УДК 551.511.32,551.513,517.938

# НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ВРАЩЕНИЯ ХЕТОННОГО ТИПА

## © 2024 г. М. В. Калашник<sup>а,b,c,\*</sup>

<sup>а</sup> Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН, Пыжевский пер., 3, Москва, 109017 Россия <sup>b</sup>Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, Большая Грузинская, 10, Москва, 123242 Россия <sup>c</sup>Научно производственное объединение "Тайфун" 249038 Обнинск, Калужской обл., ул. Победы, 4

> \**e-mail: kalashnik-obn@mail.ru* Поступила в редакцию 15.01.2024 г. После доработки 21.03.2024 г. Принята к публикации 10.04.2024 г.

Традиционно считается, что в однородной по плотности жидкости осесимметричное баротропное течение с твердотельным вращением устойчиво. В рамках двухуровенной квазигеострофической модели в настоящей работе показано, что это не так в случае бароклинного течения с твердотельным вращением хетонного типа. Такое течение имеет различные направления вращения на двух уровнях. За счет вертикального сдвига скорости, это течение всегда неустойчиво. В работе развита линейная теория неустойчивости таких течений как в модели без трения, так и модели с экмановским трением. Показано, что для неустойчивости в модели с трением горизонтальное волновое число возмущения должно не превосходить некоторое критическое значение. Установлено, что неустойчивость относительно длинноволновых возмущений в модели без трения носит абсолютный характер, т.е. существует всегда. С развитием неустойчивости может быть связано формирование наблюдаемых возмущений в приосевой зоне интенсивных атмосферных вихрей.

Ключевые слова: бароклинная неустойчивость, вертикальный сдвиг скорости, осесимметричные течения, твердотельное вращение, хетоны

**DOI**: 10.31857/S0002351524030011 **EDN: JIJVRI** 

#### 1. ВВЕДЕНИЕ

Одна из центральных проблем геофизической гидродинамики – проблема гидродинамической неустойчивости атмосферных и океанических сдвиговых течений. С развитием неустойчивости связывают образование вихрей различных масштабов – от масштаба отдельного облака до масштаба циклона. Проблеме гидродинамической неустойчивости посвящены многочисленные обзоры и монографии [Pedlosky, 1987; Vallis 2013; Dolzhansky, 2013; Badin, 2013; Sokolovskiy and Verron, 2014; Kalashnik et. al., 2021, 2022]. Широко известны и монографии на русском языке [Дикий, 1976; Шакина, 1990], монография и статьи [Булатов и др., 2015; 2017].

В настоящей работе рассмотрена одна из малоизученных задач теории устойчивости — задача о неустойчивости осесимметричных вихрей с твердотельным вращением. Хорошо известно, что в однородной по плотности жидкости такие баротропные вихри устойчивы. Как показано в настоящей работе, ситуация принципиально меняется для бароклинных вихрей с различным направлением вращения на верхней и нижней границе слоя атмосферы. Такие вихри являются неустойчивыми. В работе получено аналитическое выражение для инкремента нарастания неустойчивых возмущений, исследована его зависимость от внешних параметров. Показано, что для неустойчивости в модели учитывающей экмановское трение, горизонтальное волновое число возмущения должно быть меньше некоторого критического значения. Этот факт приводит к существованию кривой нейтральной устойчивости, разделяющей волновые числа растущих и нейтральных возмущений.

Следует отметить, что бароклинные вихри с различным направлением вращения на двух уровнях в литературе принято называть хетонами. Этот термин был впервые предложен в работе [Hogg and Stommel, 1985], для подчеркивания возможности бароклинных вихрей переносить тепло. Обширный список публикаций, посвященных динамике хетонов, представлен в обзоре [Гряник и др., 2003] и монографии [Sokolovskiy and Verron, 2014].

### 2. ДВУХУРОВЕННАЯ ДИСКРЕТНАЯ КВАЗИГЕОСТРОФИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Для изучения устойчивости вихрей используем дискретный вариант поверхностной геострофической модели (Surface quasigeostrophic (SOG) model). описывающей движения слоя стратифицированной вращающейся жидкости толщины *H* с нулевой потенциальной завихренностью [Blumen, 1978; Held et al., 1995]. Толщина слоя Н принимается в качестве вертикального масштаба. В безразмерных переменных уравнения SOG модели включают уравнение Лапласа для функции тока, к которому присоединяются уравнения переноса плавучести на границах. Используется дискретная аппроксимация оператора Лапласа, включающая разбиение вертикального отрезка интегрирования на четыре отрезка толшины h = 1/4 и привлечение уравнений переноса плавучести на границах. Система уравнений модели имеет вид

$$q_{1t} + [\psi_1, q_1] = 0,$$
  

$$q_{2t} + [\psi_2, q_2] = 0,$$
  

$$q_{1,2} = \Delta \psi_{1,2} \pm (\lambda^2 / 2)(\psi_2 - \psi_1).$$
 (1)

