

УДК 551.51

## АНАЛИТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КОНВЕКЦИИ С ЗАДЕРЖИВАЮЩИМИ СЛОЯМИ В АТМОСФЕРЕ

© 2023 г. Л. Х. Ингель<sup>a, b, \*</sup>

<sup>a</sup>ФГБУ “НПО “Тайфун”, ул. Победы, 4, Обнинск, 249038 Россия

<sup>b</sup>Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН, Пыжевский пер., 3, Москва, 119017 Россия

\*e-mail: lev.ingel@gmail.com

Поступила в редакцию 13.03.2023 г.

После доработки 30.03.2023 г.

Принята к публикации 26.04.2023 г.

Теоретически исследуется взаимодействие различных форм конвекции с устойчиво стратифицированными задерживающими слоями в атмосфере. Рассмотрены три различные постановки задачи. 1) Линейная задача с заданными возмущениями температуры и вертикальной скорости на нижней границе устойчиво стратифицированной среды. 2) Проникновение в такую среду изолированного турбулентного термика. 3) Воздействие на задерживающий слой интенсивной конвективной турбулентной струи. Найдены аналитические решения соответствующих модельных задач. Обсуждается возможность связи рассмотренных моделей с сигнатурами интенсивной конвекции, в частности, с куполообразными выступами над наковальной кучево-дождевого облака (или кластера конвективной системы), представляющими собой вторжение мощного восходящего потока в устойчиво стратифицированную среду.

**Ключевые слова:** конвекция в атмосфере, задерживающие слои, устойчивая стратификация, тропопауза, струи, термики, аналитические модели, нелинейность

**DOI:** 10.31857/S0002351523040089, **EDN:** YNTULS

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Для тропосферы весьма характерны ситуации, в которых горизонтальный слой воздуха, охваченный конвекцией (с неустойчивой или близкой к нейтральной стратификацией плотности) ограничен сверху устойчиво стратифицированным “задерживающим” слоем. По многим причинам, представляет интерес взаимодействие конвективных элементов с такими слоями. Важно представлять, до какой степени задерживающий слой деформируется конвекцией, в частности, в каких случаях он может быть “пробит”. Один из важных примеров — “пробивание” тропопаузы над мощными конвективными системами, которые нередко являются генераторами опасных конвективных явлений (см., например, [Chernokulsky et al., 2023; Vedka, 2011; Marion et al., 2019] и библиографию в этих изданиях). Происходящие в этих системах интенсивные конвективные процессы иногда проявляются в виде определенных диагностических признаков (индикаторов, паттернов) — так называемых сигнатур интенсивной конвекции. Эти признаки обнаруживаются в дистанционных данных различного типа: спутниковых, радарных, грозопеленгационных и др. и, по результатам некоторых исследований, установлена стати-

стическая связь наблюдаемых сигнатур с регистрацией опасных конвективных явлений. К таким сигнатурам относится, в частности, Overshooting Top (OT) — куполообразный выступ над наковальной кучево-дождевого облака (или кластера конвективной системы), представляющий собой вторжение мощного восходящего потока в устойчиво стратифицированную среду. Такие сигнатуры могут нести важную диагностическую и прогностическую информацию. Например, OT демонстрирует заметную корреляцию с интенсивностью торнадо. Поэтому важно научиться связывать наблюдаемую картину (например, высоту упомянутого “купола”, наблюдаемую глубину проникновения восходящего потока в устойчиво стратифицированную среду) со свойствами восходящего потока (скоростью, плавучестью). В настоящей работе предложены некоторые аналитические модели подобных процессов. В следующем разделе в качестве первого шага рассмотрена задача о деформации устойчиво стратифицированной среды слабыми (линейными) стационарными возмущениями на нижней границе. Затем рассмотрены нелинейные задачи. В разделе 3 исследовано интенсивное нестационарное воздействие изолированного термика, а в разделе 4 — турбулентной конвективной струи.

