

УДК 551.511.32, 551.515, 523.45–852, 532.527

БАРОКЛИННАЯ МОДЕЛЬ БОЛЬШОГО КРАСНОГО ПЯТНА ЮПИТЕРА

© 2023 г. Б. П. Суетин^a, В. В. Жмур^{a, b, *}, О. Г. Чхетиани^c

^aМосковский физико-технический институт,

Институтский переулок, д. 9, г. Долгопрудный, Московская обл., 141701 Россия

^bИнститут океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Нахимовский просп., д. 36, Москва, 117997 Россия

^cИнститут физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН, Пыжевский пер., д. 3, Москва, 119017 Россия

*e-mail: zhmur-vladimir@mail.ru

Поступила в редакцию 10.02.2023 г.

После доработки 27.02.2023 г.

Принята к публикации 10.03.2023 г.

В работе предлагается квазигеострофическая бароклинная модель Большого Красного пятна на Юпитере как локализованного вихревого образования в непрерывно стратифицированной вращающейся атмосфере под действием горизонтального течения со сдвигом в приближении f-плоскости. На основе теории эллипсоидальных вихрей получена аналитическая связь геометрических размеров вихря, потенциальной завихренности вихревого ядра и характеристик фонового течения. Используются измерения ряда характеристик как вихря, так и фонового течения в миссиях Voyager 1 (1979), Galileo (1996), Cassini (2000). На основе теории получена оценка вертикального размера Большого Красного пятна Юпитера, согласующаяся с экспериментальными данными космического зонда Voyager 1 (1979).

Ключевые слова: Большое Красное пятно Юпитера (БКПЮ), мезомасштабный вихрь, вертикальный размер БКПЮ

DOI: 10.31857/S0002351523030082, EDN: TSBZJT

1. ВВЕДЕНИЕ

Большое Красное пятно Юпитера (БКПЮ) одно из старейших планетарных вихревых образований. Его, вероятно, впервые наблюдали Гук в 1664 г. (1665) и Кассини (1666). Антициклонический вихрь имеет эллиптическую форму, расположен в окрестности 22° южной широты меняются со временем. В период с 1878 по 1940-е годы его протяженность по долготе изменялась примерно с 38° до 30° [Simon et al., 2018]. В то время как с 1980 по 2020 гг. долготная протяженность уменьшилась с 18° до 11°, а по широте менялась слабо и находилась в диапазоне 8–9° [Wong et al., 2021]. В 70-х годах его размеры оценивались как 28000 × 14000 км, а в 1878 г. длина его принималась в 38500 км. [Sagan, 1971]. С 2009 по 2020 протяженность уменьшилась 16 до 12 тыс. км, а ширина с небольшими вариациями оставалась в диапазоне 10–11 тыс. км. Аспектное соотношение в это период изменилось с 1.5 до 1.1. Соответственно также наблюдается уменьшение сдвига скорости, возрастание дрейфовой скорости в западном направлении, уменьшение завихренности и увеличение числа Россби $Ro = U/\Omega L$ с 0.1 до 0.13–0.14. Здесь U, L — характерные скорость и размеры, $\Omega = 1.76 \times 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ — частота вращения. Миссии к

Юпитеру Voyager–1,2 (1979), Galileo (2009), Cassini (1995–2003), наблюдения с телескопа Hubble дали довольно много информации о структуре БКПЮ, характеристиках внутренних и внешних движений. Миссия Juno (2016–...) дала возможность получить по данным гравитационных возмущений оценки глубины пятна: до 500 км [Parisi et al., 2021] и 290–310 км [Bolton et al., 2021]. При этом глубинное простираание струйных течений оценивается в 3000 км ниже уровня облаков [Kaspi, 2013; Kaspi et al., 2018].

Скорость западного дрейфа БКПЮ порядка 3 м/с, в то время как скорость Россби на порядок больше — 30–40 м/с. Амплитуды зональных скоростей, “раскручивающих” пятно достигают ±100 м/с.

В качестве механизма поддержания БКПЮ Р. Хайдом предлагалась колонка Тэйлора [Hide, 1961; Ingersoll, 1969]. К этой гипотезе, которая требует баротропности, существовало довольно много вопросов [Sagan, 1971]. Г. Голицын, использовавший теорию подобия для циркуляции Юпитера [Golitsyn, 1970] и Р. Смолуховский [Smoluchowski, 1970], применивший конвективную теорию континентального дрейфа, высказали предположение, что БКПЮ представляет со-

бой крупный устойчивый свободный атмосферный вихрь, связанный с зональными течениями. Конвективная природа течений на Юпитере и других планетах—гигантах была предложена в [Busse, 1976; Busse, 1994] и [Келлер и Яворская, 1974; Yavorskaya and Belyaev, 1982] и этот подход в большей степени развивается для задач магнитного динамо и течений в полярных областях [Jones and Kuzanyan, 2020; Yadav et al., 2022; Heimpel et al., 2022].

Возможность формирования уединенного вихря на сдвиговом потоке при совместном действии β -эффекта и нелинейности впервые было аналитически показана у [Ларичев и Резник, 1976]. В [Maxworthy and Redekopp, 1976] в рамках квазигеострофического приближения была предложена модель БКПЮ, как солитона на сдвиговом потоке. [Beaumont, 1981] рассмотрел солитон уже на несимметричном сдвиговом потоке. В. Петвиашвили [Петвиашвили, 1980] в рамках баротропной модели мелкой атмосферы показал, что солитонное решение может существовать в такой системе при наличии бета эффекта. Схожая модель рассматривалась также в [Сагдеев и др., 1981].

Бароклинное обобщение исследовалось в [Flierl, 1979, Незлин, 1981], где было показано лучшее соответствие с известными данными. Более глубокое развитие нелинейной теории уединенных волн типа Россби в бароклинной системе на фоне зонального потока, когда масштабы стратификации сравнимы толщиной слоя жидкости и для масштабов движений большого масштаба Обухова (радиуса внешней деформации Россби) $R = (gH_0)^{1/2}/2\Omega \approx 3500$ км ($g = 23.95$ м/с, $H_0 \approx 65$ км — толщина облачного слоя) было сделано в [Романова и Цейтлин, 1984; Романова и Цейтлин, 1985].

В [Тихомолов, 1994] и [Джалилиан и Лю, 2019] аналитически рассмотрена конвекция во вращающемся слое с учетом деформации свободной поверхности и показана возможность существования уединенного решения, поддерживаемого нелинейностью, неоднородным вращением и диссипацией.

В [Волокитин и Красносельских, 1981] уединенный вихрь Россби формировался на фоне сдвигового потока в форме тангенциального разрыва. Тангенциальный разрыв характерен и для лабораторного уединенного вихря Россби [Антипов и др., 1985]. В основном, лабораторные модели БКПЮ соответствовали баротропным условиям [Антипов и др., 1985, Sommeria et al., 1988].

В [Sommeria et al., 1988] и в более поздних работах предлагается объяснение возникновения устойчивых интенсивных струй в планетных атмосферах, подобных атмосфере Юпитера, с использованием представлений статистической механики к областям потенциальной завихренности

[Miller et al., 1992; Michel and Robert, 1994; Chavanis, 2005]. В рамках $1\frac{1}{2}$ -слойной квазигеострофической модели показано, что перемешивание потенциальной завихренности приводит к формированию устойчивого организованного крупномасштабного течения зонального типа или закольцованных, образующих крупные вихри типа БКПЮ и овалов [Bouchet and Sommeria, 2002]. Схожие результаты получены в рамках двуслойной [Williams, 1985] и однослойных квазигеострофических моделей [Marcus, 1988; Marcus and Lee, 1989; Dowling and Ingersoll, 1994] и в более сложной $1\frac{3}{4}$ -слойной [Flierl et al., 2019].

Важность бароклинной неустойчивости для формирования зональных течений и образований крупных вихрей на Юпитере была явно показана в [Williams, 1979; Williams, 2003].

Вертикальная структура крупных вихрей в рамках таких подходов остается обычно вне рассмотрения. Здесь мы не можем не отметить оригинальное исследование В.Шулейкина, показавшего связь эллиптической формы БКПЮ с β -эффектом и диссипацией (вертикальной турбулентной вязкостью) и давшего оценку его вертикального размера в 30–44 км [Шулейкин, 1976]. Такая оценка была близка к представлениям о структуре атмосферы Юпитера 70-х годов.

