

УДК 551.511.32,551.513,517.938

РЕГУЛЯРНЫЕ И ХАОТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В ГЕОСТРОФИЧЕСКОМ ПОТОКЕ С ВЕРТИКАЛЬНЫМ СДВИГОМ

© 2023 г. М. В. Калашник^{a, b, c, *}, О. Г. Чхетиани^a

^aИнститут физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН, Пыжевский пер., 3, Москва, 109017 Россия

^bИнститут физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, ул. Большая Грузинская, 10, Москва, 123242 Россия

^cФГБУ “НПО “Тайфун”, ул. Победы, 4, Калужская обл., Обнинск, 249038 Россия

*e-mail: kalashnik-obn@mail.ru

Поступила в редакцию 14.05.2023 г.

После доработки 13.06.2023 г.

Принята к публикации 26.06.2023 г.

В рамках двухуровневой квазигеострофической модели исследована устойчивость течения с постоянным вертикальным сдвигом. Получены аналитические выражения для инкремента нарастания возмущений в линейной теории устойчивости. Для описания нелинейной динамики возмущений использован метод Галеркина с тремя базисными фурье гармониками. Для амплитуд фурье гармоник сформулирована нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений. Показано, что в отсутствие придонного трения все решения системы описывают периодический режим нелинейных колебаний или васцилляций. Ситуация принципиально меняется в модели с придонным трением. В этом случае для широкой области значений параметров решения системы демонстрируют сложное хаотическое поведение. Таким образом, возникает хаос или турбулентность для крупномасштабных движений.

Ключевые слова: бароклинная неустойчивость, вертикальный сдвиг скорости, придонное трение, хаотические колебания

DOI: 10.31857/S0002351523050061, **EDN:** VHNDHW

1. ВВЕДЕНИЕ

Решения маломодовых спектральных моделей гидродинамической неустойчивости могут демонстрировать сложное хаотическое поведение. Впервые это было показано Лоренцем [Lorenz, 1963] для конвекции Рэля между двумя твердыми границами. Полученное им решение трехмодовой модели конвекции демонстрировало сложное хаотическое поведение, получившее название — детерминированный хаос. Впоследствии детерминированный хаос изучался в серии работ Педлоски с соавторами [Pedlosky, 1971; Pedlosky and Frenzen, 1980, Klein and Pedlosky, 1986, 1992; Pedlosky, 1992, 2019; Oh et al., 1993] в рамках модели бароклинной неустойчивости течения между двумя вертикальными уровнями и придонным трением. Для описания неустойчивости Педлоски использовал метод амплитудных уравнений, справедливый при небольших отклонениях параметра (вертикального сдвига скорости) от своего критического значения. В настоящей работе неустойчивость бароклинного течения изучается в рамках метода Галеркина, не накладывающего

ограничение на значения параметров. Эффективность такого подхода продемонстрирована в наших недавних работах [Kalashnik et al., 2021, Калашник и др., 2022]. Установлено, что в отсутствие трения все решения нелинейной галеркианской модели с тремя модами стремятся к периодическому режиму —режиму нелинейных васцилляций. Подобные васцилляции впервые описаны в известных экспериментальных работах Хайда [Hide, 1953, 1958; Hide and Fowles, 1965; Hide and Mason, 1975]. При сильном трении устанавливается периодический режим, не зависящий от начальных условий. Наиболее интересные особенности происходят при слабом или умеренном трении. В этом случае все решения трехмодовой галеркианской системы демонстрируют сложное хаотическое поведение.

2. ДВУХУРОВЕННАЯ КВАЗИГЕОСТРОФИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

Для изучения неустойчивости используем дискретный вариант поверхностной геострофической модели (Surface quasigeostrophic (SQG)

model), описывающей движения слоя стратифицированной вращающейся жидкости толщины H с нулевой потенциальной завихренностью. В безразмерных переменных уравнения SQG модели включают уравнение Лапласа для функции тока, к которому присоединяются уравнения переноса плавучести на границах. Дискретная аппроксимация оператора Лапласа, включающая разбиение вертикального отрезка интегрирования на четыре отрезка толщины $h = 1/4$ и привлечение уравнений переноса плавучести на границах, приводят к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} q_{1t} + [\psi_1, q_1] &= 0, \quad q_{2t} + [\psi_2, q_2] = 0, \\ q_{1,2} &= \Delta \psi_{1,2} \pm (\lambda^2/2)(\psi_2 - \psi_1). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ψ_1, ψ_2 – значения функции тока на верхней и нижней границах слоя, Δ – двумерный оператор Лапласа, параметр $\lambda^2 = 1/2h^2 = 8$. Оси x, y традиционно направлены на запад и север. В качестве горизонтального масштаба в безразмерных уравнениях модели принят бароклинический радиус деформации Россби $D = NH/f$, где N – частота Брента, f – параметр Кориолиса. Масштаб времени, функции тока и скорости соответственно $T_* = D/U_*$, $\Psi_* = U_*D$ и $U_* = \Theta_*/N$, где Θ_* – характерное значение перепада плавучести на границах. Безразмерные горизонтальные компоненты скорости u, v связаны с функцией тока ψ соотношениями $u = -\psi_y, v = \psi_x$. Плавучесть ϑ находится из дискретной аппроксимации соотношения $\vartheta = \psi_z$.

Уравнения (1) совпадают с уравнениями классической двухуровневой модели Филлипса [Pedlosky, 1987; Phillips, 1954], однако отличаются от нее физической интерпретацией переменных. Распределения PV $q_1, -q_2$, на нижнем и верхнем уровнях в модели Филлипса, теперь имеют смысл удвоенных распределений плавучести на верхней и нижней границах слоя атмосферы. Подробный вывод уравнений (1) представлен в работах [Kalashnik et al., 2021, Калашник и др., 2022].

Отметим, что для характерных значений параметров тропосферы средних широт $H = 10$ км $N = 10^{-2} \text{ с}^{-1}$, $f = 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, радиус деформации $D = NH/f = 1000$ км. Характерному значению скорости $U_* = 10 \text{ м с}^{-1}$ отвечает перепад плавучести $\Theta_* = 10^{-1} \text{ м с}^{-2}$ (перепад потенциальной температуры порядка 3 К) и временной масштаб $T_* = D/U_* = 27.8$ ч (порядка суток).