Здесь  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  – значения функции тока на верхней и нижней границах слоя,  $\Delta$  – двумерный оператор Лапласа,  $[a,b] = a_x b_y - a_y b_x$  – двумерный якобиан, параметр  $\lambda^2 = 1/2h^2 = 8$ . Частные производные обозначены нижними буквенными инлексами. В качестве горизонтального масштаба в безразмерных уравнениях модели принят бароклинный радиус деформации Россби D = NH / f, где N – частота Брента, f – параметр Кориолиса. Масштаб времени, функции тока и скорости соответственно  $T_* = D / U_*, \Psi_* = U_* D_H U_* = \Theta_* / N$ , где  $\Theta_*$  — характерное значение перепада плавучести на границах. Безразмерные горизонтальные компоненты скорости и, у связаны с функцией тока  $\psi$  соотношениями  $u = -\psi_v$ ,  $v = \psi_x$ . Плавучесть 9 находится из дискретной аппроксимации соотношения  $\vartheta = \Psi_{\tau}$ .

Уравнения (1) совпадают с уравнениями классической двухуровенной модели Филлипса [Pedlosky, 1987; Phillips, 1954], однако отличаются от нее физической интерпретацией переменных. Распределения PV  $q_1, -q_2$ , на нижнем и верхнем уровнях в модели Филлипса, теперь имеют смысл

удвоенных распределений плавучести на верхней и нижней границах слоя атмосферы. Подробный вывод уравнений (1) представлен в работах [Kalashnik, 2020; Kalashnik et al., 2021, 2022].

Из уравнений (1) следует закон сохранения полной энергии

$$E_t = 0,$$
  

$$E = (1 / 2) \iiint ((\nabla \psi_1)^2 + (\nabla \psi_2)^2 + 4(\psi_2 - \psi_1)^2) d\mathbf{x}, (2)$$
  
**x** = (x, y). Сохраняются также квадратичные ин-  
тегралы

$$(V_{1,2})_t = 0, \ V_{1,2} = \iint q_{1,2}^2 d\mathbf{x},$$
 (3)

отражающие законы сохранения энстрофии в не-прерывной модели.

Отметим, что для характерных значений параметров тропосферы средних широт H = 10 км,  $N = 10^{-2} (\text{сек})^{-1}$ ,  $f = 10^{-4} (\text{сек})^{-1}$ , радиус деформации D = NH / f = 1000 км. Характерному значению скорости  $U_* = 10 \text{ м} / \text{сек}$  отвечает перепад плавучести  $\Theta_* = 10^{-1} \text{ м}(\text{сек})^{-2}$  (перепад потенциальной температуры порядка 3K) и временной масштаб  $T_* = D / U_* = 27.8$  час (порядка суток).

Введением баротропного  $\sigma = (1 / 2)(\psi_1 + \psi_2)$ и бароклинного компонентов  $\theta = (1 / 2)(\psi_2 - \psi_1)$ функции тока, система (1) сводится к системе

$$(\Delta \theta - \lambda^2 \theta)_t + \left[\sigma, \Delta \theta - \lambda^2 \theta\right] + \left[\theta, \Delta \sigma\right] = 0,$$
  
$$(\Delta \sigma)_t + \left[\sigma, \Delta \sigma\right] + \left[\theta, \Delta \theta\right] = 0,$$
 (4)

удобной для анализа задач устойчивости. Будем рассматривать систему (4)

В ЦИлиндрических координатах  $r, \alpha$ , когда  $x = r \cos \alpha$ ,  $y = r \sin \alpha$ . При этом якобиан и двумерный оператор Лапласа определяют-ся выражениями  $[\sigma, \theta] = r^{-1}(\sigma_r \theta_\alpha - \sigma_\alpha \theta_r)$ ,  $\Delta \sigma = \sigma_{rr} + r^{-1}\sigma_r + r^{-2}\sigma_{\alpha\alpha}$ . Не зависящая от угла часть оператора Лапласа определяется как  $\Delta \sigma = \sigma_{rr} + r^{-1}\sigma_r$ . Точное решение системы (4)  $\theta = \overline{\theta}(r), \ \sigma = \overline{\sigma}(r)$  отвечает осесимметричному течению с баротропным и бароклинным составляющими азимутальной компоненты скорости  $V = -\overline{\sigma}_r$ .  $V = \overline{\theta}_r$ . Полная азимутальная компонента скорости течения на двух уровнях определяется выражением  $V_{1,2} = V(r) \mp V(r)$ . Линеаризованная форма системы (4) в цилиндрических координатах имеет вид

$$\begin{aligned} (\Delta\theta' - \lambda^2\theta')_t + r^{-1}(\overline{\sigma})_r (\Delta\theta' - \lambda^2\theta')_{\alpha} - \\ -r^{-1}(\sigma')_{\alpha} (\Delta\overline{\theta} - \lambda^2\overline{\theta})_r + r^{-1}(\overline{\theta})_r (\Delta\sigma')_{\alpha} = 0, \\ (\Delta\sigma')_t + r^{-1}(\overline{\sigma})_r (\Delta\sigma')_{\alpha} - r^{-1}(\sigma')_{\alpha} (\Delta\overline{\sigma})_r + {}^{(5)} \\ + r^{-1}(\overline{\theta})_r (\Delta\theta')_{\alpha} - r^{-1}(\theta')_{\alpha} (\Delta\overline{\theta})_r = 0, \end{aligned}$$

Эта система используется ниже в исследовании устойчивости осесимметричных вихрей.