В предлагаемой работе исследуется однородная по потенциальной завихренности 3D-область, имеющая эллипсоидальную форму и подвергнутая воздействию фонового течения. Модель описывает квазигеострофический бароклинный вихрь в непрерывно стратифицированной вращающейся атмосфере в приближении f -плоскости. В данной работе β -эффект не учитывается, однако в Приложении оценено его влияние на изучаемые явления. Предполагая из наблюдений, что вихрь слабо меняется со временем, из всех возможных теоретических сценариев поведения вихря выбран стационарный режим. В этом режиме все физические параметры вихря и течения связаны между собой. В работе определена эта связь. Часть параметров была измерена в различных миссиях изучения Юпитера космическими аппаратами, другая часть может быть рассчитана из уравнения упомянутой связи. В идеальном варианте мы можем иметь как теоретически расчетные величины, так и их численные значения, взятые из измерений. Такой процедуре было подвергнута потенциальная завихренность и вертикальный размер ядра вихря. Как оказалось, потенциальная завихренность вихря монотонно растет со временем, а теоретически рассчитанный вертикальный размер БКПЮ близок к его измеренному значению.

2. ОСНОВЫ ТЕОРИИ МЕЗОМАСШТАБНЫХ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫХ ВИХРЕЙ

Первое упоминание о теории эволюции вихря как пятна постоянной завихренности в форме эллипса в плоской гидродинамике восходит к работам Г. Кирхгофа 19-го века и в русскоязычной литературе появились как перевод оригинальных статей [Кирхгоф, 1962]. До Кирхгофа вихри рассматривались как точечные вихревые образования. Кирхгоф показал, что стационарное вращение эллиптического вихря с постоянной угловой скоростью (без изменения его геометрических размеров) полностью определяется поведением внешней границы вихря. Отметим, что в упомянутой работе Кирхгофа фоновое течение отсутствовало, а все возникающие течения индуцированы самим вихрем. При наложении на вихрь Кирхгофа внешнего фонового течения, последнее может привести к деформации формы вихря. Задача о вихре Кирхгофа на фоне прямолинейного течения с постоянным сдвигом рассматривалась С.А. Чаплыгиным [Чаплыгин, 1948], показавшим, что наличие сдвига внешнего течения инициирует пульсации границы эллиптического вихря, но в наиболее общем виде постоянно завихренных течения изложена японским исследователем Кида [Kida, 1981]. Постоянно завихренные плоские течения или, что то же самое, течения с линейной зависимостью компонент скоростей от координат выбраны не случайно, поскольку только такие течения при деформации формы вихрей оставляют свойство эллиптичности вихрей неизменной.

В работах конца 80-х, начала 90-х и последующих годов была заложена аналитическая теория эволюции квазигеострофических вихрей в непрерывно стратифицированной вращающейся несжимаемой среде под воздействием неоднородных фоновых течений [Жмур и Панкратов, 1989; Pankratov and Zhmur, 1991; Meacham, 1992; Жмур, 2011]. В такой постановке вихрь состоит из 3D-ядра, представляющего собой свободно деформируемый “водяной мешок”, заполненный завихренной жидкостью, и внешней к ядру области, с жидкостью, захваченной во вращательное движение. Внешняя (фоновая) жидкость тоже может быть завихренной, но завихренность жидкости ядра должна отличаться от завихренности фоновой жидкости. Под воздействием внешних (фоновых) течений ядро такого вихря может перемещаться и деформироваться. Возможное вращение формы ядра мы будем относить к деформации. Вращение же внешней жидкости, захваченной в движение вихревым ядром, подстраивается под эволюцию вихревого ядра. Указанные работы являются обобщением исследований Кида-Чаплыгина на случай 3D геофизической гидродинамики при изучении поведения эллипсоидальных вихрей в

квазигеострофическом приближении на фоне равнозавихренных течений.

Квазигеострофичность предполагает малые значения чисел Россби $Ro = \frac{U}{fL} \ll 1$, означающее, что в гидродинамической системе имеются две главные силы — сила давления и сила Кориолиса, которые практически уравнивают друг друга. В выражении для Ro в числителе стоит характеристическая горизонтальная скорость U , $f = \text{const}$ — параметр Кориолиса, L — характерный горизонтальный размер явления. При $Ro \ll 1$ у жидких частиц системы сохраняется потенциальная завихренность. Указанный закон сохранения в терминах функции тока $\psi(x, y, z, t)$ выписан ниже

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\Delta_h \psi + \frac{\partial}{\partial z} \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + J_h \left(\psi, \Delta_h \psi + \frac{\partial}{\partial z} \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = 0. \quad (1)$$

В уравнении (1) x, y — неподвижные горизонтальные оси системы координат, z — ось, направленная вертикально вверх; $J_h(A, B) = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial B}{\partial x}$ — якобиан по горизонтальным координатам; Δ_h — оператор Лапласа по горизонтальным координатам. Сохраняющийся у жидких частиц потенциальная завихренность, следующая из (1), дается соотношением

$$\sigma = \Delta_h \psi + \frac{\partial}{\partial z} \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (2)$$

Требования к декартовой системе координат, в которой выписаны уравнения (1) и (2), очень мягкие — две оси (x, y) горизонтальны и одна z -вертикальная. Произвол в выборе направления, например, осей x , позволит использовать “удобные” системы координат, и далее этим мы воспользуемся.

В соотношении (2) $\Delta_h \psi = \text{rot}_z \vec{u}$ — относительная завихренность. Указанный вид потенциальной завихренности соответствует приближению f -плоскости. В приближении β -плоскости соотношение (2) модифицируется с одновременной конкретизацией системы координат. В Приложении изучается влияние β эффекта на рассматриваемые процессы и делается вывод, что учет β эффекта практически не улучшает точность описания явления.

Сделаем следующие предположения: среда безгранична во всех направлениях; частота Брента-Вайсяля N — постоянная. Предположим далее, что ядро вихря имеет форму эллипсоида с двумя горизонтальными осями и одной вертикальной, а распределение потенциальной завихренности в пространстве следующее: в ядре вихря

для всех частиц σ постоянная, а вне ядра потенциальная завихренность всюду равна нулю. Как показано в работах [Жмур и Панкратов, 1989; Pankratov and Zhmur, 1991; Meacham, 1992; Жмур, 2011] задача об эллипсоидальном вихре имеет точное решение

$$\begin{aligned} \psi(\tilde{x}, \tilde{y}, \eta, t) = & -\frac{1}{4} \sigma a b \tilde{c} \times \\ & \times \int_{\lambda}^{\infty} \left(1 - \frac{\tilde{x}^2}{a^2 + \mu} - \frac{\tilde{y}^2}{b^2 + \mu} - \frac{\tilde{z}^2}{\tilde{c}^2 + \mu} \right) \times \\ & \times \frac{d\mu}{\sqrt{(a^2 + \mu)(b^2 + \mu)(\tilde{c}^2 + \mu)}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь a, b – горизонтальные полуоси эллипсоида, c – его вертикальная полуось, $\tilde{c} = \frac{N}{f} c$ – растянутая в $\frac{N}{f}$ раз вертикальная полуось, $\tilde{x}, \tilde{y}$ – горизонтальные оси координат, направленные по главным осям эллипсоида, $\tilde{z} = \frac{N}{f} z$ – растянутая в $\frac{N}{f}$ раз вертикальная ось системы координат. Нижний предел в интеграле (3) положительный корень λ кубического уравнения

$$\frac{\tilde{x}^2}{a^2 + \lambda} + \frac{\tilde{y}^2}{b^2 + \lambda} + \frac{\tilde{z}^2}{\tilde{c}^2 + \lambda} = 1. \quad (4)$$

В соотношении (3) все характеристики вихря (его полуоси и угол ориентации) могут зависеть от времени t как от параметра. Наша задача как раз и состоит в том, чтобы найти эти зависимости, используя кинематическое условие на поверхности ядра. Вихрь сохранит эллипсоидальную форму, если скорость деформации его границы окажется линейной по координатам. Как выясняется это свойство самовоздействия эллипсоидального вихря выполняется автоматически.

Кинематическое условие на поверхности ядра с требованием, чтобы эллипсоид во время эволюции вихря оставался эллипсоидом, приводит к следующим ограничениям на параметры вихря, находящегося в среде, покоящейся на бесконечности: все полуоси остаются постоянными, а сам эллипсоид вращается с постоянной угловой скоростью. Детали можно найти в цитируемых работах.

Из соотношения (3) можно получить все остальные характеристики: поля течения и относительной завихренности, распределение плотности и деформированную вихрем частоту Брента–Вайселя и т.д.

Если поместить эллипсоидальный вихрь в баротропное равновихренное фоновое течение с линейной зависимостью компонент скорости от горизонтальных координат, то поведение вихря

станет следующим: он будет перемещаться со скоростью фонового потока, приходящегося на центр эллипсоида, вертикальная ось c меняться не будет, горизонтальные оси a, b будут эволюционировать, но так что произведение $a \cdot b$ сохраняется. В результате площадь горизонтального среза ядра на любом уровне будет сохраняться, а также будет сохраняться объем ядра вихря.