Из уравнений (1) следует закон сохранения полной энергии

$$E_t = 0, \quad E = (1/2) \times \iint \left((\nabla \psi_1)^2 + (\nabla \psi_2)^2 + 4(\psi_2 - \psi_1)^2 \right) dx, \quad \mathbf{x} = (x, y). \quad (2)$$

Сохраняются также квадратичные интегралы

$$(V_{1,2})_t = 0, \quad V_{1,2} = \iint q_{1,2}^2 dx, \quad (3)$$

отражающие законы сохранения энтропии в непрерывной модели.

Введением баротропного $\sigma = (1/2)(\psi_1 + \psi_2)$ и бароклинического компонентом $\theta = (1/2)(\psi_2 - \psi_1)$ функции тока, система (1) сводится к системе

$$\begin{aligned} (\Delta \theta - \lambda^2 \theta)_t + [\sigma, \Delta \theta - \lambda^2 \theta] + [\theta, \Delta \sigma] &= 0, \\ (\Delta \sigma)_t + [\sigma, \Delta \sigma] + [\theta, \Delta \theta] &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

удобной для анализа задач устойчивости. Стационарные зональные течения описываются точным решением (4) $\theta = \Theta(y), \sigma = \Sigma(y)$. Это решение описывает течение со скоростью в двух слоях $U_{1,2} = \bar{U}(y) \mp \tilde{U}(y)$, где $\bar{U}(y) = -\Sigma_y$ и $\tilde{U}(y) = -\Theta_y$ есть баротропный и бароклинический компоненты скорости течения.

Полагая в (4) $\theta = \Theta(y) + \theta', \sigma = \Sigma(y) + \sigma'$, для малых возмущений (штрихи у возмущений опускаем) получим систему

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial}{\partial x} \right) (\Delta \theta - \lambda^2 \theta) + \tilde{U} \frac{\partial}{\partial x} (\Delta \sigma + \lambda^2 \sigma) - \\ - \tilde{U}''(y) \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \bar{U}''(y) \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial}{\partial x} \right) (\Delta \sigma) + \\ + \tilde{U} \frac{\partial}{\partial x} (\Delta \theta) - \tilde{U}''(y) \frac{\partial \theta}{\partial x} - \bar{U}''(y) \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

В рамках (5) легко исследуется линейная задача об устойчивости течения с постоянным вертикальным сдвигом скорости, которому отвечают постоянные значения \bar{U}, \tilde{U} . Для этого течения система (5) принимает вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial}{\partial x} \right) (\Delta \theta - \lambda^2 \theta) + \tilde{U} \frac{\partial}{\partial x} (\Delta \sigma + \lambda^2 \sigma) = 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial}{\partial x} \right) (\Delta \sigma) + \tilde{U} \frac{\partial}{\partial x} (\Delta \theta) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Отыскивая экспоненциально нарастающие решения системы (6) вида $\theta = \theta_0 e^{\gamma t} e^{i(kx+ly)}$, $\sigma = \sigma_0 e^{\gamma t} e^{i(kx+ly)}$ для инкремента нарастания γ получим уравнение

$$(\gamma + ik\bar{U})^2 (k^2 + \lambda^2) = \tilde{U}^2 k^2 (\lambda^2 - k^2),$$

где $k^2 = k^2 + l^2$. Отсюда

$$\gamma = -i\bar{U}k \pm \tilde{U}k \sqrt{\frac{\lambda^2 - \kappa^2}{\lambda^2 + \kappa^2}}. \quad (7)$$

Согласно (7), неустойчивость имеет место только для бароклинного течения с $\tilde{U} \neq 0$ для значений $\kappa < \lambda$ (длинные волны). Используя (7) легко показать, что максимальную скорость роста $s = \text{Re } \gamma$ имеют двумерные возмущения с $l = 0$ и волновым числом $k = k_m = \lambda \sqrt{\sqrt{2} - 1} = 0.644\lambda$, где, напомним, $\lambda^2 = 1/2h^2 = 8$. Для указанных значений параметров размерная длина волны наиболее опасного возмущения $(2\pi/k_m)D = 3.448D = 3448$ км (четверть длины – масштаб циклона). При $\tilde{U}_0 = 1$ время нарастания возмущения в e раз $T_m = (1/s_m)T_*$ составляет (в размерных переменных) величину порядка суток.

3. НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ВОЗМУЩЕНИЙ В ОТСУТСТВИЕ ТРЕНИЯ. РЕЖИМ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВАСЦИЛЛЯЦИЙ

В данном разделе мы исследуем нелинейную динамику возмущений течения в отсутствие диссипации. Будем рассматривать случай бароклинного течения с $\bar{U} = 0$. Для этого течения нелинейная динамика возмущений описывается системой

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\Delta\theta - \lambda^2\theta) + \tilde{U} \frac{\partial}{\partial x}(\Delta\sigma + \lambda^2\sigma) + J_\theta &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\Delta\sigma) + \tilde{U} \frac{\partial}{\partial x}(\Delta\theta) + J_\sigma &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь:

$$\begin{aligned} J_\sigma &= [\sigma, \Delta\sigma] + [\theta, \Delta\theta], \quad J_\theta = [\sigma, \Delta\theta - \lambda^2\theta] + [\theta, \Delta\sigma] \\ \text{или } J_\theta &= [\sigma, \Delta\theta] + [\theta, \Delta\theta] - \lambda^2[\sigma, \theta]. \end{aligned}$$

Приближенное решение системы (8) ищем методом Галеркина в форме

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_1 + \theta_2, \quad \theta_1 = a(t) \sin ly \cos kx, \quad \theta_2 = b(t) \sin 2ly, \\ \sigma &= \sigma_1, \quad \sigma_1 = c(t) \sin ly \sin kx. \end{aligned} \quad (9)$$

Данная форма есть суперпозиция решения линейной теории устойчивости с не зависящей от зональной координаты нейтральной модой. Подстановка (9) в (8) и использование условий ортогональности базисным функциям $\sin ly$, $\sin 2ly$ (метод Галеркина) дает нелинейную систему из трех уравнений

$$\kappa^2 \frac{dc}{dt} - \tilde{U}k\kappa^2 a(t) - \gamma a(t)b(t) = 0,$$

$$(\kappa^2 + \lambda^2) \frac{da}{dt} - \tilde{U}(\lambda^2 - \kappa^2)kc(t) - \alpha c(t)b(t) = 0, \quad (10)$$

$$2(4l^2 + \lambda^2) \frac{db}{dt} - \beta c(t)a(t) = 0.$$

Здесь:

$$\begin{aligned} \gamma &= lk(\kappa^2 - 4l^2), \quad \alpha = -lk(\kappa^2 - 4l^2 - \lambda^2), \\ \beta &= -\lambda^2 lk, \quad \kappa^2 = k^2 + l^2. \end{aligned}$$