### 3. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ БАРОКЛИННОГО ВИХРЯ С ТВЕРДОТЕЛЬНЫМ ВРАЩЕНИЕМ

Далее будем рассматривать случай  $\overline{\theta}(r) = Sr^2 / 2 = 0$ ,  $\overline{\sigma}(r) = Br^2 / 2$ , отвечающий ситуации с твердотельным вращением в неограниченной области  $0 < r < \infty$ . Учитывая, что в этом случае  $\Delta \overline{\theta} = 2S$ ,  $\Delta \overline{\theta} - \lambda^2 \overline{\theta} = 2S - \lambda^2 Sr^2 / 2$ ,  $(\Delta \overline{\theta} - \lambda^2 \overline{\theta})_r = -\lambda^2 Sr$ ,  $\overline{\sigma}_r = Br$ ,  $\Delta \overline{\sigma} = 2B$ , из (5) получим систему

$$(\Delta\sigma')_t + B(\Delta\sigma')_{\alpha} + S(\Delta\theta')_{\alpha} = 0,$$

$$(\Delta\theta' - \lambda^2\theta')_t + B(\Delta\theta' - \lambda^2\theta')_{\alpha} + S(\lambda^2\sigma' + \Delta\sigma')_{\alpha} = 0.$$
(6)

Первое уравнение (6) можно сократить на оператор Лапласа. Возможность такого сокращения следует из общей теории гармонических функций — гармоническая функция достигает максимальных и минимальных значений на границе области. Поэтому если она равна нулю на границе, то она равна нулю тождественно. С учетом этого сокращения уравнения (6) примут вид

$$\sigma_t' + B\sigma_\alpha' + S\theta_\alpha' = 0,$$

 $(\Delta\theta' - \lambda^2\theta')_t + B(\Delta\theta' - \lambda^2\theta')_{\alpha} + S(\lambda^2\sigma' + \Delta\sigma')_{\alpha} = 0.$ (7)

Рассмотрим вначале случай баротропного течения, когда S = 0. При этом из (6) получим независимые и распадающиеся уравнения

$$\sigma'_t + B\sigma'_{\alpha} = 0,$$
  
$$(\Delta\theta' - \lambda^2\theta')_t + B(\Delta\theta' - \lambda^2\theta')_{\alpha} = 0.$$
 (8)

Будем искать экспоненциально нарастающие во времени и периодические по азимутальной координате решения вида  $\theta' = \cos n\alpha e^{\gamma t} \tilde{\theta}$ ,  $\sigma' = \cos n\alpha e^{\gamma t} \tilde{\sigma}$ , где  $\gamma$  – инкремент нарастания. Из уравнений (8) для амплитуд, отмеченных волной, получим уравнения

$$\gamma \tilde{\sigma} + Bn \tilde{\sigma} = 0,$$
  
$$\Delta_2 \tilde{\theta} - \lambda^2 \tilde{\theta}) + Bn(\Delta_2 \tilde{\theta} - \lambda^2 \tilde{\theta}) = 0.$$

 $\gamma(\Delta_2 \tilde{\theta} - \lambda^2 \tilde{\theta}) + Bn(\Delta_2 \theta - \lambda^2 \theta) = 0.$  (9) Здесь обозначено  $\Delta_2 \tilde{\theta} = \tilde{\theta}_{rr} + r^{-1} \tilde{\theta}_r - r^{-2} n^2 \tilde{\theta}$  двумерный оператор Лапласа для периодических по углу возмущений. Для инкремента нарастания из (9) получим выражение  $\gamma = -Bn$ . Поскольку  $\gamma < 0$  все возмущения баротропного течения затухают. Здесь мы получили общеизвестный результат.