При смене системы координат (например, при ее повороте) линейная зависимость компонент фонового течения от горизонтальных координат останется в силе, но коэффициенты при координатах изменятся. Существует “удобная” система координат (x, y) , в которой горизонтальная фоновая скорость $\vec{U}_b = (u_b, v_b)$ запишется в следующем виде

$$\begin{cases} u_b = u_0 + ex - \gamma y \\ v_b = v_0 + \gamma x - ey. \end{cases} \quad (5)$$

“Удобство” выражается в том, что в (5) коэффициенты пропорциональности x – компоненты скорости при y и y – компоненты скорости при x одинаковы по модулю, но различны по знаку, а матрица из коэффициентов пропорциональности $\begin{pmatrix} e & -\gamma \\ \gamma & -e \end{pmatrix}$ будет антисимметричной. Это в последствии значительно упростит запись законов эволюции параметров эллипсоидального ядра. Коэффициенты e и γ связаны с неоднородностью (зависимостью от координат) фонового течения. При этом они сами по себе имеют следующий физический смысл: $\gamma = \frac{1}{2} \text{rot}_z \vec{U}_b$ – угловая скорость

вращения частиц в фоновом потоке, $e = \frac{1}{l} \frac{dl}{dt}$ – относительная скорость удлинения материального отрезка в x -направлении (главном направлении тензора скоростей деформации). Последний коэффициент e связан с деформацией жидкого объема. Назовем его коэффициентом деформации. Итак, фоновое течение обладает двумя качествами – оно вращает жидкие объемы и деформирует их. Уместно сказать про потенциальную завихренность фонового течения. Поскольку баротропное фоновое течение от вертикальной координаты не зависит, то согласно соотношению (2) его потенциальная завихренность равна 2γ и совпадает с относительной завихренностью. При изучении эволюции эллипсоидального ядра вихря в баротропном течении (5) соотношение (3), описывающее поведение вихря, останется в силе, но при этом параметр σ следует считать избыточной потенциальной завихренностью ядра над значением потенциальной завихренности фонового течения. В результате потенциальная завихренность жидких частиц ядра окажется

равной $(\sigma + 2\gamma)$, а та же характеристика частиц вне ядра 2γ .

Свойство баротропности фонового течения (5) не следует понимать дословно. Дело в том, что сам вихрь “чувствует” фоновое течение на расстояниях, сравнимых с размерами самого вихря, т.е. по вертикали вверх и вниз на толщину вихря, вбок на диаметр вихря. Поэтому представление фонового течения в виде (5) нам нужно в объеме вокруг вихря по горизонтальным размерам примерно три диаметра и вертикальным размером порядка трех толщин вихря. Что будет вне этого объема нам не важно, поэтому для простоты в области вне вихря поле фонового течения мы продолжим теми же соотношениями (5). В результате фоновое течение (5) формально во всем объеме будет соответствовать баротропному течению.

Отметим важное свойство решения задачи (3), справедливое как в отсутствие фонового течения (5), так и при его наличии. Решение (3) симметрично относительно горизонтальной плоскости $\tilde{z} = 0$, а на самой плоскости в силу симметрии вертикальная компонента скорости отсутствует. Это означает, что мы можем заменить эту плоскость твердой крышкой, при этом условие непротекания жидкости через плоскость симметрии выполняется автоматически. В силу сказанного поведение в нижнем полупространстве полуэллипсоидального вихря с твердой крышкой на горизонте $\tilde{z} = 0$ и поведение эллипсоидального вихря в неограниченном по вертикали пространстве будет одинаковым. Этот математический метод, называемый в физике методом отображения, хорошо известен в задачах электростатики, магнитостатики и теории гравитационного потенциала и позволяет расширить круг решаемых задач. В нашем случае мы можем решать задачу об эллипсоидальном вихре во всем пространстве наравне с задачей эволюции полуэллипсоидального вихря в полупространстве с непротекаемой твердой крышкой на горизонте симметрии. Оба решения будут совпадать. Этот способ был применен для описания поведения приповерхностного полуэллипсоидального мезомасштабного вихря в океанологии [Жмур и Панкратов, 1989].

При экспериментальном изучении БКПЮ космическими аппаратами или с помощью телескопов все полученные данные относились к нижней половине вихря, отсчитываемой от уровня облаков. Собственно, и сам вихрь виден благодаря движению облаков. Верхняя граница облаков проходит практически по середине вихря или близка к этому положению. Во всяком случае мы будем придерживаться этой рабочей гипотезы. Уровень верхней границы облаков, строго говоря, не является горизонтальной плоскостью. Из наблюдений мы знаем, что в центре вихря облака слегка приподняты. Если пренебречь этим под-

нятием и считать, что граница облаков является горизонтальной плоскостью, на которой вертикальная компонента вектора скорости отсутствует, то эта плоскость обязана совпадать с плоскостью симметрии эллипсоидального вихря. Тогда задача о поведении нижней части вихря с твердой крышкой на верхней границе станет естественной моделью БРПЮ. Поведение полуэллипсоидальной нижней части вихря не будет зависеть от того, есть ли движение выше слоя облаков или оно отсутствует. По экспериментальным данным мы не можем с уверенностью утверждать, ни того, ни другого. Однако, как целый эллипсоидальный вихрь, так и его нижняя половина математически будут вести себя абсолютно идентично. Поэтому мы будем изучать только нижнюю, видимую, часть вихря, не детализируя свойства его верхней части и даже не будем обсуждать есть ли вообще движение выше облаков. Тем не менее, математическая постановка задачи будет предполагать наличие полного эллипсоида в неограниченном пространстве.

Согласно наблюдениям за самим БКПЮ и за его окрестностями, примем за рабочую гипотезу, что вихрь обтекается баротропным потоком с горизонтальным сдвигом. Вспомогательную ось x' направим по течению на восток (вправо в плоскости рисунка), добавим ось y' так, чтобы получилась правая система координат (в плоскости рисунка ось y' направлена на север, на рисунке вверх, перпендикулярно фоновому течению).

В координатах (x', y') невозмущенный вихрем фоновый поток имеет вид

$$\begin{cases} u'_b = -\Gamma y', \\ v'_b = 0. \end{cases} \quad (6)$$

“Удобная” система координат (x, y) окажется повернутой на угол 135° по отношению к системе координат (x', y') , а коэффициенты e и γ выразятся через Γ соотношениями:

$$e = \gamma = \frac{1}{2} \Gamma. \quad (7)$$

Для удобства описания эволюции ядра вихря в течении (5) введем новый безразмерный параметр горизонтального удлинения вихря $\epsilon = \frac{a}{b}$. При чем для определенности будем считать, что a — это большая из горизонтальных полуосей. Также введем в рассмотрение угол поворота ядра вихря вокруг вертикальной оси θ (угол между большей горизонтальной полуосью a и положительным направлением оси x системы координат (5)). В работах [Жмур и Панкратов, 1989; Pankratov and Zhmur, 1991; Meacham, 1992; Жмур, 2011] выведе-