## 2. ЛИНЕЙНЫЙ СТАЦИОНАРНЫЙ ОТКЛИК УСТОЙЧИВО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СРЕДЫ НА ОТКЛОНЕНИЯ ПЛАВУЧЕСТИ И ДИНАМИЧЕСКИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ НА НИЖНЕЙ ГРАНИЦЕ

Рассматривается устойчиво стратифицированная полуограниченная среда в области  $z \geq 0$  (ось  $z$  направлена вертикально вверх). Используя приближение Буссинеска, предполагаем, что плотность среды линейно зависит от возмущений температуры (в задачах физики атмосферы в качестве соответствующей переменной удобно использовать отклонения потенциальной температуры [Гилл, 1986])  $T$ :

$$\rho = \bar{\rho}(1 - \alpha T). \quad (1)$$

Здесь  $\rho$  – плотность,  $\bar{\rho}$  – фоновое (отсчетное) значение плотности,  $\alpha$  – термический коэффициент расширения среды.

В данном разделе рассматриваются термические и динамические неоднородности с горизонтальными масштабами не более нескольких десятков километров, так что кориолисовы ускорения не учитываются. Линеаризованная система уравнений динамики и переноса тепла для стационарной двумерной задачи имеет вид [Гилл, 1986; Stommel, Veronis, 1957; Ингель, Макоско, 2020]:

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \Delta u, \quad 0 = -\frac{\partial P}{\partial z} + \nu \Delta w + \alpha g T, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \gamma w = \kappa \Delta T. \quad (3)$$

Здесь  $u, w$  – составляющие вектора скорости  $\mathbf{v}$  вдоль горизонтальной оси  $x$  и вертикальной оси  $z$  соответственно;  $P = p/\bar{\rho}$ ,  $p$  – возмущение давления;  $g$  – ускорение свободного падения;  $\nu, \kappa$  – коэффициенты обмена;  $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2$  – двумерный оператор Лапласа; температурная стратификация предполагается устойчивой, так что фоновый градиент потенциальной температуры  $\gamma > 0$ .

Предполагается, что на нижней границе заданы гармонические по горизонтали термические и динамические возмущения, а для горизонтальной скорости – условие скольжения:

$$T = T_0 \cos kx, \quad w = w_0 \cos kx, \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0.$$

Формулировка задачи с гармоническими граничными условиями позволяет получить прозрачные аналитические решения, и это широко используется, начиная, по меньшей мере, с работы [Stommel, Veronis, 1957]. Что касается условия скольжения, оно в данной задаче не принципиально и может быть без качественных изменений заменено, например, более общим краевым условием тре-

тьего рода. Предполагается, что вдали от нижней границы (при  $z \rightarrow \infty$ ) все возмущения затухают.

Ищем гармонические по горизонтальной координате решения в виде:

$$u(x, z) = U(z) \sin kx, \quad w(x, z) = W(z) \cos kx, \\ P(x, z) = \Phi(z) \cos kx, \quad T(x, z) = \theta(z) \cos kx.$$

Система уравнений для амплитуд имеет вид

$$-k\Phi = \nu \left( \frac{d^2 U}{dz^2} - k^2 U \right), \quad (5)$$

$$\frac{d\Phi}{dz} = \nu \left( \frac{d^2 W}{dz^2} - k^2 W \right) + \alpha g \theta,$$

$$kU + \frac{dW}{dz} = 0, \infty \quad (6)$$

$$\gamma W = \kappa \left( \frac{d^2 \theta}{dz^2} - k^2 \theta \right). \quad (7)$$

Исключая из последней системы все неизвестные кроме  $W$ , получаем уравнение

$$\left( \frac{d^2}{dz^2} - 1 \right)^3 W = R W, \quad R = \frac{N^2}{\kappa \nu k^4}, \quad N = (\alpha g \gamma_T)^{1/2}. \quad (8)$$

Здесь введены частота плавучести  $N$ , безразмерная переменная  $Z = kz$  и безразмерный параметр  $R > 0$ , являющийся некоторым аналогом числа Рэлея.

Решение уравнения (8) стандартным образом ищем в виде линейной комбинации экспонент типа  $\exp(\sigma Z)$ . Характеристическое уравнение имеет вид

$$(\sigma^2 - 1)^3 = R. \quad (9)$$

С учётом затухания при  $z \rightarrow \infty$ , решение для вертикальной скорости представляет собой линейную комбинацию трёх экспонент

$$w(x, z) = \sum_{j=1}^3 C_j \exp(k\sigma_j z) \cos kx, \quad (10)$$

где отобраны корни  $\sigma_j$  с отрицательными действительными частями (здесь предполагается, что эти корни различны); постоянные интегрирования  $C_j$  определяются из краевых условий.

