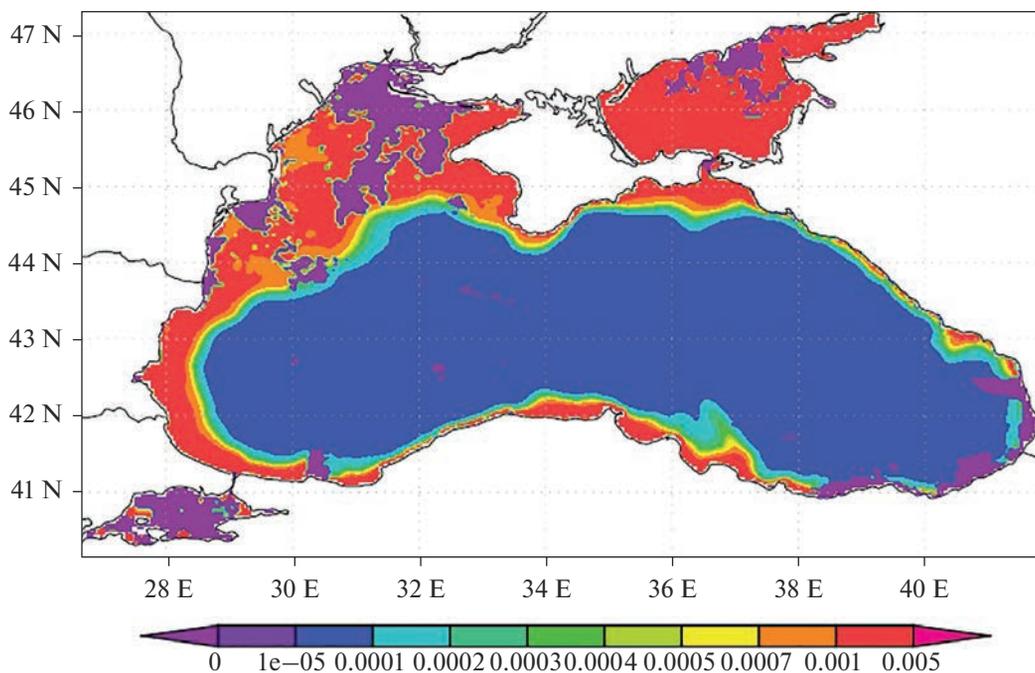


Рис. 4. Градиент функции отклика $G(T)$.

функций отклика от решения задачи вариационного усвоения к данным наблюдений для модели термодинамики Черного моря с целью одновременного восстановления начального состояния и потоков тепла. Разработан алгоритм оценки чувствительности модельного решения к ошибкам данных наблюдений. Суть алгоритма состоит в вычислении градиента функции отклика модельного решения и сводится к однократному решению прямой и сопряженной задач и уравнения с гессианом функционала стоимости. Алгоритм применен для модели термодинамики Черного моря, разработанной в ИВМ РАН. Результаты расчета показали, что средняя температура поверхности в мелководных северо-западной и западной частях Черного моря наиболее чувствительна к ошибкам наблюдений. Центральная часть Черного моря, характеризующаяся наибольшей глубиной, согласно проведенным расчетам, является, наоборот, наименее чувствительной областью. Разработанный алгоритм позволяет вычислять градиенты функций отклика, полученных в ходе усвоения, по отношению к данным наблюдений о температуре поверхности моря. Методология оценки градиентов функций отклика может быть использована в проблеме оптимального размещения сенсоров и станций наблюдений для решения практических задач вариационного усвоения данных, важных для мониторинга состояния морской среды и климата.

Авторы благодарны рецензенту за полезные замечания, которые позволили улучшить пред-