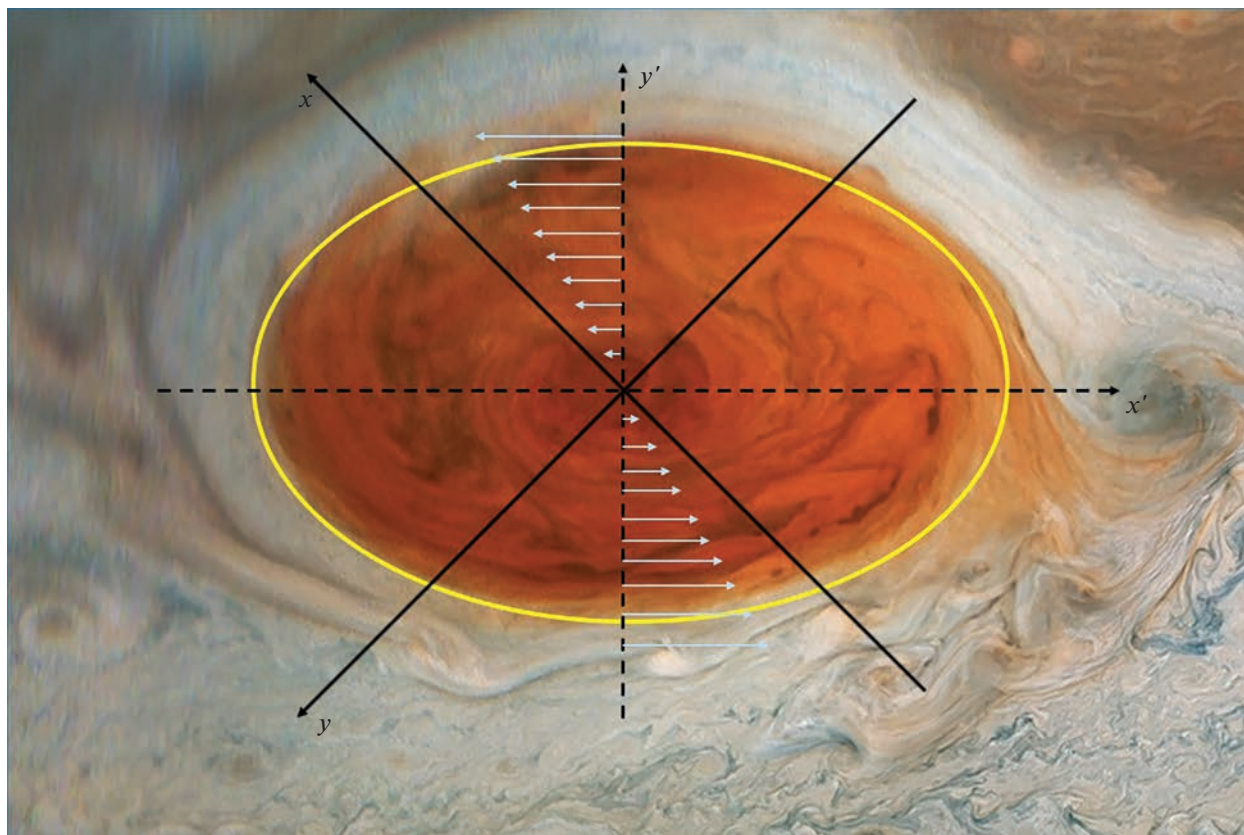


Рис. 1. Применяемые системы координат. Рисунок БКПЮ взят из источника: <https://www.nasa.gov/image-feature/jpl/clyde-s-spot-on-jupiter>.

на система уравнений поведения параметров вихря ε и θ в течении (5):

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon} = 2\varepsilon e \cos 2\theta, \\ \dot{\theta} = \Omega(\varepsilon, K) + \gamma - \frac{\varepsilon^2 + 1}{\varepsilon^2 - 1} e \sin 2\theta. \end{cases} \quad (8)$$

Здесь

$$\Omega(\varepsilon, K) = \frac{1}{2} \sigma K \int_0^\infty \frac{\mu d\mu}{\sqrt{(\mu + \varepsilon)\left(\mu + \frac{1}{\varepsilon}\right)(K^2 + \mu)}}, \quad (9)$$

где $\Omega(\varepsilon, K)$ — угловая скорость вращения эллипсоида в отсутствии течения. Безразмерный параметр K описывает вертикальную сплюснутость вихревого ядра с учетом свойств плотностной стратификации среды:

$$K = \frac{N}{f} \frac{c}{\sqrt{ab}}, \quad (10)$$

где f (с^{-1}) — параметр Кориолиса, N (с^{-1}) — частота Брента–Вяйсяля, a, b, c (м) — большая и малая горизонтальные полуоси и вертикальная полуось соответственно. При деформации вихря баротропным течением параметр K остается неизменным,

благодаря сохранению как произведения ab (т.е. площади горизонтального сечения эллипсоида), так и его толщины c .

Согласно (8), ядро вихря вращается и деформируется. Причем деформация происходит исключительно из-за фонового течения, благодаря наличию коэффициента деформации e . Форма ядра вращается при самовоздействии, а также подкручивается фоновым течением. Отметим, что вращение формы не совпадает с вращением частиц жидкости в ядре. Частицы обгоняют вращение формы.

Как уже упоминалось, уравнения (8) описывают не только эволюцию эллиптического вихревого ядра в безграничном пространстве, но остаются в силе для ядра полуэллиптической формы, ограниченной горизонтальной твердой крышкой на уровне, проходящей через центр эллипсоида. Такой способ был применен для описания подповерхностных вихрей океана [Жмур и Панкратов, 1989].

Сделаем некоторые замечания, позволяющие лучше интерпретировать задачу эволюции БКПЮ в целом. В частности, существуют варианты обобщения как постановки задачи, так и ее промежуточных результатов. Например, если в соотноше-

нии (2) считать, что потенциальная завихренность частиц меняется со временем из-за каких-либо физических процессов накачки или диссипации, с дополнительным требованием, что для частиц внутри и вне ядра потенциальная завихренность зависит только от времени и не зависит от координат, то соотношение (3) останется в силе. При этом от времени могут зависеть не только геометрические параметры вихря (его полуоси и угол ориентации в пространстве), но и σ -перепад значений потенциальной завихренности в ядре и внешней к ядру области. Аналогично в соотношениях (5) для фонового потока все приведенные величины u_0 , v_0 , e , γ могут зависеть от времени. В такой постановке удобная система координат перестанет быть неподвижной. Однако, если дополнительно потребовать, чтобы фоновое течение представляло собой прямолинейное течение постоянного направления, но с переменным сдвигом, то удобная система координат не будет вращаться. Тогда, описание эволюции эллипсоидальных вихрей сведется к тем же уравнениям (8), (9), но с переменными коэффициентами $\sigma(t)$, $e(t) = \gamma(t) = \frac{1}{2}\Gamma(t)$. Следует сразу отметить, что согласно имеющейся информации о БКПЮ, характерные времена эволюции $\sigma(t)$ и $\Gamma(t)$ намного превосходят характерный период обращения частиц в вихревом ядре. Тогда на временах порядка периода обращения частиц в ядре величины $\sigma(t)$ и $\Gamma(t)$ можно положить константами. Это сильно упрощает задачу. В частности позволяет решить уравнения (5) сделать вывод, что существует только три режима поведения вихрей и дает возможность, использовать интеграл системы (8). Слабая зависимость $\sigma(t)$ и $\Gamma(t)$ от времени позволит проследить эволюцию системы во времени, как параметрическую зависимость от σ и Γ на больших временах. Именно так мы и поступим. Далее для упрощения математических выкладок будем считать σ и Γ константами.

Аналогичный вопрос возникает вокруг математического свойства сохранения объема вихревого ядра и произведения горизонтальных полуосей $a(t)b(t)$. Эти свойства математически справедливы в пренебрежении такими эффектами, как турбулентная диффузия и вязкость. В реальности во внешней к ядру области наблюдается значительная турбулентность. Внутри ядра движения ламинарны или похожи на таковые. При квазиплоских турбулентных движениях во внешней области, значительные пульсационные движения вырывают небольшие объемы газа из ядра и уносят их от ядра практически в горизонтальной плоскости. Это должно приводить к уменьшению ядра вихря в на горизонтальных плоскостях. При малых временах (того же порядка что и время обращения частиц в ядре) этот эффект не

заметен. На больших временах эффект уменьшения объема вихря значителен. Так за время изучения БКНЮ 350 лет, видимые размеры вихря и соответственно его видимая площадь заметно уменьшились и продолжает уменьшаться. Как влияет изменение видимой площади БКПЮ на вертикальный размер ядра не ясно. Поэтому естественно полагать, что на каждом этапе и на каждой миссии изучения БКПЮ космическими аппаратами следует пользоваться локальными значениями всех параметров вихря и для этих же моментов времени рассчитывать необходимые характеристики. Как и в предыдущих рассуждениях для упрощения математических выкладок на малых временах мы будем пользоваться предположением о постоянстве σ , $e = \gamma = \frac{1}{2}\Gamma$, а затем изучать параметрическую зависимость свойств вихря от этих характеристик.

3. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ, СВЯЗЫВАЮЩЕЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ БОЛЬШОГО КРАСНОГО ПЯТНА ЮПИТЕРА

Система уравнений (8) имеет первый интеграл:

$$\frac{e}{\sigma} \sin 2\theta = S \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1} + \frac{\gamma \varepsilon - 1}{\sigma \varepsilon + 1} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1} \int_1^{\varepsilon} \frac{\tau^2 - 1}{\tau^2} \frac{K}{2} \times \\ \times \int_0^{\infty} \frac{\mu d\mu}{\sqrt{\left(\mu^2 + \left(\tau + \frac{1}{\tau}\right)\mu + 1\right)^3 (K^2 + \mu)}} d\tau, \quad (11)$$

где S — безразмерная константа интегрирования.

Безразмерные параметры $\frac{e}{\sigma}$ и $\frac{\gamma}{\sigma}$ используются как по причине математического удобства, так и имеют ясный физический смысл. Величина $\frac{\sigma}{e}$ представляет собой безразмерную интенсивность вихря, а $\frac{\gamma}{e}$ — соотношение вращательных и деформационных качеств фонового течения.