Расчеты заметно упрощаются с учетом того, что при рассматриваемых значениях параметров обычно  $R \gg 1$ . Например, при  $N = 10^{-2} \text{ с}^{-1}$ ,  $\kappa = \nu = 10 \text{ м}^2/\text{с}$  (эффективные коэффициенты турбулентного обмена),  $k = 10^{-3} \text{ м}^{-1}$  (что соответствует длине горизонтальной полуволны около 3 км)  $R = 10^6$ . С учетом больших значений  $R$ , горизонтальные производные в рассматриваемой системе уравнений малы по сравнению с верти-

кальными, абсолютные значения входящих в (10) корней характеристического уравнения велики; их приближенные значения:

$$\sigma_1 \approx -R^{1/6}, \quad \sigma_{2,3} \approx R^{1/6} \exp\left(\pm \frac{2}{3}\pi i\right) = R^{1/6} \left(-\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Для коэффициентов  $C_j$ , с учетом краевых условий получается приближенная система алгебраических уравнений:

$$C_1 + C_2 \exp\left(-\frac{2}{3}\pi i\right) + C_3 \exp\left(\frac{2}{3}\pi i\right) = 0,$$

$$C_1 + C_2 + C_3 = w_0,$$

$$C_1 + C_2 \exp\left(\frac{2}{3}\pi i\right) + C_3 \exp\left(-\frac{2}{3}\pi i\right) = w_1,$$

где введено обозначение

$$w_1 \equiv \frac{\kappa k^2}{\gamma} T_0 R^{1/3} = \alpha g T_0 \left(\frac{\kappa^2 k^2}{\nu N^4}\right)^{1/3}.$$

Ее решение:

$$C_1 = \frac{1}{3}(w_0 + w_1), \quad C_{2,3} = \frac{1}{3}\left(w_0 - \frac{w_1}{2}\right) \mp \frac{i}{2\sqrt{3}}w_1.$$

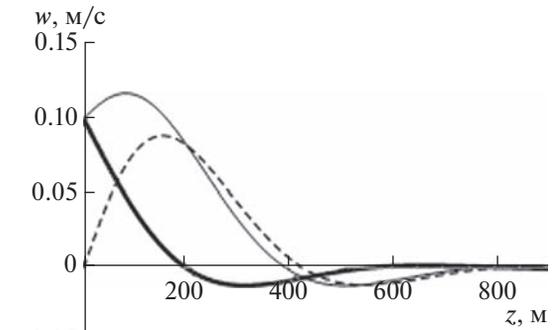
Для полей скорости, температуры и давления получаем приближенное решение:

$$w \approx \frac{1}{3} \left\{ (w_0 + w_1) \exp(-R^{1/6} kz) + \left[ (2w_0 - w_1) \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} R^{1/6} kz\right) + \sqrt{3}w_1 \times \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} R^{1/6} kz\right) \right] \exp\left(-\frac{1}{2} R^{1/6} kz\right) \right\} \cos(kx),$$

$$u \approx \frac{1}{3} R^{1/6} \left\{ (w_0 + w_1) \exp(-R^{1/6} kz) - \left[ (2w_1 - w_0) \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} R^{1/6} kz\right) - \sqrt{3}w_0 \times \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} R^{1/6} kz\right) \right] \exp\left(-\frac{1}{2} R^{1/6} kz\right) \right\} \sin(kx),$$

$$T \approx \frac{\gamma}{3\kappa k^2 R^{1/3}} \left\{ (w_0 + w_1) \exp(-R^{1/6} kz) - \left[ (w_0 - 2w_1) \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} R^{1/6} kz\right) + \sqrt{3}w_0 \times \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} R^{1/6} kz\right) \right] \exp\left(-\frac{1}{2} R^{1/6} kz\right) \right\} \cos(kx),$$

$$p \approx \frac{\bar{\rho} N^2}{3\kappa k^3 R^{1/2}} \left\{ -(w_0 + w_1) \exp(-R^{1/6} kz) + \left[ (2w_0 - w_1) \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} R^{1/6} kz\right) + \sqrt{3}w_0 \times \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} R^{1/6} kz\right) \right] \exp\left(-\frac{1}{2} R^{1/6} kz\right) \right\} \cos(kx).$$