Рассмотрим теперь основной случай бароклинного течения, когда B = 0. При этом азимутальная компонента скорости  $V_{1,2} = \mp \tilde{V}(r) = \mp Sr$ , т.е. мы имеем течение хетонного типа ( с различ-

ИЗВЕСТИЯ РАН. ФИЗИКА АТМОСФЕРЫ И ОКЕАНА

ным направлением вращения на двух уровнях). Для этого течения система (7) сводится к системе

$$\sigma'_t + S\theta'_{\alpha} = 0,$$
  
$$(\Delta\theta' - \lambda^2\theta')_t + S(\lambda^2\sigma' + \Delta\sigma')_{\alpha} = 0, \qquad (10)$$

которую можно свести к одному уравнению второго порядка по времени относительно  $\theta$ .

$$(\Delta\theta' - \lambda^2\theta')_{tt} - S^2(\lambda^2\theta' + \Delta\theta')_{\alpha\alpha} = 0.$$
(11)

Для отыскания решений полагаем  $\theta' = \cos n\alpha e^{\gamma t} \tilde{\theta}'$ . Тогда

$$\gamma^{2}(\Delta_{2}\tilde{\theta}' - \lambda^{2}\tilde{\theta}') + S^{2}n^{2}(\lambda^{2}\tilde{\theta}' + \Delta_{2}\tilde{\theta}') = 0, \quad (12)$$

где, как и ранее, двумерный оператор Лапласа  $\Delta_2 \tilde{\theta} = \tilde{\theta}_{rr} + r^{-1} \tilde{\theta}_r - r^{-2} n^2 \tilde{\theta}.$ 

Будем искать решения уравнения (12) такие что  $\Delta_2 \tilde{\theta}' = -\mu \tilde{\theta}'$ , или подробнее  $\tilde{\theta}'_{rr} + r^{-1} \tilde{\theta}'_r - r^{-2} n^2 \tilde{\theta}' = -\mu \tilde{\theta}'$ . Замена переменной  $x = \sqrt{\mu}r$  и  $y(x) = \theta'(r) = \theta'(\frac{x}{\sqrt{\mu}})$  приводит последнее уравнение к виду

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}(x\frac{dy}{dx}) + (1 - \frac{n^2}{x^2})y = 0.$$

Решение этого уравнения представляется в терминах функций Бесселя  $y(x) = AJ_n(x)$ . Для переменной  $\tilde{\theta}'$  таким образом получим решение  $\tilde{\theta}' = CJ_n(\sqrt{\mu}r)$ , где *C* произвольная константа, определяемая по начальным данным. Полное представление для возмущения при C = 1, так образом, имеет вид  $\theta' = \cos n\alpha e^{\gamma t} J_n(\sqrt{\mu}r)$ . Величина  $\sqrt{\mu}$  имеет смысл горизонтального (по радиусу) волнового числа.

С учетом приведенного решения, для инкремента нарастания возмущений из (12) следует уравнение  $\gamma^2(-\mu - \lambda^2) + (S^2\lambda^2n^2 - S^2n^2\mu) = 0$ , откуда

$$\gamma^2 = \frac{S^2 n^2 (\lambda^2 - \mu)}{\lambda^2 + \mu}.$$
 (13)

Согласно (13), при  $\mu < \lambda^2$  существует положительное значение  $\gamma$ , отвечающее растущему возмущению. Таким образом, существует неустойчивость относительно длинноволновых (по радиусу) возмущений. При фиксированном значении *n* наибольшую скорость роста имеют возмущения с  $\mu = 0$ . С ростом углового волнового числа *n* инкремент нарастания неограниченно растет. Нейтральной моде (с нулевым инкрементом) отвечает значение  $\mu = \lambda^2$ .

2024

том 60

Nº 3

279

Изолинии бароклинного компонента полной функции тока (среднее течение плюс возмущение) на верхнем уровне для двух моментов времени t = 2 (верх) и t = 3 (низ) представлены на рис. 1. Этот компонент определяется выражением  $\theta = \overline{\theta}(r) + \varepsilon \theta' = Sr^2 / 2 + \varepsilon \theta'$ ,  $\theta' = \cos n\alpha e^{\gamma t} J_n(\sqrt{\mu r}),$ где 3 ампли-Приняты тудный параметр. значения  $S = 2, n = 2, \mu = 2, \epsilon = 0.001$ . Как видно, при потере устойчивости осесимметричного течения формируется система замкнутых вихревых ячеек.

Используя уравнение (11), можно доказать неустойчивость течения с твердотельным вращением в ограниченной области  $0 < r < r_0$ . В этой области, азимутальная и радиальная компоненты скорости в двух слоях выражаются через функцию тока соотношениями

$$u_{\theta} = \frac{\partial \psi_{1,2}}{\partial r} \cdot u_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_{1,2}}{\partial \theta}.$$

С учетом соотношений  $\sigma = (1/2)(\psi_1 + \psi_2)$  и  $\theta = (1/2)(\psi_2 - \psi_1)$ , имеем  $\psi_1 = \sigma - \theta$ ,  $\psi_2 = \sigma + \theta$ . Отсюда следует, что на твердой границе вихря условие отсутствия радиальной компоненты скорости для периодических по углу линейных возмущений сводится к условию  $\theta|_{r=r_0} = 0$ . Для экспоненциально растущих возмущений, при этом, автоматически выполняется условие  $\sigma|_{r=r_0} = 0$ , т.е. условие



**Рис. 1.** Изолинии бароклинного компонента полной функции тока на верхнем уровне для двух моментов времени. По вертикальной и горизонтальной оси отложены безразмерные координаты у и х.