Полезно сразу отметить, что линейная форма системы (10) сводится к двум уравнениям

$$\begin{aligned} (\lambda^2 + \kappa^2) \frac{da}{dt} - \tilde{U}k(\lambda^2 - \kappa^2)c &= 0, \\ \frac{dc}{dt} - \tilde{U}ka &= 0, \quad \kappa^2 = k^2 + l^2. \end{aligned} \quad (11)$$

или к одному уравнению

$$\frac{d^2 a}{dt^2} - \gamma^2 a = 0, \quad \gamma^2 = \frac{\tilde{U}^2 k^2 (\lambda^2 - \kappa^2)}{\lambda^2 + \kappa^2}. \quad (12)$$

Согласно (12), все возмущения с $\kappa^2 < \lambda^2$ экспоненциально нарастают. Это согласуется с тем, что дает ранее полученное выражение (7).

Вернемся к нелинейной системе (10). Важное свойство системы состоит в том что

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= lk(\kappa^2 - 4l^2) - \\ &- lk(\kappa^2 - 4l^2 - \lambda^2) - \lambda^2 lk = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Из этого свойства коэффициентов следует выполнение закона сохранения для положительно определенной величины

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \kappa^2 c^2 + \frac{1}{2} (\kappa^2 + \lambda^2) a^2 + (4l^2 + \lambda^2) \tilde{b}^2 \right) = 0, \quad (14)$$

где $\tilde{b} = b + (U/l)$. Согласно этому закону, все решения нелинейной системы (10) ограничены во времени. Пример численного решения системы (10) представлен на рис. 1.

Как видно, линейная стадия экспоненциального роста сменяется стадией устойчивых нелинейных колебаний. Подобные колебания были впервые обнаружены Хайдом в его лабораторных экспериментах [Hide, 1953, 1958; Hide and Fowles 1965; Hide and Mason, 1975]. В рамках непрерывных и других дискретных моделей подобные колебания изучались в наших предшествующих статьях [Kalashnik et al., 2021, Калашник и др., 2022].

Аналитическое описание нелинейных колебаний можно получить для длинноволновых возму-

шений, когда $k, l \rightarrow 0$. В этом случае уравнения системы (10) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \frac{dc}{dt} - \tilde{U}ka(t) = 0, \quad \frac{da}{dt} - \tilde{U}kc(t) - lk c(t)b(t) = 0, \\ 2\frac{db}{dt} + lk c(t)a(t) = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь учтено, что для длинных волн $\alpha = -\beta = \lambda^2 lk$, $\gamma = 0$ и использовано длинноволновое приближение $\kappa^2, l^2 \ll \lambda^2$. Как и ранее $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Будем рассматривать эту систему с начальными условиями $a(0) = 0, b(0) = 0, c(0) = c_0$.

Из первого уравнения системы (15) следует $a(t) = \frac{1}{\tilde{U}k} \frac{dc}{dt}$. При этом третье уравнение (15) сводится к уравнению $2\frac{db}{dt} + lk \frac{1}{2\tilde{U}k} \frac{dc^2}{dt} = 0$, откуда следует закон сохранения $2b + (l/2\tilde{U})c^2 = K = \text{const}$. Для рассматриваемых начальных условий в приближении длинных волн $K = 0$ и $b = -(l/4\tilde{U})c^2$. Второе уравнение (15) при этом сводится к уравнению второго порядка с кубической нелинейностью

$$\frac{d^2c}{dt^2} - \tilde{U}^2 k^2 c(t) + (1/4)l^2 k^2 c^3(t) = 0. \quad (16)$$

Для построения решений уравнения (16) удобно преобразовать его к стандартной форме делая замену $c = AZ, t = B\tau$, где $B = 1/\tilde{U}k, A = 2\tilde{U}/l$. При этом получим классическое уравнение нелинейного осциллятора с потенциалом $V(Z)$

$$\frac{d^2Z}{d\tau^2} - Z(t) + Z^3(t) = 0, \quad (17)$$

или $d^2Z/d\tau^2 + \partial V/\partial Z = 0, Z = c/A$. Теория уравнения вида (17) подробно изложена в [Кузнецов и др., 2002]. Потенциал уравнения $V(Z) = -\frac{1}{2}Z^2 + \frac{1}{4}Z^4$ имеет две точки экстремума $Z = \pm 1$, и одну седловую точку $Z = 0$. Уравнение интегрируется с учетом закона сохранения энергии

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dZ}{dt} \right)^2 + V(Z) = E = \text{const}. \quad (18)$$

Для длинноволновых возмущений с большой точностью выполняется равенство $E(0) = -Z^2(0)/2$. При этом $-1/4 < E < 0$ и колебания происходят в окрестности одной потенциальной ямы. Ограничимся для определенности правой ямой. При этом $Z_1 < Z < Z_0$, где $Z_{0,1}$ – корни уравнения $V(Z) = E(0)$ и $1 < Z_0 < \sqrt{2}$. Обозначая