**Рис. 1.** Примеры профилей вертикальной скорости на вертикали  $x = 0$  при  $N = 10^{-2} \text{ с}^{-1}$ ,  $\kappa = \nu = 10 \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $k = 10^{-3} \text{ м}^{-1}$  для различных краевых условий:  $w_0 \approx 0.1 \text{ м/с}$ ,  $w_1 \approx 0$ ,  $\tau = 0$  (отсутствие температурных возмущений на нижней границе, толстая линия);  $w_0 \approx 0.1 \text{ м/с}$ ,  $w_1 \approx 0.3$ ,  $\tau = 3$  (на нижней границе заданы как “динамические”, так и “термические” возмущения, тонкая сплошная линия);  $w_0 \approx 0$ ,  $w_1 \approx 0.3$ ,  $\tau = \infty$  (на нижней границе задано только отклонение температуры, штриховая линия).

Все возмущения затухают на вертикальных масштабах порядка  $(R^{1/6} k)^{-1}$ , много меньших горизонтального масштаба возмущений  $k^{-1}$ . Иными словами, при  $R \gg 1$  возмущения проникают в относительно тонкий слой устойчиво стратифицированной среды. Для приведенных выше численных значений параметров толщина такого слоя не превышает первых сотен метров.

Величины  $w_0, w_1$  обусловлены заданными отклонениями вертикальной скорости и температуры на нижней границе рассматриваемой области соответственно. Их безразмерное отношение

$$\tau \equiv \frac{w_1}{w_0} = \frac{\kappa k^2 T_0}{\gamma w_0} R^{1/3} = \alpha g \frac{T_0}{w_0} \left(\frac{\kappa^2 k^2}{\nu N^4}\right)^{1/3}$$

определяет соотношение вкладов “термического” и “динамического” источников возмущений.

На рис. 1, 2 представлены примеры профилей вертикальной скорости и отклонений температуры на вертикали  $x = 0$  для различных значений  $w_0, T_0$  и приведенных выше численных значений параметров. Чисто динамический форсинг ( $T_0 = 0$ ,  $w_0 \neq 0$ ) приводит к подъему относительно холодных объемов среды, адиабатическому охлаждению – это демонстрирует толстая кривая на рис. 2. При нагреве на нижней границе плавучесть сначала положительна, вертикальная скорость возрастает. Но затем, вследствие адиабатического охлаждения, плавучесть убывает, становится отрицательной, и восходящее движение прекращается.

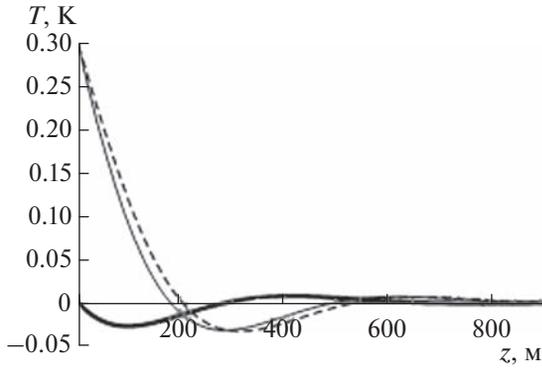


Рис. 2. Профили отклонений температуры для тех же краевых условий, что на рис. 1.

### 3. ПРОНИКНОВЕНИЕ ИНТЕНСИВНОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕРМИКА В УСТОЙЧИВО СТРАТИФИЦИРОВАННУЮ СРЕДУ

В предыдущем разделе рассматривался случай слабого воздействия на устойчиво стратифицированную среду (малые скорости и слабый перегрев на нижней границе). В настоящем разделе рассматривается задача о внедрении в среду достаточно интенсивного конвективного элемента — изолированного турбулентного термика.