Соотношение (11) удобно представить на плоскости в координатах $(\varepsilon, \sin 2\theta)$ и тогда оно описывает связь параметров течения с характеристиками вихря. Каждому значению S (а значит и каждому вихрю) на плоскости $(\varepsilon, \sin 2\theta)$ соответствует интегральная кривая и характеристики этого вихря могут находиться только как точка на данной кривой. Эволюция вихря сводится к движению точки вдоль интегральной кривой. Для нас главным вопросом является вопрос о том, какая кривая описывает поведение Большого Красного пятна Юпитера? Для ответа на этот вопрос используем два наблюдения.

Наблюдение первое. Обратимся к первому уравнению системы (8). Заменяя производную по времени конечной разностью, и оценив параметр e по порядку величины мы сможем определить значение $\cos 2\theta$, а следовательно и значение $\sin 2\theta$.

Из данных наблюдений известно, что в 1978 году $\varepsilon = 1.85$, а в 2018 году $\varepsilon = 1.4$. Основываясь на этих данных можно оценить значение $\dot{\varepsilon}$:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\Delta t} = \frac{0.45}{40 \times 31.5 \times 10^6} \approx 3.6 \times 10^{-10}. \quad (12)$$

Далее значение параметра e будет аккуратно оценено, а пока оценим его по порядку величины, как горизонтальный сдвиг скорости $\sim 10^{-5} \text{ с}^{-1}$. Подставляя, полученное значение в первое уравнение системы (5), получим:

$$3.6 \times 10^{-10} = 2 \times 10^{-5} \times 1.8 \cos 2\theta. \quad (13)$$

Таким образом $\cos 2\theta \approx 10^{-5}$, следовательно, $\sin 2\theta = 1$ с очень высокой точностью.

Этот факт говорит о том, что характеристики исследуемого вихря находятся вблизи точки покоя на плоскости $(\varepsilon, \sin 2\theta)$. Напомним, что согласно теории эллипсоидальных вихрей, существует три различных режима поведения формы вихрей: неограниченное вытягивание, вращение и колебание. Заведомо следует отменить неограниченное вытягивание ядра вихря и вращение. Остается режим колебаний. В зоне режима колебаний на плоскости $(\varepsilon, \sin 2\theta)$ имеется точка покоя, в окрестности которой в физическом пространстве совершаются периодические колебания направления длинной горизонтальной оси ядра эллипсоида и ограниченные периодические вариации его горизонтальных полуосей. В нашем случае вихрь ориентирован очень точно в направлении $\cos 2\theta = 0$ и $\sin 2\theta = 1$ и теоретически должен довольно точно должен попасть на плоскости $(\varepsilon, \sin 2\theta)$ в точку покоя с постоянными значениями полуосей и соответственно параметром ε . Однако из наблюдений следует, что горизонтальные полуоси эллипсоида меняются со временем. Чтобы удовлетворить условиям принадлежности точке покоя и, одновременно, изменчивости отношения полуосей, мы вынуждены принять, что параметры внешнего фоновое течения сами меняются со временем. И хотя параметры вихря на плоскости $(\varepsilon, \sin 2\theta)$ находятся в точке покоя или вблизи нее, сама эта точка покоя перемещается по линии $\sin 2\theta = 1$, благодаря чему меняется и параметр ε . Чтобы найти связь между характеристиками вихря и внешнего фоновое течения, будем использовать гипотезу о существовании точки покоя. Интегральная кривая, на которой находится точка покоя, имеет минимум в точке пере-

сечения с линией $\sin 2\theta = 1$. Используя это свойство, получим систему уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{e}{\sigma} &= S \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1} + \frac{\gamma \varepsilon - 1}{\sigma \varepsilon + 1} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1} \int_1^\varepsilon \frac{\varphi^2 - 1}{\varphi^2} \frac{K}{2} \times \\ &\times \int_0^\infty \frac{\psi d\psi}{\sqrt{\left(\psi^2 + \left(\varphi + \frac{1}{\varphi}\right)\psi + 1\right)^3 (K^2 + \psi)}} d\varphi, \\ \frac{\gamma}{\sigma(\varepsilon + 1)^2} - \frac{\varepsilon^2 + 1}{(\varepsilon^2 - 1)^2} &\left\{ S + \int_1^\varepsilon \frac{\varphi^2 - 1}{\varphi^2} \frac{K}{2} \times \right. \\ &\times \int_0^\infty \frac{\psi d\psi}{\sqrt{\left(\psi^2 + \left(\varphi + \frac{1}{\varphi}\right)\psi + 1\right)^3 (K^2 + \psi)}} d\varphi + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \frac{K}{2} \int_0^\infty \frac{\psi d\psi}{\sqrt{\left(\psi^2 + \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right)\psi + 1\right)^3 (K^2 + \psi)}} \right\} = 0. \end{aligned} \right. \quad (14)$$

Из первого уравнения системы (14) можно выразить константу интегрирования S :

$$S = \frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon} \left(\frac{e}{\sigma} - \frac{\gamma \varepsilon - 1}{\sigma \varepsilon + 1} \right) - \int_1^\varepsilon \frac{\varphi^2 - 1}{\varphi^2} \frac{K}{2} \times \\ \times \int_0^\infty \frac{\psi d\psi}{\sqrt{\left(\psi^2 + \left(\varphi + \frac{1}{\varphi}\right)\psi + 1\right)^3 (K^2 + \psi)}} d\varphi. \quad (15)$$

Подставив полученное выражение во второе уравнение системы (14) и упростив его, получим соотношение:

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{K}{2} \int_0^\infty \frac{\psi d\psi}{\sqrt{\left(\psi^2 + \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right)\psi + 1\right)^3 (K^2 + \psi)}} + \\ + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\gamma}{\sigma} - \frac{e \varepsilon^2 + 1}{\sigma \varepsilon^2 - 1} \right) = 0. \quad (16)$$

Используем равенство (7) $e = \gamma$, в результате уравнение (16) упростится

$$\left(\varepsilon^2 - 1 \right) \frac{K}{2} \times \\ \times \int_0^\infty \frac{\psi d\psi}{\sqrt{\left(\psi^2 + \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right)\psi + 1\right)^3 (K^2 + \psi)}} - 2 \frac{e}{\sigma} = 0. \quad (17)$$

Полученное уравнение связывает характеристики вихря в точке покоя с характеристиками

фонового течения. Часть характеристик можно измерить, другую часть рассчитать. Например, параметр $\frac{e}{\sigma}$ нельзя измерить непосредственно, для этого следует отдельно определить значение параметров e и σ . Значение параметра e определяется на основе горизонтального сдвига внешнего поля скорости Γ : $e = \frac{1}{2}\Gamma$, последний можно измерить. Величина горизонтального удлинения ϵ также определяется на основе результатов измерений.

В зависимости от того, какой из оставшихся параметров, σ или K , мы решим определять из натурных данных, возможны два подхода к исследованию БКПЮ.

Как известно, параметр сплюснутости вихря K связан с вертикальным размером вихря по формуле (10). Если из результатов наблюдений известны геометрические размеры БКПЮ, на их основе можно определить K . Тогда уравнение (17) можно будет решить относительно параметра σ . При таком подходе можно будет вычислить значение потенциальной завихренности БКПЮ.

Мы пойдем по другому пути. На основе данных наблюдений мы вычислим значение параметра σ . Далее, из уравнения (17) определим параметр K , и на основе полученного значения, по формуле (10) рассчитаем вертикальный размер вихря. Таким образом, вертикальный размер БКПЮ, полученный на основе теории эллипсоидальных вихрей, мы сравним с результатами наблюдений. Если оба значения окажутся близкими, то это позволит сделать вывод о справедливости теории эллипсоидальных вихрей и ее применимости к БКПЮ.

Итак, для получения значения вертикального размера БКПЮ посредством уравнения (17) и формулы (10), нам нужно знать шесть параметров: горизонтальное удлинение ϵ , горизонтальный сдвиг внешнего поля скорости Γ , потенциальную завихренность σ , площадь БКПЮ $S_{\text{БКПЮ}}$, параметр Кориолиса f , частоту Брента–Вайсяля N .

В качестве источников данных возьмем результаты трех различных миссий к Юпитеру: Voyager 1 (1979), Galileo (1996), Cassini (2000).

Часть параметров мы положим неизменными для всех трех миссий. А именно: $N = 0.01 \text{ с}^{-1}$, $f = 0.000135 \text{ с}^{-1}$, $S_{\text{БКПЮ}} = 142 \times 10^6 \text{ км}^2$ [Shetty and Marcus, 2010; Wong et al., 2021].

Оставшаяся пара параметров ϵ и σ будет уникальной для каждой миссии, что позволит получить три разные значения величины вертикального размера.