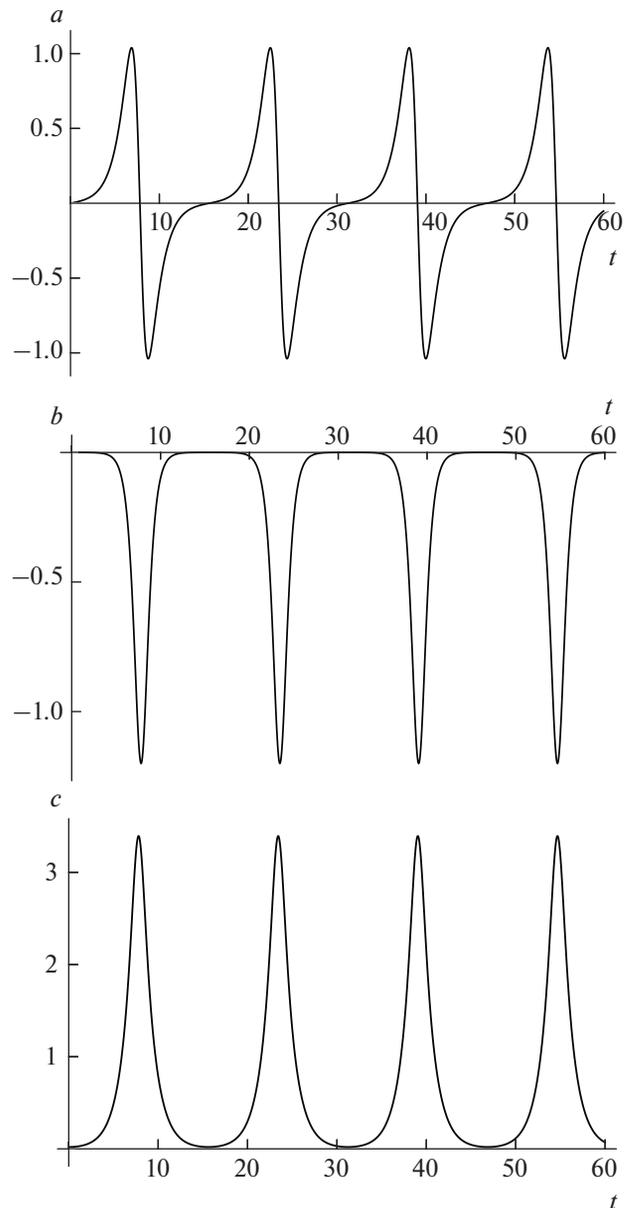


Рис. 1. Численное решение нелинейной системы (10) для значений параметров $k = l = \tilde{U} = 1$. Начальные условия $a(0) = 0, b(0) = 0, c(0) = 0.02$.

$\epsilon = Z(0) = c_0(l/2U)$, для длинных волн с большой точностью получим

$$Z_0^2 = (1 + \sqrt{1 - 2\epsilon^2}) = 2 - \epsilon^2, \quad Z_1^2 = 2 - Z_0^2 = \epsilon^2.$$

При $\epsilon \ll 1$ асимптотическое решение уравнения (17) имеет вид

$$Z(t) = \sqrt{Z_1^2 + (Z_0^2 - Z_1^2) \text{cn}^2 \left(Z_0 \frac{t}{\sqrt{2}}, m \right)}, \quad (19)$$

где $m^2 = (Z_0^2 - Z_1^2)/Z_0^2 = 2(Z_0^2 - 1)/Z_0^2$, и $\text{cn}(t, m)$ – эллиптический косинус или косинус амплитуды.

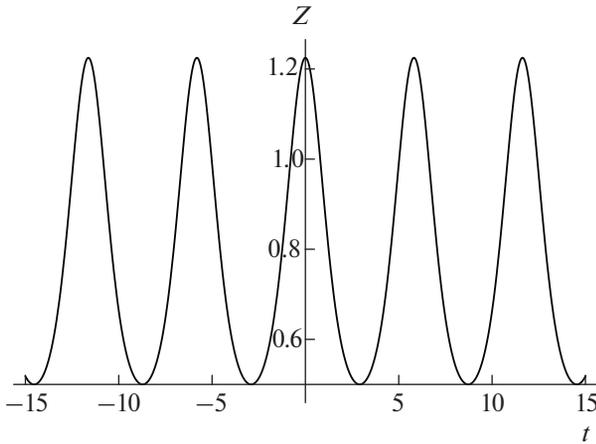


Рис. 2. Периодические колебания Z в длинноволновом приближении.

Параметр m принимает значения $0 < m < 1$. Случай, когда m близко к нулю отвечает линейным колебаниям, с ростом m период неограниченно растет. Представленный на рис. 2 график функции $Z(t)$ описывает нелинейные колебания для значения $\varepsilon = 0.5$. Период колебаний дается формулой

$$T = \frac{2\sqrt{2}}{Z_0} K(m),$$

где $K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \psi}}$ — хорошо затабулированный полный эллиптический интеграл первого рода. С ростом m период колебаний неограниченно растет.

Таким образом, оказывается, что в отсутствие трения экспоненциальный рост линейных возмущений сменяется стадией нелинейных колебаний. Для периода колебаний длинноволновых возмущений получено аналитическое представление.

4. ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА ВОЗМУЩЕНИЙ В ПРИСУТСТВИИ ЭКМАНОВСКОГО ТРЕНИЯ

Исследуем теперь динамику возмущений в модели с учетом экмановского трения. Учет трения для возмущений осуществляется добавлением в уравнения двухслойной модели (10) линейных диссипативных слагаемых

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\Delta\theta - \lambda^2\theta) + \tilde{U} \frac{\partial}{\partial x}(\Delta\sigma + \lambda^2\sigma) + J_\theta &= -r\Delta\theta, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\Delta\sigma) + \tilde{U} \frac{\partial}{\partial x}(\Delta\theta) + J_\sigma &= -r\Delta\sigma, \end{aligned} \quad (20)$$

$$J_\theta = [\sigma, \Delta\theta - \lambda^2\theta] + [\theta, \Delta\sigma], \quad J_\sigma = [\sigma, \Delta\sigma] + [\theta, \Delta\theta].$$

Здесь r — коэффициент придонного трения, определенный выражением $r = \left(\frac{\nu f}{2U}\right)^{1/2} \frac{L}{H}$, где ν — коэффициент вертикальной турбулентной вязкости. Подробный вывод уравнений в модели с трением представлен в монографии [Pedlosky, 1987].

Отыскивая приближенные решения (20) в форме (9) и используя метод Галеркина получим систему

$$\begin{aligned} \kappa^2 \frac{dc}{dt} - \tilde{U}\kappa^2 a - \gamma ab &= -r\kappa^2 c, \\ (\kappa^2 + \lambda^2) \frac{da}{dt} - \tilde{U}k(\lambda^2 - \kappa^2)c - \alpha cb &= -r\kappa^2 a, \quad (21) \\ 2(4l^2 + \lambda^2) \frac{db}{dt} - \beta ca &= -4rl^2 b, \end{aligned}$$

представляющую собой диссипативный вариант системы (10). Эту систему можно записать в удобной для анализа симметричной форме, вводя новую переменную $\tilde{b} = b + \tilde{U}/l$. Симметричная форма системы (21) примет тогда вид:

$$\begin{aligned} m \frac{dc}{dt} - da - \gamma a \tilde{b} &= -r\kappa^2 c, \\ n \frac{da}{dt} + dc - \alpha c \tilde{b} &= -r\kappa^2 a, \quad (22) \\ p \frac{d\tilde{b}}{dt} - \beta ca &= -4rl^2 \tilde{b} + 4rl\tilde{U}, \end{aligned}$$

где $m = \kappa^2$, $n = \kappa^2 + \lambda^2$, $p = 2(4l^2 + \lambda^2)$ и $d = 4l^2\tilde{U}k$.