Воспользуемся имеющимися в литературе результатами теоретических исследований динамики турбулентных термик (см., например, [Ингель, 2021] и библиографию в этой работе). Согласно упомянутой работе, рассматриваем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} R^3 &= 3\beta R^2 w, & \frac{d}{dt} (R^3 w) &= \beta_1 R^3 b, \\ \frac{d}{dt} (R^3 b) &= -N^2 R^3 w. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь  $t$  — время;  $R, w, b$  — радиус, скорость всплытия и удельная плавучесть термика соответственно. Последняя имеет размерность ускорения и выражается соотношением  $b = -g\rho'/\bar{\rho}$ , где  $\rho'$  — отклонение плотности (в [Ингель, 2021] в этом равенстве содержится описка — пропущен отрицательный знак). На нижней границе  $z = 0$  заданы значения  $R_0, w_0, b_0$  соответственно. Через  $\beta, \beta_1$  обозначены безразмерные константы. Первая из них определяется интенсивностью вовлечения окружающей среды; в литературе рекомендуются, в частности, значения  $\beta = 1/4, \beta_1 = 2/3$ .

В процессе монотонного вертикального движения термика, имеет место взаимно-однозначное соответствие между его вертикальной координатой  $z$  (уровнем его условного центра) и временем. По-

этому можно вместо времени использовать переменную  $z$ , имея в виду, что

$$w = \frac{dz}{dt}, \quad \frac{d}{dt} = \frac{d}{dz} \frac{dz}{dt} = w \frac{d}{dz}. \quad (12)$$

С учетом (12), из второго и третьего уравнений (11) нетрудно получить выражения [Ингель, 2021]:

$$\begin{aligned} b &= b_0 \left( \frac{R_0}{R} \right)^3 - \frac{1}{R^3} \int_0^z N^2 R^3 dz', \\ w &= \left[ w_0^2 \left( \frac{R_0}{R} \right)^6 + \frac{2\beta_1}{R^6} \int_0^z R^6 b dz' \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Из первого уравнения (11) следует

$$R = R_0 + \beta z. \quad (14)$$

В общем случае это решение приводит к довольно громоздким явным выражениям. Они несколько упрощаются если ограничиться случаем не зависящей от  $z$  стратификации  $N = \text{const}$ . Примем еще одно упрощение. Если начальный радиус рассматриваемого конвективного элемента  $R_0$  достаточно большой (например, порядка 1 км), то в процессе ограниченного по высоте проникновения термика в задерживающий слой, согласно (14), его размеры существенно не изменятся. Поэтому при относительно небольших перемещениях термика можно пренебрегать изменением его размеров. В этом приближении решение имеет вид

$$b = b_0 - N^2 z, \quad w = w_0 \left( 1 + \frac{2\beta_1 b_0}{w_0^2} z - \frac{\beta_1 N^2}{w_0^2} z^2 \right)^{1/2}.$$

Плавучесть (перегрев) термика в этом приближении линейно убывает с высотой. Подъем прекращается на высоте

$$h = \frac{b_0}{N^2} + \left( \frac{b_0^2}{N^4} + \frac{w_0^2}{\beta_1 N^2} \right)^{1/2}, \quad (15)$$

где  $w$  обращается в ноль. Пусть, например, начальная скорость термика  $w_0 = 10$  м/с, его начальный перегрев 3 К, а  $N = 10^{-2}$  с. Начальная плавучесть  $b_0$  в этом случае порядка 0.1 м/с<sup>2</sup>, и все слагаемые в (15) одного порядка. Механический импульс и перегрев вносят примерно одинаковый вклад в высоту проникновения термика  $h$ , которая при рассматриваемой умеренной стратификации составляет примерно 2 км.

4. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ИНТЕНСИВНОЙ  
 КОНВЕКТИВНОЙ ТУРБУЛЕНТНОЙ  
 СТРУИ С ЗАДЕРЖИВАЮЩИМ СЛОЕМ

Воспользуемся теорией конвективных турбулентных струй, развитой в [Вульфсон и др., 1987]. С использованием приближения пограничного слоя, вытянутого вдоль оси струи, и гипотезы подобия профилей вертикальной скорости и температурного возмущения в интенсивной струе выведена система уравнений

$$\frac{d}{dz}(wR)^2 = \frac{a_2}{a_1} \alpha g \theta R^2, \quad \frac{d}{dz}(w\theta R^2) = -\frac{a_4}{a_3} \gamma w R^2. \quad (16)$$

Здесь  $R(z)$  – радиус струи (эта функция определяется интенсивностью вовлечения),  $w$  и  $\theta$  – вертикальная скорость и отклонение температуры на оси струи соответственно;  $a_i$  – безразмерные коэффициенты, значения которых выражаются через интегралы от предполагаемых радиальных профилей  $w$  и  $\theta$ . В [Вульфсон и др., 1987] из эмпирических данных приняты радиальные зависимости типа  $\sqrt{1 - (r/R(z))^2}$ , для которых  $a_1 = a_3 = 1/4$ ,  $a_2 = a_4 = 1/3$ .