В каждой миссии осуществлялось измерение горизонтального удлинения БКПЮ: $\epsilon_{\text{Voyager}} = 2.2$, $\epsilon_{\text{Galileo}} = 1.9$, $\epsilon_{\text{Cassini}} = 1.6$ [Shetty and Marcus, 2010].

Значение потенциальной завихренности также определялось в каждой миссии. Но данные по этому параметру представлены в публикациях не в виде конкретного значения, а в виде цветовой (черно–белой) карты БКПЮ с соответствующей палитрой. Для определения среднего значения по всему БКПЮ имеющиеся карты читались попиксельно, в системе RGB определялся цвет каждого пикселя, после чего определялся средний цвет всей карты. Далее на палитре находился соответствующий цвет, что и определяло интегральное значение потенциальной завихренности в соответствующей миссии. Таким образом было получено:

$$\sigma_{\text{Voyager}} \approx 2.0 \times 10^{-5} \text{ с}^{-1} \text{ [Read and Gierarsch, 2006]},$$

$$\sigma_{\text{Galileo}} \approx 2.5 \times 10^{-5} \text{ с}^{-1} \text{ [Choi and Banfield, 2007]},$$

$$\sigma_{\text{Cassini}} \approx 4 \times 10^{-5} \text{ с}^{-1} \text{ [Choi and Banfield, 2007]}.$$

Обратим внимание на то, что со временем потенциальная завихренность БКПЮ не сохраняется, как это закладывается в теории. Вместо этого она со временем нарастает.

Прежде чем перейти к расчету интересующих нас параметров, оценим на основе определенных выше значений внешних параметров число Россби, чтобы быть уверенными в том, что мы остаемся в области справедливости нашей теории. Расчет будем производить согласно соотношению

$$Ro = \frac{\sigma}{f}. \quad (18)$$

Формула (18) дает небольшое завышение Ro по сравнению, например, с соотношением $Ro = \left| \frac{\text{rot}_z \vec{u}}{f} \right|$. Завышение незначительное и учитываться не будет. По формуле (18) имеем: $Ro_{\text{Voyager}} \approx 0.15$, $Ro_{\text{Galileo}} \approx 0.19$, $Ro_{\text{Cassini}} \approx 0.3$. Как видно, для первых двух миссий Ro заметно меньше 1, а в третьем случае Ro_{Cassini} можем считать малым с определенными оговорками. Числа Россби увеличиваются со временем и одновременно увеличивается потенциальная завихренность частиц вихревого ядра. Следует отметить, что согласно использованной нами теории потенциальная завихренность частиц должна сохраняться, поскольку является лагранжевым инвариантом. Однако сами численные значения σ определяются с точностью до $O(Ro)$, поэтому вместо указанных точных значений следует пользоваться диапазонами значений: 1.7–2.3 для миссии Voyager, 2–3 для миссии Galileo, 2.8–5.2 для миссии Cassini. Указанные диапазоны попарно пересекаются, но общего пересечения нет. Следовательно, потенциальная завихренность частиц вихревого ядра действитель-

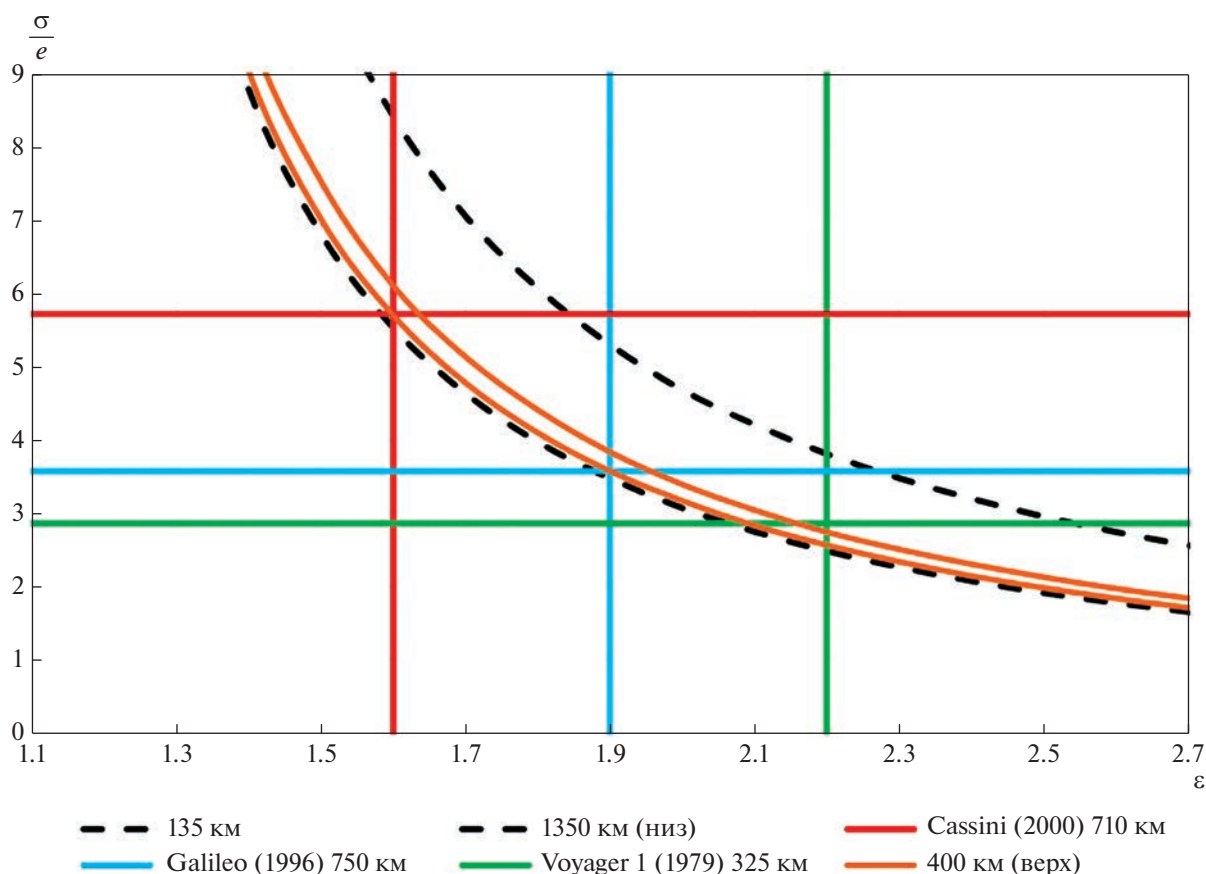


Рис. 2. Графическое представление результатов исследования.

но со временем нарастает. Это может быть связано как с интенсификацией внешнего течения, так и с тем, что в реальном вихре существует подкачка энергии за счет тепловой конвекции снизу, эффект от которой в применяемой нами теории не учитывается. Тем не менее будем считать, что связь параметров вихря и фонового течения при их медленном изменении существует и описывается в рамках прежнего уравнения (17), аналогично тому, как это предполагается для дисперсионного соотношения в адиабатических теориях распространения волн в средах со слабыми гладкими неоднородностями.

Определив все необходимые параметры, мы можем разрешить уравнение (17) относительно K , получим: $K_{\text{Voyager}} = 3.6$, $K_{\text{Galileo}} = 8.25$, $K_{\text{Cassini}} = 7.9$. Используя формулу (10), вычислим значение вертикального размера БКПЮ для каждой миссии: $c_{\text{Voyager}} = 325$ км, $c_{\text{Galileo}} = 750$ км, $c_{\text{Cassini}} = 710$ км. В результате получен средний вертикальный размер БКПЮ $c = 595$ км. Среднеквадратичный разброс составляет величину ± 191 км. Отметим, что в миссии Juno измеренный вертикальный размер выражался двумя значениями — 300 и 500 км, что

вполне соответствует нашим теоретическим расчетам.

Результаты исследования удобно изобразить на плоскости параметров $\left(\varepsilon, \frac{\sigma}{\varepsilon}\right)$, как они представлены на рис. 2. Выделим на рассматриваемой плоскости область, представляющую для нас максимальный интерес. Для этого построим две изолинии вертикального размера, соответствующие 135 км (верхняя) и 1350 км (нижняя). Они отмечены черным штрихом на рис. 2. Следует обратить внимание на то, что распределение значений вертикального размера БКПЮ между двумя построенными изолиниями существенно нелинейно. Для наглядности построим изолинию, которая соответствует значению вертикального размера БКПЮ $c = 400$ км, на рис. 2 это верхняя оранжевая кривая. Отметим на рис. 2 и результаты расчетов вертикального размера для различных миссий: пересечение красных линий — $c_{\text{Cassini}} = 710$ км, пересечение синих линий — $c_{\text{Galileo}} = 750$ км, пересечение зеленых линий — $c_{\text{Voyager}} = 325$ км.