Исследуем вначале устойчивость по линейному приближению. Линеаризованная форма системы (21) сводится к двум уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{dc}{dt} + rc(t) - \tilde{U}ka(t) &= 0, \\ (\kappa^2 + \lambda^2) \frac{da}{dt} + r\kappa^2 a(t) - \tilde{U}(\lambda^2 - \kappa^2)kc(t) &= 0, \end{aligned}$$

или к одному уравнению

$$c_{tt} + pc_t + qc = 0, \quad (23)$$

где

$$p = r \frac{2\kappa^2 + \lambda^2}{\kappa^2 + \lambda^2}, \quad q = \frac{r^2\kappa^2 - \tilde{U}^2k^2(\lambda^2 - \kappa^2)}{\lambda^2 + \kappa^2}.$$

Полагая здесь $c \sim e^{\gamma t}$, для инкремента нарастания γ получим квадратное уравнение $\gamma^2 + p\gamma + q = 0$. Неустойчивость существует если для корней уравнения выполнено условие $\gamma_1\gamma_2 = q < 0$. Это приводит к условию неустойчивости, полученному Педлоски

$$\tilde{U}^2 > r^2 \frac{\kappa^2}{k^2(\lambda^2 - \kappa^2)}. \quad (24)$$

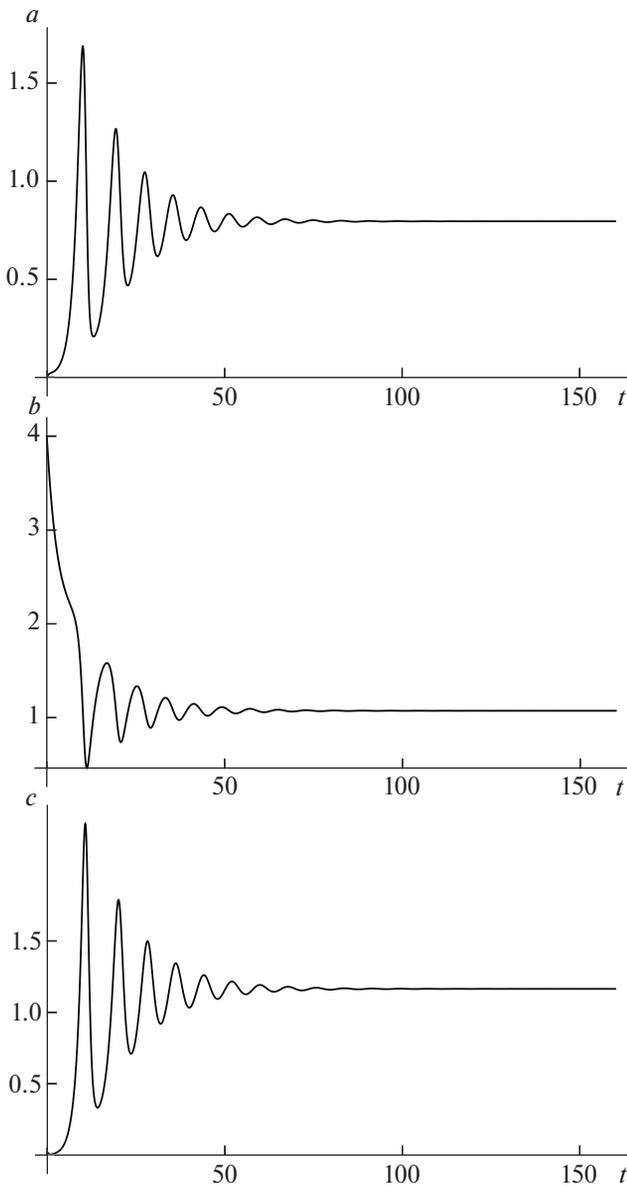


Рис. 3. Установление стационарного решения для системы (21).

Согласно этому условию, для неустойчивости с трением скорость течения должна превосходить некоторое критическое значение. При фиксированном l минимум правой части (24) достигается при $\kappa^2 = \lambda l$, при этом $U_{\min}^2 = r^2 \frac{1}{(\lambda - l)^2}$. Таким образом, неустойчивость в модели с трением существует если $\tilde{U} > U_{\min}$ и $\kappa^2 < \lambda^2$.

Вернемся теперь к нелинейной задаче. Рассмотрим вначале вопрос о неподвижных точках (положениях равновесия). Они находятся из стационарного варианта системы (22). При этом из первого

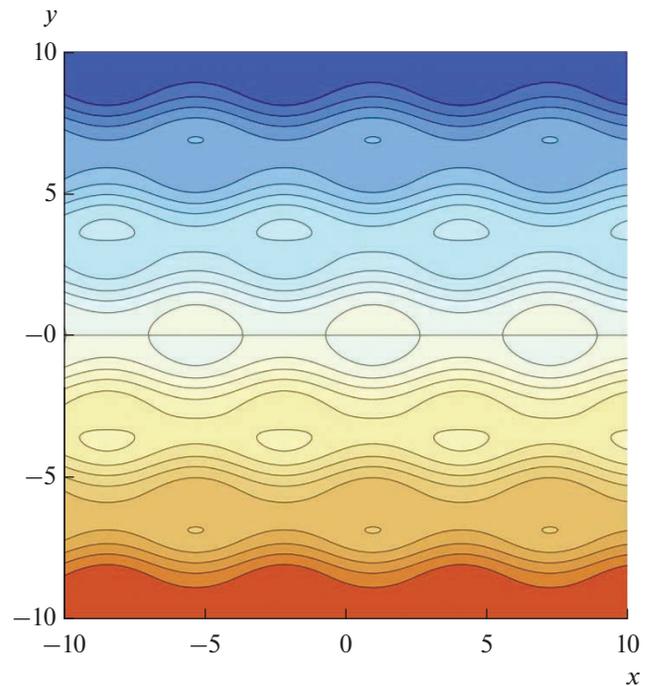


Рис. 4. Изолинии функции тока вторичного стационарного течения. Взято значение времени $t = 140$, при котором течение выходит на стационарный режим.