На нижней границе  $z = 0$  предполагаются заданными скорость  $w_0 > 0$  и отклонение температуры  $\theta_0$ . Зависимость  $R(z)$ , в [Вульфсон и др., 1987], как и в предыдущем разделе, предполагается линейной. Снова будем предполагать, что к началу взаимодействия струи с устойчиво стратифицированной средой она достаточно широкая и до ее остановки в этой среде она не успевает существенно расширяться. Пренебрегая изменением  $R$ , получаем более простую систему уравнений:

$$\frac{d}{dz}(w)^2 = \frac{a_2}{a_1} \alpha g \theta, \quad \frac{d}{dz}(w\theta) = -\frac{a_4}{a_3} \gamma w. \quad (17)$$

Из первого уравнения (17),

$$\theta = \frac{2a_1 w}{a_2 \alpha g} \frac{dw}{dz}. \quad (18)$$

Подставив (18) во второе уравнение (17), при  $w \neq 0$  приходим к уравнению

$$w \frac{d^2 w}{dz^2} + 2 \left( \frac{dw}{dz} \right)^2 = -AN^2, \quad A \equiv \frac{a_2 a_4}{2a_1 a_3}. \quad (19)$$

Если  $N = \text{const}$ , то независимая переменная  $z$  не входит в явном виде в (19), и это уравнение допускает понижение порядка. Для переменной  $\chi \equiv dw/dz$  получаем уравнение первого порядка

$$w\chi \frac{d\chi}{dw} + 2\chi^2 = -AN^2,$$

линейное относительно  $\chi^2$ :

$$\frac{d(\chi^2)}{d(\ln w)} + 4\chi^2 = -2AN^2.$$

Последнее уравнение, очевидно, имеет частное решение  $\chi^2 = -AN^2/2$ , так что, общее решение можно записать в виде

$$\chi^2 \equiv \left( \frac{dw}{dz} \right)^2 = -\frac{AN^2}{2} + \frac{D}{w^4}, \quad (20)$$

где  $D$  – постоянная интегрирования. Приняв приведенные выше значения постоянных  $a_i$ , можно записать

$$\frac{dw}{dz} = \pm \left( -\frac{4}{9} N^2 + \frac{D}{w^4} \right)^{1/2}. \quad (21)$$

Из (18) следует, что

$$\left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=0} = \frac{a_2 \alpha g \theta_0}{2a_1 w_0}.$$

С учетом этого, из (20) при указанных значениях постоянных  $a_i$ , находим

$$D = \frac{4}{9} w_0^2 [(\alpha g \theta_0)^2 + (Nw_0^2)].$$

Теперь (21) можно записать в виде

$$w^2 \frac{dw}{dz} = \pm \frac{2}{3} N \left( w_0^4 + \frac{\alpha g}{\gamma} \theta_0^2 w_0^2 - w^4 \right)^{1/2}. \quad (22)$$

Остановимся на вопросе о выборе знака в (22). Как видно из (18), для восходящих струй ( $w > 0$ ) знак  $dw/dz$  должен совпадать со знаком отклонения температуры. Следовательно, если на нижней границе задан положительный перегрев  $\theta_0 > 0$ , то сначала (до некоторого уровня) в (22) следует выбирать положительный знак. Вводя обозначения