ставление результатов и изложение материала в статье.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда: проект 19-71-20035 (исследования в разделах 1 и 3) и проект 20-11-20057 (исследования в разделе 2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Агошков В.И.* Методы оптимального управления и сопряженных уравнений в задачах математической физики. М.: ИВМ РАН, 2003.
- Агошков В.И., Пармузин Е.И., Шутяев В.П.* Численный алгоритм вариационной ассимиляции данных наблюдений о температуре поверхности океана // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48. № 8. С. 1371–1391.
- Агошков В.И., Пармузин Е.И., Шутяев В.П.* Ассимиляция данных наблюдений в задаче циркуляции Черного моря и анализ чувствительности ее решения // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2013. Т. 49. № 6. С. 643–654.
- Агошков В.И., Шутяев В.П., Пармузин Е.И., Захарова Н.Б., Шелопут Т.О., Лезина Н.Р.* Вариационная ассимиляция данных наблюдений в математической модели динамики Черного моря // Морской гидрофизический журн. 2019. Т. 35. № 6. С. 585–599.
- Дианский Н.А., Багно А.В., Залесный В.Б.* Сигма-модель глобальной циркуляции океана и ее чувствительность к вариациям напряжения трения ветра // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2002. Т. 38. № 4. С. 537–556.
- Захарова Н.Б.* Верификация данных наблюдений о температуре поверхности моря // Современные

- проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2016. Т. 13. № 3. С. 106–113.
- Луян Е.А., Матвеев А.А., Уваров И.А., Бочарова Т.Ю., Лаврова О.Ю., Митягина М.И. Спутниковый сервис See the Sea – инструмент для изучения процессов и явлений на поверхности океана // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2012. Т. 9. № 2. С. 251–261.
- Марчук Г.И., Дымников В.П., Залесный В.Б. Математические модели в геофизической гидродинамике и численные методы их реализации. Л.: Гидрометеоиздат, 1987.
- Марчук Г.И., Залесный В.Б. Моделирование циркуляции мирового океана с четырехмерной вариационной ассимиляцией полей температуры и солёности // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2012. Т. 48. № 1. С. 21–36.
- Пененко В.В., Образцов Н.Н. Вариационный метод согласования полей метеорологических элементов // Метеорология и гидрология. 1976. № 11. С. 1–11.
- Пененко В.В. Методы численного моделирования атмосферных процессов. Л.: Гидрометеоиздат, 1981.
- Тихонов А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // ДАН СССР. 1963. Т. 151. № 3. С. 501–504.
- Шутяев В.П. Операторы управления и итерационные алгоритмы в задачах вариационного усвоения данных. М.: Наука, 2001.
- Шутяев В.П., Ле Диме Ф. Чувствительность функционалов задач вариационного усвоения данных // ДАН. Математика. 2019. Т. 486. № 4. С. 421–425.
- Agoshkov V.I., Gusev A.V., Diansky N.A., Oleinikov R.V. An algorithm for the solution of the ocean hydrothermodynamics problem with variational assimilation of the sea level function data // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2007. V. 22. № 2. P. 133–161.
- Asch, M.; Bocquet, M.; Nodet, M. Data Assimilation: Methods, Algorithms, and Applications; SIAM: Philadelphia, USA, 2016.
- Cacuci D.G. Sensitivity theory for nonlinear systems: II. Extensions to additional classes of responses // J. Math. Phys. 1981. V. 22. P. 2803–2812.
- Carrassi A., Bocquet M., Bertino L., Evensen G. Data assimilation in the geosciences: an overview of methods, issues, and perspectives // WIREs Clim. Change. 2018. V. 9. P. 1–80.
- Chen F., Shapiro G., Thain R. Sensitivity of Sea Surface Temperature Simulation by an Ocean Model to the Resolution of the Meteorological Forcing // Int. Sch. Res. Not. Oceanography. 2013. V. 2013. P. 215715.
- Cioaca A., Sandu A., de Sturler E. Efficient methods for computing observation impact in 4D-Var data assimilation // Comput. Geosci. 2013. V. 17. P. 975–990.
- Daescu D.N. On the sensitivity equations of four-dimensional variational (4D-Var) data assimilation // Mon. Weather Rev. 2008. V. 136. P. 3050–3065.
- Le Dimet F.X., Talagrand O. Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations: theoretical aspects // Tellus. 1986. V. 38A. P. 97–110.
- Le Dimet F.-X., Ngodock H. E., Luong B., Verron J. Sensitivity analysis in variational data assimilation // J. Meteorol. Soc. Japan. 1997. V. 75(1B). P. 245–255.