отсутствия радиальной компоненты скорости. Это прямо следует из первого уравнения (10). Как и ранее, линейные возмущения для переменной  $\theta$  удовлетворяют уравнению (11). Полагая здесь  $\theta' = \cos n\alpha e^{\gamma t} \tilde{\theta}'$ , получим уравнение с краевым условием

$$\begin{split} \gamma^2 (\Delta_2 \tilde{\theta}' - \lambda^2 \tilde{\theta}') + S^2 n^2 (\lambda^2 \tilde{\theta}' + \Delta_2 \tilde{\theta}') &= 0, \\ \tilde{\theta}' \Big|_{r=r_0} &= 0. \end{split}$$

С учетом волновых решений этого уравнения и краевого условия, полное возмущение  $\theta'$  представляется в виде  $\theta' = C \cos n\alpha e^{\gamma t} J_n(\sqrt{\mu}r)$ . Из краевого условия  $J_n(\sqrt{\mu}r_0) = 0$  при этом получим  $\sqrt{\mu_k}r_0 = \lambda_k$ , откуда  $\sqrt{\mu_k} = \lambda_k / r_0$ , где  $\lambda_k$  — нули функции Бесселя порядка *n*. Величина  $\sqrt{\infty}$ , имеющая смысл горизонтального (по радиусу) волнового числа, теперь принимает дискретный набор значений. Инкремент нарастания определяется прежним выражением (13), где теперь  $\mu = \mu_k$ . Неустойчивость существует при условии  $\mu_k < \lambda^2$ , которое наиболее легко удовлетворяется для медленно меняющихся по радиусу возмущений.

Таким образом, бароклинное течение, с твердотельным по радиусу вращением и сменой направления вращения на двух вертикальных уровнях оказывается неустойчивым. Неустойчивость возникает исключительно за счет смены знака вращения на вертикальных уровнях, т.е. за счет вертикального сдвига скорости.

### 4. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ВРАЩЕНИЯ В МОДЕЛИ С ЭКМАНОВСКИМ ТРЕНИЕМ

Рассмотрим теперь бароклинное течение в присутствие экмановского трения. Как и течение Колмогорова, это течение является точным решением уравнений динамики только в присутствии внешней силы. Уравнения двухуровенной модели с внешней силой и экмановским трением имеют вид

$$q_{1t} + [\psi_1, q_1] = -R\Delta\psi_1 + F_1, q_{2t} + [\psi_2, q_2] = -R\Delta\psi_2 + F_2, q_{1,2} = \Delta\psi_{1,2} \pm (\lambda^2/2)(\psi_2 - \psi_1),$$
(14)

Здесь  $F_1, F_2$  — компоненты внешней силы, R — коэффициент трения, определенный выражением  $R = (\frac{\nu f}{2U_*^2})^{1/2} \frac{D}{H}$ , где  $\nu$  — коэффициент вертикальной турбулентной вязкости. Подробный вывод уравнений в модели с трением представлен в монографии [Pedlosky, 1987]. Отметим, что коэффициент трения может быть представлен в виде  $R = E^{1/2} / 2Ro$ , где  $E = (h_E / H)^2 - число$ Экмана,  $h_E = (2v / f)^{1/2} - толщина$  экмановского пограничного слоя,  $Ro = U_* / fD - число$ Россби для принятого масштаба скорости. Отметим также, что для приведенных значений параметров и  $h_E = 0.5$  км, коэффициент трения R = 4. При  $U_* = 10$  м/с, число Россби Ro = 0.1.

Введением баротропного  $\sigma = (1 / 2)(\psi_1 + \psi_2)$ и бароклинного компонентов  $\theta = (1 / 2)(\psi_2 - \psi_1)$ функции тока, система (14) теперь сводится к системе

$$(\Delta\theta - \lambda^2\theta)_t + \left[\sigma, \Delta\theta - \lambda^2\theta\right] + \left[\theta, \Delta\sigma\right] = -R\Delta\theta + \tilde{F},$$

$$(\Delta \sigma)_t + [\sigma, \Delta \sigma] + [\theta, \Delta \theta] = -R\Delta \sigma + \overline{F}, \qquad (15)$$

где  $\overline{F} = (1/2)(F_1 + F_2)$  и  $\tilde{F} = (1/2)(F_2 - F_1)$ . Далее будем рассматривать случай  $\overline{F} = 0$  или  $F_1 = -F_2$ . При этом  $\tilde{F} = F_2$ . Бароклинное твердотельное вращение  $\overline{\theta}(r) = Sr^2/2$ ,  $\overline{\sigma} = 0$  является точным решением уравнений (15), если  $R\Delta\overline{\theta} = \overline{F}$ или, с учетом  $\Delta\overline{\theta} = \overline{\theta}_{rr} + r^{-1}\overline{\theta}_r = 2S$ , при внешней силе  $\tilde{F} = 2SR$ . Будем считать последнее равенство выполненным.