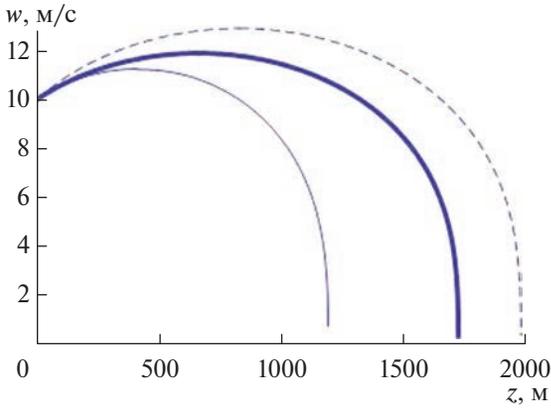
$$w_* = \left( w_0^4 + \frac{\alpha g}{\gamma} \theta_0^2 w_0^2 \right)^{1/4} = w_0 \left( 1 + \frac{\alpha g}{\gamma} \frac{\theta_0^2}{w_0^2} \right)^{1/4}, \quad (23)$$

$$\xi = \frac{w}{w_*},$$

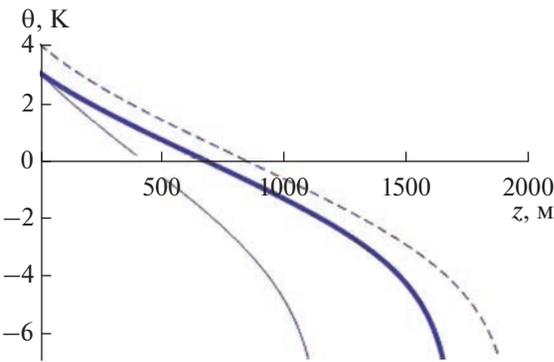
(22) можно переписать в виде

$$\xi^2 \frac{d\xi}{dz} = \pm \frac{2}{3} \frac{N}{w_*} (1 - \xi^4)^{1/2}. \quad (24)$$

Согласно вышеизложенному, на нижних уровнях при  $w \leq w_*$ , когда  $\xi \leq 1$ , в (24) следует выбрать по-



**Рис. 3.** Зависимости скорости восходящей конвективной струи в устойчиво стратифицированной среде от высоты при  $w_0 = 10$  м/с,  $\theta_0 = 3$  К,  $\gamma = 3 \times 10^{-3}$  К/м (толстая линия), при тех же значениях параметров за исключением  $\gamma = 5 \times 10^{-3}$  К/м (тонкая сплошная линия), при  $w_0 = 10$  м/с,  $\theta_0 = 4$  К,  $\gamma = 3 \times 10^{-3}$  К/м (штриховая линия).



**Рис. 4.** Зависимости отклонения температуры восходящей струи при тех же значениях параметров, что и на предыдущем рисунке.

ложительный знак, так что в этой области неявное решение в квадратурах можно записать в виде

$$z = \frac{3 w_*}{2 N} \int_{w_0/w_*}^{w/w_*} \frac{\xi^2 d\xi}{(1 - \xi^4)^{1/2}}. \tag{25}$$

Благодаря начальному нагреву, струя ускоряется и при

$$z = z_* \equiv \frac{3 w_*}{2 N} \int_0^1 \frac{\xi^2 d\xi}{(1 - \xi^4)^{1/2}} \tag{26}$$

достигает максимальной скорости  $w = w_*$ . В процессе подъема происходит адиабатическое охлаждение, температура струи понижается, и при  $z = z_*$  перегрев, как и  $dw/dz$  обращаются в ноль.

Дальнейший замедляющийся подъем происходит по инерции при отрицательной плавучести, и в равенствах (21), (22), (24) следует выбирать отрицательный знак. Неявное решение в этой области имеет вид

$$z = z_* - \frac{3 w_*}{2 N} \int_1^{w/w_*} \frac{\xi^2 d\xi}{(1 - \xi^4)^{1/2}}. \tag{27}$$

Полная высота подъема струи от нижней границы задерживающего слоя:

$$z = z_* + \frac{3 w_*}{2 N} \int_0^1 \frac{\xi^2 d\xi}{(1 - \xi^4)^{1/2}}. \tag{28}$$