уравнения системы (22) следует $c = \frac{1}{r\kappa^2} a(\gamma\tilde{b} + d)$. Подставляя это значение в стационарный вариант второго уравнение (22), приходим к квадратному уравнению для \tilde{b} : $r^2\kappa^4 = \alpha\gamma\tilde{b}^2 + d(\alpha - \gamma)\tilde{b} - d^2$ или

$$\alpha\gamma\tilde{b}^2 + d(\alpha - \gamma)\tilde{b} - d^2 = r^2\kappa^4.$$

Отсюда:

$$\tilde{b} = \frac{-d(\alpha - \gamma) \pm \sqrt{d^2(\alpha - \gamma)^2 + 4\alpha\gamma(d^2 + r^2\kappa^4)}}{2\alpha\gamma}.$$

Таким образом, существуют два равновесных значения \tilde{b} . Привлекая третье уравнение системы (22) найдем $4rl^2\tilde{b} - 4rlU = \frac{\beta}{r\kappa^2} a^2(\gamma\tilde{b} + d)$. Отсюда:

$$a^2 = \frac{r\kappa^2(4rl^2\tilde{b} - 4rlU)}{\beta(\gamma\tilde{b} + d)}.$$

Каждому равновесному значению \tilde{b} отвечают два значения a . Можно показать что аналогичная ситуация происходит и для переменной c . Каждому значению \tilde{b} , таким образом, отвечают стационарные решения $(b_1, \pm a, \pm c)$ и $(b_2, \pm a, \pm c)$.

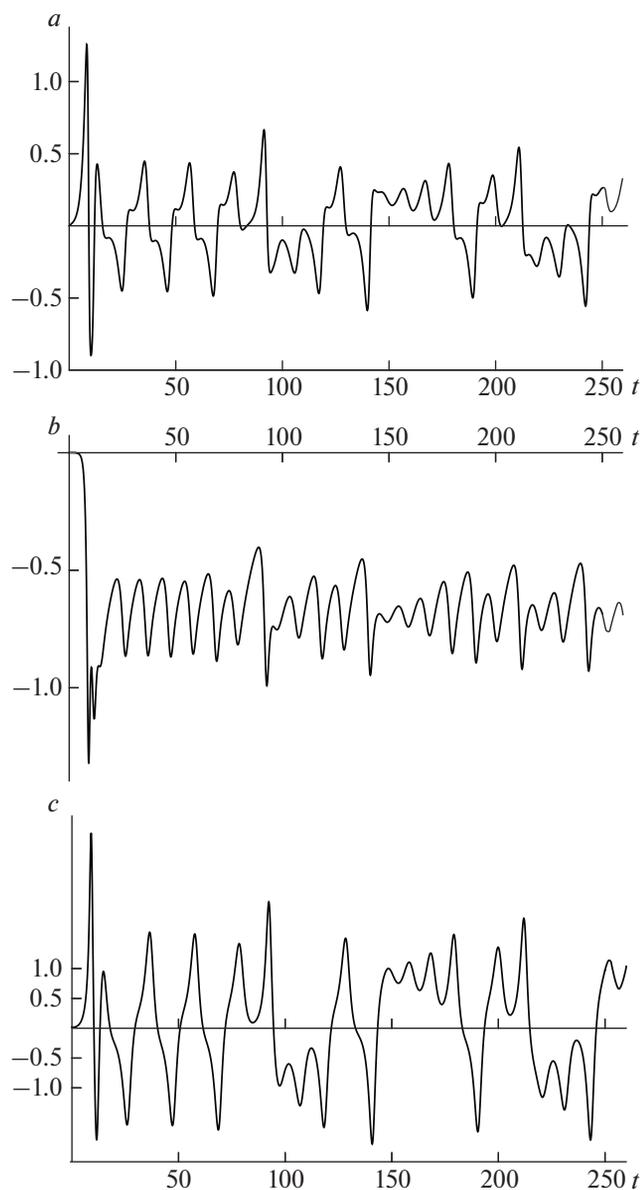


Рис. 5. Хаотические колебания в системе (22) при $k = l = 1$, $\tilde{U} = 1$, $r = 0.5$. Начальные условия: $a(0) = 0$, $b(0) = 0$, $c(0) = 0.02$.

Теперь посмотрим, что дает прямой численный счет системы (21). При очень малых значениях коэффициента трения r имеют место затухающие колебания, близкие к решениям задачи без трения. При достаточно больших значениях происходит выход на стационарные решения. Это проиллюстрировано на рис. 3 для значений параметров $\tilde{U} = k = l = 1$ и $r = 2$. Видно, что в этом случае (большие значения r) происходит выход на одно из стационарных решений. Функция тока для стационарного течения на верхнем уровне дается выражением

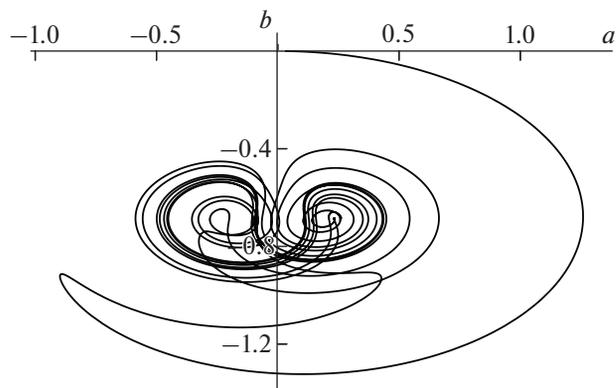


Рис. 6. Фазовые траектории двухуровневой модели в плоскости $((a(t), b(t)))$. Это же поведение иллюстрирует рис. 7, где представлено численное решение системы (21) для других значений параметров: $k = l = 1$, $\tilde{U} = 4$ и $r = 2$. Начальные условия $a(0) = 0$, $b(0) = 0$, $c(0) = 0.02$.

$$\Psi_2 = -\tilde{U}y + a(t) \sin ly \cos kx + b(t) \sin 2ly + c(t) \sin ly \sin kx.$$

Изолинии этой функции представлены на рис. 4 для значений параметров $\tilde{U} = k = l = 1$, $r = 2$. Как видно в неустойчивом зональном течении формируется система вихревых дорожек.