Полагаем  $\theta = \overline{\theta}(r) + \theta'$ ,  $\sigma = \overline{\sigma}(r) + \sigma'$ . Линеаризованная система для возмущений в случае  $\overline{F} = 0$  примет вид

$$\sigma'_{t} + S\theta'_{\alpha} = -R\sigma',$$
  
$$\Theta'_{\alpha} \geq 2\Theta'_{\alpha} + S(2^{2}\sigma'_{\alpha} + \Delta\sigma'_{\alpha}) = -R\Delta\Theta'_{\alpha} = 0$$

 $(\Delta \theta' - \lambda^2 \theta')_t + S(\lambda^2 \sigma' + \Delta \sigma')_{\alpha} = -R\Delta \theta'.$  (16) Система (16) получается из системы (10) добав-

лением в правые части диссипативных слагаемых. Обозначая оператор  $L = \partial / \partial t + R$ , первое уравнение (16) можно записать как  $L\sigma' = -S\theta'_{\alpha}$ . Применяя оператор L ко второму уравнению, получим одно уравнение второго порядка  $L(\Delta\theta' - \lambda^2\theta')_t - S^2(\lambda^2\theta' + \Delta\theta')_{\alpha\alpha} = -RL\Delta\theta'$ , или, после арифметических преобразований, уравнение

$$(\Delta\theta' - \lambda^2\theta')_{tt} - S^2(\lambda^2\theta' + \Delta\theta')_{\alpha\alpha} + + 2R(\Delta\theta')_t - R\lambda^2\theta'_t + R^2\Delta\theta' = 0.$$
(17)

Аналогично предыдущему, мы полагаем  $\theta' = \cos n\alpha e^{\gamma t} \tilde{\theta}(r)$ . Тогда с учетом  $\Delta \theta' = \cos n\alpha e^{\gamma t} \Delta_2 \tilde{\theta}$ ,  $\Delta_2 \tilde{\theta} = \tilde{\theta}_{rr} + r^{-1} \tilde{\theta}_r - r^{-2} n^2 \tilde{\theta}$ , для  $\tilde{\theta}(r)$  получим уравнение

$$\gamma^{2}(\Delta_{2}\tilde{\theta} - \lambda^{2}\tilde{\theta}) + S^{2}n^{2}(\lambda^{2}\tilde{\theta} + \Delta_{2}\tilde{\theta}) + R\gamma(2\Delta_{2}\tilde{\theta} - \lambda^{2}\tilde{\theta}) + R^{2}\Delta_{2}\tilde{\theta} = 0.$$
<sup>(18)</sup>

Как и ранее, мы рассматриваем возмущения, для которых  $\Delta_2 \tilde{\theta} = -\mu \tilde{\theta}$  или подроб-

ИЗВЕСТИЯ РАН. ФИЗИКА АТМОСФЕРЫ И ОКЕАНА

нее  $\tilde{\theta}_{rr} + r^{-1}\tilde{\theta}_{r} - r^{-2}n^{2}\tilde{\theta} + \mu\tilde{\theta} = 0$ . При этом  $\tilde{\theta} = CJ_{n}(\sqrt{\mu}r)$ , где  $J_{n}(z)$  — функция Бесселя порядка *n* и *C* — произвольная постоянная интегрирования. Для инкремента нарастания возмущений из (18) получим квадратное уравнение

$$\gamma^{2}(\mu + \lambda^{2}) + \gamma R(2\mu + \lambda^{2}) - S^{2}n^{2}(\lambda^{2} - \mu) + R^{2}\mu = 0.$$
(19)

Возникновению неустойчивости отвечает появления корня этого уравнения с положительной действительной частью. Легко показать, что неустойчивость существует, если для корней уравнения  $\gamma_1, \gamma_2$  выполнено условие  $\gamma_1\gamma_2 < 0$ . С учетом (18) это условие можно записать в виде  $\gamma_1\gamma_2 = -S^2n^2(\lambda^2 - \mu) + R^2\mu < 0$ . Уравнение  $\gamma_1\gamma_2 = 0$ , таким образом, определяет кривую нейтральной устойчивости, связывающей радиальное и азимутальное волновые числа  $\mu$ , *n*. Это уравнение можно записать в виде

$$\mu = \frac{S^2 n^2 \lambda^2}{S^2 n^2 + R^2}.$$
 (20)

График нейтральной кривой (20) для значений параметров  $\lambda^2 = 1/2h^2 = 8$ . S = 2. R = 1, представлен на рис. 2. Существование нейтральной кривой является основной особенностью, вносимой экмановским трением. Нейтральная кривая появляется только в присутствии трения. При R = 0 из (20) следует соотношение  $\mu = \lambda^2$ , которое дает параметры нейтральной моды (13) в модели без трения.

Важно подчеркнуть, что из (20) нельзя однозначно определить параметры наиболее опасного возмущения с максимальной скоростью роста. Видимо, для этого надо рассматривать полную модель с учетом экмановского и внутреннего трения.