Как видно, наилучшее совпадение с результатами наблюдений получается при $\varepsilon_{\text{Voyager}} = 2.2$,

данные двух других миссий дают чуть большее отличие от имеющихся экспериментальных данных, но они также согласуются с результатами наблюдений.

Пространство между двумя оранжевыми изолиниями можно рассматривать как доверительный интервал. Верхняя соответствует значению 400 км, а нижняя 775 км.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена теория 3D локализованных вихрей с ядром эллипсоидальной формы, примененная для БКПЮ. Модель описывает квазигеострофический бароклинный вихрь в непрерывно стратифицированной вращающейся атмосфере в приближении f -плоскости. Все три размера вихря различные. Сам вихрь находится под действием горизонтального течения со сдвигом. Из всех различных сценариев поведения вихря выбран сценарий стационарного вихря в фоновом течении. Согласно предложенной теории геометрические и динамические характеристики вихря, а также характеристики фонового течения и стратификации среды связаны между собой. Выведено и исследовано уравнение связи этих характеристик. Часть заложенных в модель характеристик измерялась в различных миссиях изучения Юпитера, другая часть может быть рассчитана благодаря этим миссиям или может быть выведена из полученного уравнения связей. В частности, была рассчитана потенциальная завихренность БКПЮ в различные моменты времени периодов осуществления трех миссий Voyager 1 (1979), Galileo (1996), Cassini (2000) и показан ее монотонный рост во времени. Аналогично рассчитывались толщины БКПЮ в тех же миссиях. Теретические оценки вертикального размера вихря оказались равными 710, 750 и 325 км со средним значением $c = 595$ км и среднеквадратичным разбросом ± 191 км. достаточно успешно совпали с измеренными значениями этой величины в миссии Voyager1 (1979).

Работа выполнена в рамках государственного задания № 0128-2021-0002 при финансовой поддержке РФФИ (грант № 22-17-00267).

ПРИЛОЖЕНИЕ

ОЦЕНКА ЗНАЧИМОСТИ β -ЭФФЕКТА ПРИ ОПИСАНИИ БКПЮ

В применяемой нами теории использован закон сохранения потенциальной завихренности (2) без учета β -эффекта. Если учесть β -эффект, то выражение для потенциальной завихренности примет вид

$$\sigma = \Delta_h \psi + \frac{\partial}{\partial z} \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \beta y, \quad (\text{П1})$$

где y — отклонение жидкой частицы в северном направлении от ее начального положения. Значение параметра $\beta = 0.4742 \times 10^{-11} \text{ (м с)}^{-1}$ для широты 22° . Максимальное отклонение с широты 22° на север составляет в разные периоды величину $b = (6-7) \times 10^3$ км. Отсюда следует, что изменение потенциальной завихренности за счет β -эффекта в экстремальном случае при отклонении частицы с широты 22° на расстояние $b = 6 \times 10^3$ км на север составит величину

$$(\delta\sigma)_{\max} = \beta b = 2.84 \times 10^{-5} \text{ с}^{-1}. \quad (\text{П.2})$$

При этом относительное изменение потенциальной завихренности в ядре оценим как

$$\frac{(\delta\sigma)_{\max}}{\sigma + \Gamma} = \frac{\beta b}{\sigma + \Gamma} = \frac{0.284 \times 10^{-4}}{1.05 \times 10^{-4}} = 0.27. \quad (\text{П.3})$$

Здесь $(\sigma + \Gamma) = 1.05 \times 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ — экспериментальная оценка потенциальной завихренности частиц вихревого ядра. Указанная оценка справедлива только для одной частицы, сместившейся с широты 22° и достигшей самой северной точки вихревого ядра. В среднем же по объему эллипсоида частицы отклоняются в северном направлении на величину $\frac{3}{8}b$ (это положение центра тяжести полуэллипсоида). Тогда средняя ошибка по объему ядра

$$|\delta\sigma| = \frac{3}{8} \beta b = 1.07 \times 10^{-5} \text{ с}^{-1} \quad (\text{П.4})$$

и относительная ошибка в определении величины потенциальной завихренности ядра при пренебрежении β -эффектом в среднем составит величину

$$\frac{|\delta\sigma|}{\sigma + \Gamma} = \frac{1.07 \times 10^{-5}}{1.05 \times 10^{-4}} = 0.1. \quad (\text{П.4})$$

Как видим пренебрежение β -эффектом в терминах потенциальной завихренности даст максимальную ошибку 27%, а в среднем по вихрю 10%. Что составляет заметную величину. Поэтому все вышеперечисленные модели БКПЮ используют более точную теорию приближения β -плоскости. Погрешность же применяемой теории как в приближении f -плоскости, так и в приближении β -плоскости составляет величину порядка числа Россби, оценки которого в разные моменты времени составляли величины, лежащие в диапазоне от 0.15 до 0.30. Таким образом, погрешность обеих теорий перекрывает добавочный эффект от уточнения потенциальной завихренности в приближении β -плоскости. И, как следствие, практически из-за погрешности уравнивает подходы f - и β -плоскости. Тем не менее, справедливости ради отметим, что приближение β -плоскости с физической точки зрения описывает более бога-

тый спектр явлений, например, западный дрейф вихря и волны Россби, возникающие при обтекании вихря. Пренебрегая β -эффектом, мы отображаем и эти явления.