Самые интересные особенности связаны со случаем умеренных значений r . В этом случае возникают хаотические колебания или режим странного аттрактора. Пример хаотического колебания для значений параметров $\tilde{U} = k = l = 1$ и $r = 0.5$ и начальных условий $a(0) = b(0) = 0$, $c(0) = 0.02$ приведен на рис. 5.

Чисто визуально в поведении переменных наблюдается хаос. Такое поведение является устойчивым, что подтверждается расчетами на более длинных временных промежутках и других значениях параметров. Фазовые траектории на плоскости $(a(t), b(t))$ приведены на рис. 6, где мы видим два лепестка притягивающих циклов между которыми происходит случайный переброс системы.

Это же поведение иллюстрирует рис. 7, где представлено численное решение системы (21) для других значений параметров: $k = l = 1$, $\tilde{U} = 4$ и $r = 2$. Начальные условия $a(0) = 0$, $b(0) = 0$, $c(0) = 0.02$.

Два “лепестка” фазовых траекторий системы при этих значениях параметров на плоскости $(a(t), c(t))$ приведены на рис. 8.

Хаотичность колебаний проявляется и на амплитудном спектре переменной $a(t)$, представленной в зависимости от периода в билогарифмическом представлении на рис. 9 для случаев,

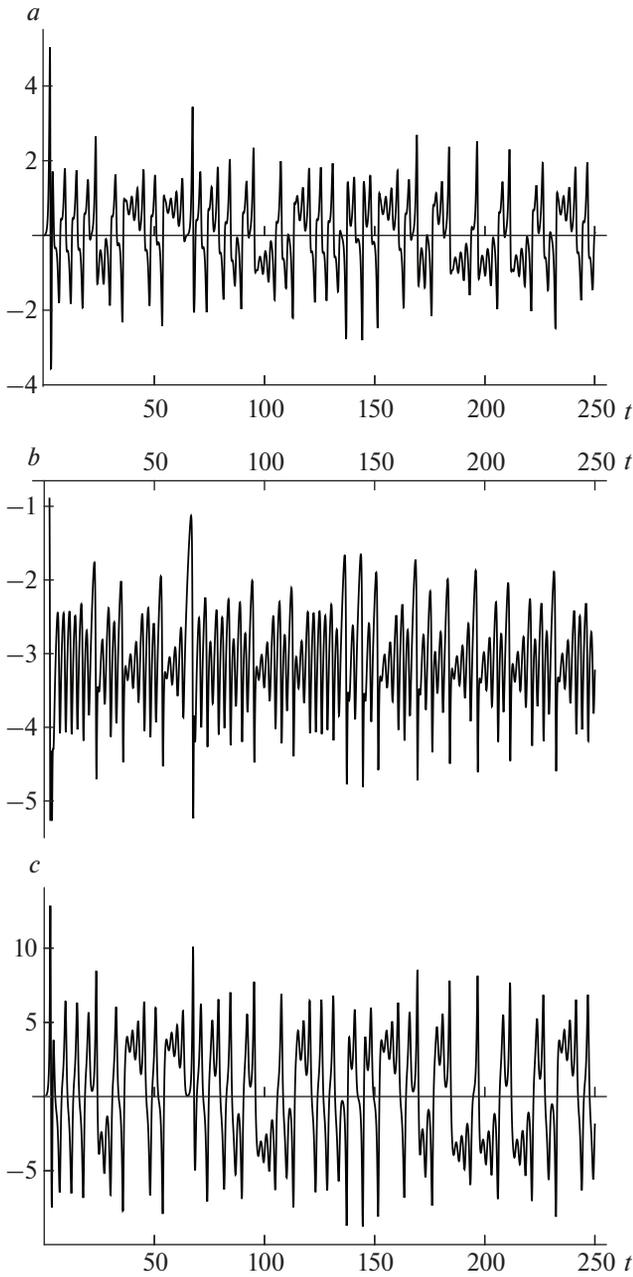


Рис. 7. Хаотические колебания в системе (22) при $k=l=1$, $\bar{U}=4$, $r=2$. Начальные условия: $a(0)=0$, $b(0)=0$, $c(0)=0.02$.

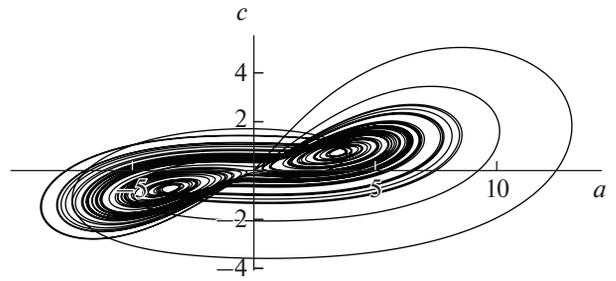


Рис. 8. Фазовые траектории двухуровневой модели в плоскости $(a(t), c(t))$.

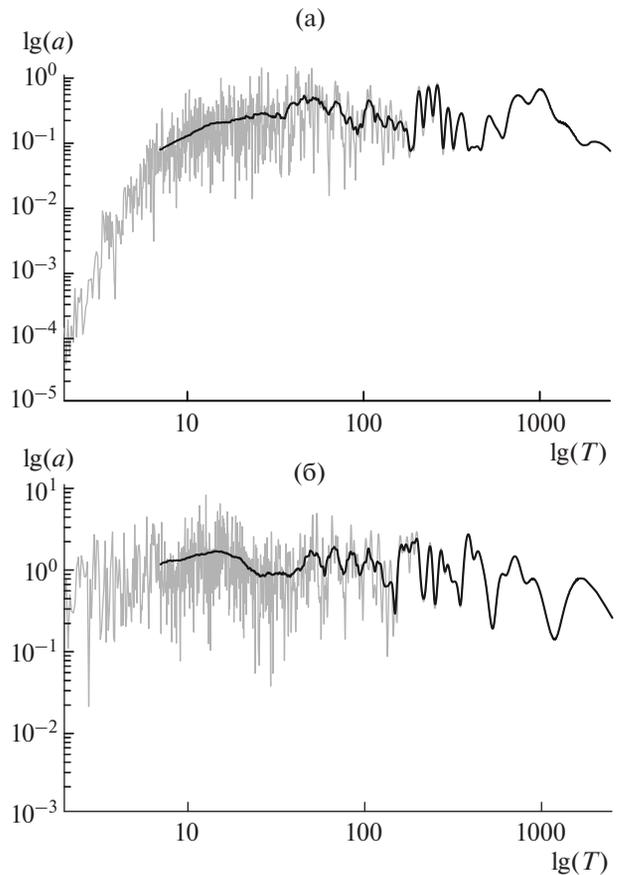


Рис. 9. Амплитудные спектры нелинейных колебаний для зависимостей $a(t)$. а) – при $k=l=1$, $\bar{U}=1$, $r=0.5$; б) – при $k=l=1$, $\bar{U}=4$, $r=2$. Начальные условия: $a(0)=0$, $b(0)=0$, $c(0)=0.02$.