**Рис. 2.** Кривая нейтральной устойчивости на плоскости волновых чисел  $m = \mu$  и n для значений параметров  $\lambda^2 = 1/2h^2 = 8$ . S = 2. R = 1.

том 60 № 3 2024

Отметим также, что условие возникновения неустойчивости  $\gamma_1\gamma_2 < 0$  можно записать в виде  $R^2 > \mu^{-1}(S^2n^2(\lambda^2 - \mu))$ . С учетом  $R = E^{1/2} / 2$ Ro это условие дает ограничение сверху на число Россби.

### 5. АБСОЛЮТНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ БА-РОКЛИННОГО ТЕЧЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ДЛИННОВОЛНОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Из уравнений двухуровенной квазигеострофической модели (4) без трения можно получить уравнения, описывающие динамику длинноволновых возмущений. Эти уравнения получаются, если в первом уравнении (4) формально использовать аппроксимацию  $\Delta \theta \ll \lambda^2 \theta$ . При такой аппроксимации первое уравнение (4) сводится к уравнению  $\theta_t + [\sigma, \theta] = 0$ , а второе уравнение не меняется. Длинноволновой вариант уравнений двухуровенной модели, таким образом, сводится к системе уравнений

 $\theta_t + [\sigma, \theta] = 0, \ (\Delta \sigma)_t + [\sigma, \Delta \sigma] + [\theta, \Delta \theta] = 0.$ (21)

Строгий асимптотический вывод уравнений (21) из уравнений непрерывной SQG модели представлен в недавней работе [Kalashnik, 2021]. Полученные в этой работе уравнения, использующие длинноволновые асимптотики решений уравнения Лапласа, отличаются от уравнений (20) лишь численным значением коэффициентов при уравнениях.

Важная особенность системы (21) состоит в том, что из нее следует три квадратичных закона сохранения  $dI_k / dt = 0, k = 1,2,3$ .

$$I_{1} = \left\langle \theta^{2} \right\rangle, \ I_{2} = \left\langle (\nabla \sigma, \nabla \theta) \right\rangle,$$
$$I_{3} = \left\langle \left| \nabla \sigma \right|^{2} - \left| \nabla \theta \right|^{2} \right\rangle.$$
(22)

Здесь для краткости угловыми скобками обозначена операция интегрирования по двумерной области  $\langle a \rangle = \iint a \, dx \, dy$ . Первый закон прямо следует из первого уравнения системы (21). Непосредственно из этого закона следует ограниченность во времени решения для  $\theta$ . Умножение уравнений (21) соответственно на  $\omega = \Delta \sigma$  и  $\theta$ , сложение и интегрирование дает сохранение  $I_2 = -\langle \omega \theta \rangle = \langle (\nabla \sigma, \nabla \theta) \rangle$ . В справедливости третьего закона можно убедиться непосредственно – дифференцируя выражение для  $I_3$  по времени и преобразуя подынтегральные выражения с использованием уравнений (21). Следуя работе [Kalashnik, 2021], можно показать, что законы сохранения (22) есть асимптотические формы законов сохранения (2), (3) полной двухуровенной модели. Обратим внимание, что в отличие от  $I_1$ , законы сохранения  $I_2$ ,  $I_3$  не являются положительно определенными. Это свидетельствует о внутренней неустойчивой динамике системы.

Как и ранее будем рассматривать систему (1) в цилиндрических координатах  $r, \alpha$ , когда  $x = r \cos \alpha$ ,  $y = r \sin \alpha$ . Аналогично предыдущему, при этом якобиан и оператор Лапласа определяются выражениями  $[\sigma, \theta] = r^{-1}(\sigma_r \theta_\alpha - \sigma_\alpha \theta_r)$ ,  $\Delta \sigma = \sigma_{rr} + r^{-1}\sigma_r + r^{-2}\sigma_{\alpha\alpha}$ . Точное решение системы (20)  $\theta = \theta(r)$   $\sigma = \overline{\sigma}(r)$ , отвечает осесимметричному течению с баротропным и бароклинным составляющими азимутальной компоненты скорости  $\overline{V} = -\overline{\sigma}_r$ ,  $\tilde{V} = \overline{\theta}_r$ . Бароклинному течению отвечает значение  $\overline{\sigma}(r) = 0$ . Линеаризованная система для возмущений бароклинного течения примет вид

$$\theta'_{t} - r^{-1}\overline{\theta}_{r}\sigma'_{\alpha} = 0,$$
  
$$(\Delta\sigma')_{t} + r^{-1} \left(\overline{\theta}_{r}(\Delta\theta')_{\alpha} - \theta'_{\alpha}(\Delta\overline{\theta})_{r}\right).$$
(23)