Следует также отметить, что со временем вихрь уменьшается в размерах, интенсифицируется по значениям потенциальной завихренности, и этот процесс сопровождается ростом числа Россби.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Антипов С.В., Незлин М.В., Снежкин Е.Н., Трубников А.С. Автосолиитон Россби и лабораторная модель Большого Красного пятна Юпитера // ЖЭТФ. 1985. Т. 89. Вып. 6. С. 1905–1920.
- Волокитин А.С., Красносельских В.В. Вихрь Россби как модель Большого Красного пятна Юпитера // Докл. АН СССР. 1981. Т. 260. 3. С. 588–591.
- Джалилиан П., Лю Т. Аналитическое решение для крупномасштабного вращающегося слоя жидкости с тепловой конвекцией XXI Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2019. Т. 6. С. 3–11.
- Жмур В.В. Мезомасштабные вихри океана. М.: ГЕОС, 2011. 384 с.
- Жмур В.В., Панкратов К.К. Динамика эллипсоидального приповерхностного вихря в неоднородном потоке // Океанология. 1989. Т. 29. № 2. С. 205–211.
- Келлер В.С., Яворская И.М. Моделирование гидродинамических процессов в атмосферах больших планет // Аэромеханика и газовая динамика. М.: Наука, 1976. С. 256–279.
- Кирхгоф Г. Механика. Лекции по математической физике. М.: АН СССР, 1962. Пер. с нем.: Kirchhoff G. Vorlesungen über mathematische Physik. Mechanik, Leipzig, 1874.
- Ларичев В.Д., Резник Г.М. О двумерных уединенных волнах Россби // Докл. АН СССР. 1976. Т. 231. № 5. С. 1077–1079.
- Незлин М.В. Бароклинная модификация баротропной модели Большого Красного пятна Юпитера // Письма в ЖЭТФ. 1981. Т. 34. Вып. 2. С. 83–86.
- Петвиашвили В.И. Красное пятно Юпитера и дрейфовый солитон в плазме // Письма в ЖЭТФ. 1980. Т. 32. Вып. 11. С. 632–635.
- Романова Н.Н., Цейтлин В.Ю. О квазигеострофических движениях в баротропной и бароклинной жидкости // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1984. Т. 20. № 2. С. 15–124.
- Романова Н.Н., Цейтлин В.Ю. Уединенные волны Россби в слабостратифицированной среде // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1985. Т. 21. № 8. С. 810–815.
- Сагдеев Р.З., Шапиро В.Д., Шевченко В.И. Большое красное пятно как синоптический вихрь в юпитерианской атмосфере // Письма в астроном. журн. 1981. Т. 7. Вып. 8. С. 505–509.
- Тихомолов Е.М. Поддержание вихревых структур в подогреваемом снизу вращающемся слое жидкости // Письма в ЖЭТФ. 1994. Т. 59. Вып. 3. С. 155–158.
- Чаплыгин С.А. Собрание сочинений. Т. 2. М.: Гостехиздат, 1948. 643 с.
- Шулейкин В.В. Плоские вихри с эллиптическим ядром на Юпитере (Большое Красное пятно) и на Земле // Астрон. журн. 1976. Т. 20. 4. С. 850–859.
- Beaumont D.N. Solitary waves on an unsymmetrical shear flow with applications to Jupiter's Great Red Spot // Icarus. 1980. V. 41. 3. P. 400–409.
- Bolton S.J., Levin S.M., Guillot T., Li C., Kaspi Y., Orton G., Wong M.H., Oyafuso F., Allison M., Arballo J., Atreya S. Microwave observations reveal the deep extent and structure of Jupiter's atmospheric vortices // Science. 2021. V. 374. Iss. 6570. P. 968–972.
- Bouchet F., Sommeria J. Emergence of intense jets and Jupiter's Great Red Spot as maximum-entropy structures // J. Fluid Mech. 2002. V. 464, P. 165–207.
- Busse F.H. A simple model of convection in the Jovian atmosphere // Icarus. 1976. V. 29. № 2. P. 255–260.
- Busse F.H. Convection driven zonal flows and vortices in the major planets. Chaos. 1994. V. 4. № 2. P. 123–134.
- Chavanis P.H. Statistical mechanics of geophysical turbulence: application to Jovian flows and Jupiter's Great Red Spot // Physica D. 2005. V. 200. Iss. 3–4. P. 257–272.
- Choi D.S., Banfield D. Velocity and vorticity measurements of Jupiter's Great Red Spot using automated cloud feature tracking // Icarus. 2007. V. 188. № 1. P. 35–46.
- Dowling T.E., Ingersoll A.P. Jupiter's Great Red Spot as a shallow water system // J. Atm. Sci. 1989. V. 46. Iss. 21. P. 3256–3278.
- Flierl G.R. Baroclinic solitary waves with radial symmetry // Dynamics of Atmospheres and Oceans. 1979. V. 3. № 1. P. 15–38.
- Williams G.R., Morrison P.J., Vilasur Swaminathan R. // Jovian vortices and jets. 2019. Fluids. V. 4. № 2. P. 104.
- Golitsyn G.S. A similarity approach to the general circulation of planetary atmospheres // Icarus. 1970. V. 13. № 1. P. 1–24.
- Heimpel M.H., Yadav R.K., Featherstone N.A., Aurnou J.M. Polar and mid-latitude vortices and zonal flows on Jupiter and Saturn // Icarus. 2022. V. 379. Iss. 6. P. 114942.
- Hide R. Origin of Jupiter's Great Red Spot // Nature. 1961. V. 190. Iss. 4779. P. 895–896.
- Ingersoll A.P. Inertial Taylor columns and Jupiter's Great Red Spot // J. Atm. Sci. 1969 V. 26. Iss. 4 P. 744–752.
- Jones C.A., Kuzanyan K.M. Compressible convection in the deep atmospheres of giant planets // Icarus. 2009. V. 204(1). P. 227–238.
- Kaspi Y. Inferring the depth of the zonal jets on Jupiter and Saturn from odd gravity harmonics // Geophys. Res. Lett. 2013. V. 40(4). P. 676–680.
- Kaspi Y., Galanti E., Hubbard W.B., Stevenson D.J., Bolton S.J., Iess L., Guillot T., Bloxham J., Connerney J.E.P., Cao H., Durante D. Jupiter's atmospheric jet streams extend thousands of kilometres deep // Nature. 2018. V. 555. Iss. 7695. P. 223–226.
- Marcus P.S. Numerical simulation of Jupiter's Great Red Spot // Nature. 1988. V. 331. Iss. 6158. P. 693–696.
- Marcus P.S., Lee C. 1994. Jupiter's Great Red Spot and zonal winds as a self-consistent, one-layer, quasigeostrophic flow // Chaos. 1994. V. 4. № 2. P. 269–286.

- Maxworthy T., Redekopp L.G. New theory of the Great Red Spot from solitary waves in the Jovian atmosphere // *Nature*. 1976. V. 260. Iss. 5551. P. 509–511.
- Meacham S.P. Quasigeostrophical ellipsoidal vortices in stratified fluid // *Dynamics of Atmospheres and Oceans*. 1992. V. 16. № 3–4. P. 189–223.
- Michel J., Robert R. Statistical mechanical theory of the Great Red Spot of Jupiter // *J. Stat. Phys.* 1994. V. 77(3). P. 645–666.
- Miller J., Weichman P.B., Cross M.C. Statistical mechanics, Euler's equation, and Jupiter's Red Spot // *Phys. Rev. A*. 1992. V. 45(4). P. 2328–2359.
- Pankratov K.K., Zhmur V.V. A dynamics of desingularized quasigeostrophic vortices // *Phys. Fluids A*. 1991. V. 3. P. 1464.
- Parisi M., Kaspi Y., Galanti E., Durante D., Bolton S.J., Levin S.M., Buccino D.R., Fletcher, L.N., Folkner W.M., Guillot T., Helled R. The depth of Jupiter's Great Red Spot constrained by Juno gravity overflights // *Science*. 2021. V. 374. Iss. 6570. P. 964–968.
- Read P.L., Gierasch P.J. Mapping potential–vorticity dynamics on Jupiter. II: the Great Red Spot from Voyager 1 and 2 data // *Q.J.R. Meteorol. Soc.* 2006. V. 132. P. 1605–1625.
- Sagan C. A Truth Table Analysis of Models of Jupiter's Great Red Spot // *Comments Astrophys. Space Phys.* 1971. V. 3. P. 65–72.
- Shetty S., Marcus P.S. Changes in Jupiter's Great Red Spot (1979–2006) and Oval BA (2000–2006) // *Icarus*. 2010. V. 210. № 1. P. 182–201.
- Simon A.A., Tabataba-Vakili F., Cosentino R., Beebe R.F., Wong M.H., Orton, G.S. Historical and contemporary trends in the size, drift, and color of Jupiter's Great Red Spot // *Astron. J.* 2018. V. 155. № 4. P. 151.
- Smoluchowski R. Jupiter's convection and its red spot // *Science*. 1970. V. 168. Iss. 3937. P. 1340–1342.
- Sommeria J., Meyers S.D., Swinney H.L. Laboratory simulation of Jupiter's great red spot // *Nature*. 1988. V. 331. Iss. 6158. P. 689–693.
- Williams G.P., 1979. Ultra-long baroclinic waves and Jupiter's Great Red Spot // *J. Meteorol. Soc. Jpn. Ser. II*. 1979. V. 57(2). P. 196–198.
- Williams, G.P. 1985. Jovian and Comparative Atmospheric Modeling // *In Advances in Geophysics*. V. 28. P. 381–429. Elsevier.
- Williams G.P. 2003. Jet sets // *J. Meteorol. Soc. Jpn. Ser. II*. V. 81(3). P. 439–476.
- Wong M.H., Marcus P.S., Simon A.A., de Pater I., Tollefson J.W., Asay-Davis X. Evolution of the horizontal winds in Jupiter's Great Red Spot from one Jovian year of HST/WFC3 maps // *Geophys. Res. Lett.* 2021. V. 48(18). P. e2021GL093982.
- Yadav R.K., Heimpel M., Bloxham J. Deep convection–driven vortex formation on Jupiter and Saturn // 2020. *Sci. Advances*. 2020. V. 6(46). P. eabb9298.
- Yavorskaya I.M., Belyaev Y.N. On a convective model of Jupiter // *Acta Astronaut.* 1982. V. 9(6–7). P. 481–486.

Baroclinic Model of Jupiter's Great Red Spot

B. P. Suetin¹, V. V. Zhmur^{1, 2, *}, and O. G. Chkhietiani³

¹Moscow Institute of Physics and Technology, Institutskiy per., 9, Dolgoprudny, Moscow Region, 141701 Russia

²Shirshov Institute of Oceanology, Russian Academy of Sciences, Nakhimovskiy prosp., 36, Moscow, 117997 Russia

³Obukhov Institute of Atmospheric Physics, Russian Academy of Sciences, Pyzhevsky per., 3, Moscow, 119017 Russia

*e-mail: zhmur-vladimir@mail.ru

The paper proposes a quasi-geostrophic baroclinic model of Jupiter's Great Red Spot as a localized eddy formation in a continuously stratified rotating atmosphere under the action of a horizontal shear flow in the f-plane approximation. On the basis of the theory of ellipsoidal vortices, an analytical relationship is obtained between the geometric dimensions of the vortex, the potential vorticity of the vortex core, and the characteristics of the background flow. Measurements of a number of characteristics of both the vortex and the background current in the Voyager 1 (1979), Galileo (1996), and Cassini (2000) missions were used. Based on the theory, the vertical size of the Jupiter's Great Red Spot was calculated, which turned out to be close to the same characteristic measured in the Voyager 1 (1979) mission. Based on the theory, an estimate of the vertical size of the Great Red Spot of Jupiter was obtained, which is consistent with the experimental data of the Voyager 1 mission (1979).

Keywords: Jupiter's Great Red Spot (GRS), mesoscale vortex, vertical size of the JR