Интегралы в (25)–(28) выражаются через эллиптические интегралы  $E$  и  $F$  [Справочник по специальным функциям, 1979] и подробно проанализированы и табулированы в [Вульфсон и др., 1987]. Значение интеграла на максимальном интервале:

$$\int_0^1 \frac{\xi^2 d\xi}{(1 - \xi^4)^{1/2}} \approx 0.5990.$$

Таким образом, полная высота подъема струи порядка  $w_*/N$ . Если, например,  $w_0 = 10$  м/с,  $\theta_0 = 3$  К,  $\gamma = 3 \times 10^{-3}$  К/м, то второе слагаемое в скобках в (23) равно единице и  $w_* = 2^{1/4} w_0 \approx 12$  м/с, а вертикальный масштаб  $3w_*/2N$  приближается к 2 км. На рис. 3, 4 приведены примеры зависимостей скорости и отклонения температуры струи от высоты при различных значениях параметров. Рисунки дают представление о том, в какой степени увеличение устойчивости стратификации уменьшает достигаемую струей высоту, а начальный перегрев способствует ее увеличению. Следует иметь в виду, что рассматриваемая модель [Вульфсон и др., 1987] предполагает достаточно большие скорости подъема струи, так что решения вблизи уровней остановки струи не претендуют на адекватность.

### 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрено взаимодействие различных типов конвекции с расположенным выше устойчиво стратифицированным слоем среды. Найден аналитический выражения для высоты проникновения возмущений. Высота проникновения интенсивной турбулентной струи согласуется по порядку величины с наблюдаемыми сигнатурами интенсивных конвективных явлений типа Overshooting Tops. Модели допускают дальнейшее развитие и уточнения. В частности, может быть

учтено расширение с высотой рассматриваемых конвективных элементов — струй и термиков.

Автор признателен рецензенту за полезные замечания и предложения.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Вульфсон Н.И., Левин Л.М.* Метеотрон как средство воздействия на атмосферу. М.: Гидрометеоиздат, 1987. 131 с.
- Гилл А.* Динамика атмосферы и океана. Т. 1. М.: Мир, 1986. 397 с. (*Gill A.E.* Atmosphere–Ocean Dynamics. N.Y.: Academic Press, 1982).
- Ингель Л.Х., Макоско А.А.* К теории конвективных течений во вращающейся стратифицированной среде над термически неоднородной поверхностью // Вычислительная механика сплошных сред. 2020. Т. 13. № 3. С. 288–297.
- Ингель Л.Х.* Некоторые задачи нелинейной динамики турбулентных термиков // Известия вузов. Радиофизика. 2021. Т. 64. № 3. С. 227–236.
- Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 830 с.
- Bedka K.* Overshooting cloud-top detections using MSG SEVIRI infrared brightness temperatures and their relationship to severe weather over Europe // Atmos. Res. 2011. V. 99. № 2. P. 175–189.
- Chernokulsky A., Shikhov A., Yarinich Y., Sprygin A.* An empirical relationship among characteristics of severe convective storms, their cloud-top properties and environmental parameters in Northern Eurasia // Atmosphere. 2023. V. 14. 174. <https://doi.org/10.3390/atmos14010174>
- Marion G.R., Trapp R.J., Nesbitt S.W.* Using overshooting top area to discriminate potential for large, intense tornadoes // Geophys. Res. Lett. 2019. V. 46. № 21. P. 12520–12526.
- Stommel H., Veronis G.* Steady convective motion in a horizontal layer of fluid heated uniformly from above and cooled non-uniformly from below // Tellus. 1957. V. 9. № 3. P. 401–407.

## Analytical Models of the Interaction of Convection with Intercepting Layers in the Atmosphere

L. Kh. Ingel<sup>1, 2, \*</sup>

<sup>1</sup>Research and Production Association “Typhoon”, ul. Pobedy, 4, Obninsk, 249038 Russia

<sup>2</sup>Obukhov Institute of Atmospheric Physics, Russian Academy of Sciences, Pyzhevskii per., 3, Moscow, 119017 Russia

\*e-mail: lev.ingel@gmail.com

The interaction of various forms of convection with stably stratified barrier layers in the atmosphere is theoretically investigated. Three different formulations of the problem are considered. 1) A linear problem with given perturbations of temperature and vertical velocity at the lower boundary of a stably stratified medium. 2) Penetration of an isolated turbulent thermal into such a medium. 3) Impact on the intercepting layer of an intense convective turbulent jet. Analytical solutions of the corresponding model problems are found. The possibility of connecting the considered models with signatures of intense convection, in particular, with dome-shaped protrusions above the anvil of a cumulonimbus cloud (or a cluster of a convective system), which represent the intrusion of a powerful updraft into a stably stratified medium, is discussed.

**Keywords:** atmospheric convection, intercepting layers, stable stratification, tropopause, jets, thermals, analytical models, nonlinearity