- Le Dimet F.-X., Navon I. M., Daescu D. N. Second-order information in data assimilation // Month. Wea. Rev. 2002. V. 130. № 3. P. 629–648.
- Le Dimet F.-X., Shutyaev V. On deterministic error analysis in variational data assimilation // Nonlinear Processes in Geophysics. 2005. V. 12. P. 481–490.
- Le Dimet F.-X., Shutyaev V., Parmuzin E. Sensitivity of functionals with respect to observations in variational data assimilation // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2016. V. 31. № 2. P. 81–91.
- Fletcher S.J. Data Assimilation for the Geosciences: From Theory to Application; Elsevier: Amsterdam, the Netherlands, 2017.
- Gejadze I., Le Dimet F.-X., Shutyaev V.P. On analysis error covariances in variational data assimilation // SIAM J. Sci. Comput. 2008. V. 30. № 4. P. 1847–1874.
- Gejadze I., Le Dimet F.-X., Shutyaev V.P. On optimal solution error covariances in variational data assimilation problems // J. Comp. Phys. 2010. V. 229. P. 2159–2178.
- Gejadze I., Shutyaev V.P., Le Dimet F.-X. Analysis error covariance versus posterior covariance in variational data assimilation // Q. J. R. Meteorol. Soc. 2013. V. 139. P. 1826–1841.
- Gualtieri G. Analysing the uncertainties of reanalysis data used for wind resource assessment: A critical review // Renew. Sustain. Energy Rev. 2022. V. 167. P. 112741.
- Hersbach H. et al. The ERA5 global reanalysis // Q. J. R. Meteorol. Soc. 2020. V. 146. P. 1999–2049.
- Lions J.L. Contrôle optimal des syst'emes gouvern'es par des 'equations aux d'eriv'ees partielles. Paris: Dunod, 1968.
- Marchuk G.I. Adjoint Equations and Analysis of Complex Systems. Dordrecht: Kluwer, 1995.
- Mogensen K., Balmaseda M.A., Weaver A.T., Martin M., Vidard A. NEMOVAR: a variational data assimilation system for the NEMO ocean model // ECMWF Technical Memorandum. 2009. № 120.
- Sasaki Y.K. An objective analysis based on the variational method // J. Meteor. Soc. Japan. 1958. V. 36. P. 77–88.
- Shapiro G.I., Salim M. How efficient is model-to-model data assimilation at mitigating atmospheric forcing errors in a regional ocean model? // J. Mar. Sci. Eng. 2023. V. 11. № 5. P. 935.
- Shutyaev V.P. Methods for observation data assimilation in problems of physics of atmosphere and ocean // Izv. Atmos. Ocean. Phys. 2019. V. 55. P. 17–31.
- Shutyaev V., Zalesny V., Agoshkov V., Parmuzin E., Zakharova N. 4D-Var data assimilation and sensitivity of ocean model state variables to observation errors // J. Mar. Sci. Eng. 2023. V. 11. P. 1253.
- Zalesny V.B., Agoshkov V.I., Shutyaev V.P., Le Dimet F., Ivchenko B.O. Numerical modeling of ocean hydrodynamics with variational assimilation of observational data // Izv. Atmos. Ocean. Phys. 2016. V. 52. P. 431–442.
- Zalesny V., Agoshkov V., Shutyaev V., Parmuzin E., Zakharova N. Numerical modeling of marine circulation with 4D variational data assimilation // J. Mar. Sci. Eng. 2020. V. 8. № 503. P. 1–19.
- Zalesny V.B., Diansky N.A., Fomin V.V., Moshonkin S.N., Demyshev S.G. Numerical model of the circulation of the Black Sea and the Sea of Azov // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2012. V. 27. № 1. P. 95–112.

Variational Data Assimilation for Ocean Thermodynamics Model and Sensitivity of Marine Characteristics to Observation Errors

V. P. Shutyaev^{1, *} and E. I. Parmuzin^{1, **}

¹*Marchuk Institute of Numerical mathematics Russian Academy of Sciences, Gubkin str., 8, Moscow, 119333 Russia*

**e-mail: victor.shutyaev@mail.ru*

***e-mail: e.parmuzin@inm.ras.ru*

The methodology of variational assimilation of observational data for the restoration of the initial state and heat fluxes for the mathematical model of sea thermodynamics is presented. An algorithm is developed for estimating the sensitivity of a model solution to errors in observational data. Calculation of the gradient of the response function of the model solution is based on the use of the Hessian of the cost functional. The results of numerical experiments for the Black Sea dynamics model developed at INM RAS are presented.

Keywords: variational data assimilation, optimal control, adjoint equation, covariance matrix, sensitivity, thermodynamics model