продемонстрированных на рис. 5–6, 7–8 – рис. 9а и 9б соответственно. Спектры рассчитывались по временной реализации за время $t = 5000$ с единичным шагом. Черная линия – скользящее среднее с окном в 10 единиц безразмерного времени.

Как видно, за исключением низкочастотных колебаний, спектр практически сплошной, т.е. не содержит ярко выраженных максимумов. Таким образом, в модели с придонным трением возникает хаос или турбулентность.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В течении долгого времени считалось, что для описания турбулентности или хаоса необходимы гидродинамические модели с большим числом пространственных мод. Ситуация принципиально изменилась после появления работы Лоренца и многочисленных последующих работ Педлоски, обнаруживших хаотическое поведение в решении гидродинамических моделей с тремя модами. Настоящая работа подтверждает этот результат в

рамках решений уравнений поверхностной геострофической модели, описывающих неустойчивость геострофического течения с вертикальным сдвигом скорости. Решение трехмодовой модели неустойчивости с придонным трением демонстрирует сложное хаотическое поведение. Для возникновения такого поведения необходимы два фактора — неустойчивость и диссипативное трение. В отсутствие трения решения дискретной модели описывают периодический режим нелинейных вассилляций.

Авторы признательны М.В. Курганскому и К.Н. Вишератину за полезные консультации и обсуждение результатов.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-17-00273 “Вихревая и волновая динамика изменяющейся земной атмосферы”).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Калашник М.В., Курганский М.В., Чхетиани О.Г. Бароклинная неустойчивость в геофизической гидродинамике // Успехи физических наук. 2022. Т. 192. № 10. С. 1110–1144.
- Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2002. 292 с.
- Hide R. Some experiments on thermal convection in a rotating liquid. *Quart. J. Royal Met. Soc.* 1953. V. 79(339). P. 161–161.
- Hide R. An experimental study of thermal convection in a rotating liquid. *Phil. Trans. Royal Soc. A.* 1958. V. 250(983). P. 441–478.
- Hide R., Fowles W.W. Thermal convection in a rotating annulus of liquid: effect of viscosity on the transition between axisymmetric and non-axisymmetric flow regimes. *J. Atmos. Sci.* 1965. V. 22(5). P. 541–558.
- Hide R., Mason P.J. Sloping convection in a rotating fluid // *Advances in Physics.* 1975. V. 24(1). P. 47–100.
- Kalashnik M.V., Chkhetiani O.G., Kurgansky M.V. Discrete SQG models with two boundaries and baroclinic instability of jet flows // *Phys. Fluids.* 2021. V. 33. P. 076608.
- Klein P., Pedlosky J. A numerical study of baroclinic instability at large supercriticality // *J. Atmos. Sci.* 1986. V. 43. № 12. P. 1243–1262.
- Klein P., Pedlosky J. The role of dissipation mechanisms in the nonlinear dynamics of unstable baroclinic waves // *J. Atmos. Sci.* 1992. V. 49. № 1. P. 29–48.
- Lorenz E.N. Deterministic nonperiodic flow // *J. Atmos. Sci.* 1963. V. 20(3). P. 130–141.
- Oh S.P., Pedlosky J., Samelson R. Linear and finite-amplitude localized baroclinic instability // *J. Atmos. Sci.* 1993. V. 50. № 16. P. 2772–2784.
- Pedlosky J. Finite-amplitude baroclinic waves with small dissipation // *J. Atmos. Sci.* 1971. V. 28. № 4. P. 587–597.
- Pedlosky J., Frenzen C. Chaotic and periodic behavior of finite-amplitude baroclinic waves // *J. Atmos. Sci.* 1980. V. 37. № 6. P. 1177–1196.
- Pedlosky J. *Geophysical Fluid Dynamics.* Berlin/New York: Springer-Verlag, 1987. 710 p.
- Pedlosky J. Baroclinic instability localized by dissipation // *J. Atmos. Sci.* 1992. V. 49. № 13. P. 1161–1170.
- Pedlosky J. The effect of beta on the downstream development of unstable, chaotic baroclinic waves // *J. Phys. Oceanogr.* 2019. V. 49. № 9. P. 2337–2343.
- Phillips N.A. Energy transformation and meridional circulations associated with simple baroclinic waves in a two-level, quasi-geostrophic model // *Tellus.* 1954. V. 6. P. 273–283.

Regular and Chaotic Oscillations in a Geostrophic Flow with Vertical Shear

M. V. Kalashnik^{1, 2, 3, *} and O. G. Chkhetiani¹

¹*Obukhov Institute of Atmospheric Physics, Russian Academy of Sciences, Pyzhevsky per., 3, Moscow, 109017 Russia*

²*Schmidt Institute of Physics of the Earth, ul. Bol'shaya Gruzinskaya, 10, Moscow, 123242 Russia*

³*Research and Production Association Typhoon, ul. Pobedy, 4, Kaluzhskaya obl., Obninsk, 249038 Russia*

*e-mail: kalashnik-obn@mail.ru

In the framework of a two-level quasi-geostrophic model, the stability of flow with a constant vertical shear is investigated. Analytical expressions for the increment of perturbation growth in linear stability theory were obtained. The Galerkin method with three basic Fourier harmonics was used to describe the nonlinear dynamics of perturbations. A nonlinear system of ordinary differential equations is formulated for amplitudes of Fourier harmonics. It is shown that in the absence of bottom friction all solutions of the system describe periodic mode of nonlinear oscillations or vascillations. The situation changes fundamentally in the model with bottom friction. In this case, for a wide range of parameter values, the system solutions exhibit complex chaotic behavior. Thus, chaos or turbulence emerges for large-scale motions.

Keywords: baroclinic instability, vertical shear, bottom friction, chaotic oscillations