Дифференцируя второе уравнение (23) по времени, получим уравнение  $(\Delta \sigma')_{tt} + r^{-1} (\overline{\theta}_r (\Delta \theta'_t)_{\alpha} - r^{-1} \overline{\theta}_r (\Delta \overline{\theta})_r \sigma'_{\alpha \alpha}) = 0$ . Теперь учтем, что из первого уравнения (23) следует  $\theta'_t = r^{-1} \overline{\theta}_r \sigma'_{\alpha}$ . Подставляя это выражение, окончательно получим одно уравнение для переменной  $\sigma'$ .

$$(\Delta\sigma')_{tt} + r^{-1}\overline{\Theta}_r \Big( (\Delta(r^{-1}\overline{\Theta}_r\sigma'_{\alpha})_{\alpha} - (\Delta\overline{\Theta})_r\sigma'_{\alpha\alpha} \Big).$$
(24)

Данное уравнение удобно преобразовать, фиксируя зависимость от угловой координаты, т.е. полагая  $\sigma' = \sigma(r,t)\cos(n\alpha)$ . Для амплитуды  $\sigma(r,t)$  получим уравнение

$$(\Delta_2 \sigma)_{\tau\tau} + n^2 r^{-1} \overline{\theta}_r \left( \sigma(\Delta_1 \overline{\theta})_r - (\Delta_2 (r^{-1} \overline{\theta}_r \sigma)) \right) = 0, \quad (25)$$
  
где обозначено  $\Delta_2 \sigma = \sigma_{rr} + r^{-1} \sigma_r - n^2 r^{-2} \sigma,$   
 $\Delta_1 \sigma = \sigma_{rr} + r^{-1} \sigma_r.$ 

Рассмотрим в начале частный случай твердотельного вращения  $\overline{\theta}(r) = Sr^2 / 2$ . Учитывая, что в этом случае  $r^{-1}\overline{\theta}_r = S$ ,  $\Delta_1 \overline{\theta} = 2S$ , из (25) получим уравнение  $(\Delta_2 \sigma)_{\tau\tau} - n^2 S^2 \Delta_2 \sigma = 0$ , которое после сокращения на оператор Лапласа  $\emptyset_2$ , примет вид  $\sigma_{\tau\tau} - n^2 S^2 \sigma = 0$ . Это простейшее уравнение имеет растущее решение  $\sigma = Ce^{\gamma t}$ , где квадрат инкремента нарастания  $\gamma^2 = S^2 n^2$ . Легко видеть, что данное значение квадрата инкремента есть предел общего выражения (13) при  $\mu \to 0$ . Длинноволновой вариант модели, таким образом, приводит к асимптотически точному решению. Отметим, что амплитуда *С* в линейном приближении не определена.

Используя уравнение (25) можно доказать абсолютную неустойчивость бароклинных течений, т.е неустойчивость относительно произвольных длинноволновых возмущений и для произвольных профилей скорости. Для доказательства умножим уравнение (25) на *г*о и проинтегрируем результат по частям. После простых преобразований получим соотношение

$$\gamma^2 \int (r\sigma_r^2 + r^{-1}n^2\sigma^2) dr =$$

 $= \int (n^2 r (K\sigma)_r^2 + r^{-2} n^4 K^2 \sigma^2) dr + n^2 \int r K (\Delta_1 \overline{\theta})_r \sigma^2 dr, (26)$ где обозначено  $K = r^{-1} \overline{\theta}_r$ . Обозначим также  $A = n^2 r K (\Delta_1 \overline{\theta})_r \sigma^2 = n^2 \overline{\theta}_r (\Delta_1 \overline{\theta})_r \sigma^2$ . Рассмотрим теперь случай течений, слабо отклоняющихся от твердотельного вращения и таких что  $\overline{\theta}_r = r F(\varepsilon r)$ , где  $\varepsilon$  — малый параметр. Можно показать, что в этом случае  $\overline{\theta}_r (\Delta_1 \overline{\theta})_r = O(\varepsilon) << 1$  и вторым слагаемым в правой части (26) можно пренебречь. При этом из (26) получим соотношение для квадрата инкремента

$$\gamma^{2} = \frac{\int (n^{2}r(K\sigma)_{r}^{2} + r^{-2}n^{4}K^{2}\sigma^{2})dr}{\int (r\sigma_{r}^{2} + r^{-1}n^{2}\sigma^{2})dr}.$$
 (27)

Отсюда следует что  $\gamma^2 > 0$ , т.е всегда существует неустойчивость. В частном случае  $F(\varepsilon r) = e^{-\varepsilon r}$ мы имеем неустойчивость модифицированного бароклинного течения с твердотельным вращением в центре и затухании на периферии  $\tilde{V} = \overline{\Theta}_r = rF(\varepsilon r) = re^{-\varepsilon r}$ . Напомним, что для возникновения неустойчивости течений однородной жидкости необходимо выполнение специальных условий, связанных с наличием точек перегиба на профиле скорости. Как показано выше, неустойчивость осесимметричных бароклинных течений существует всегда. Этот результат можно доказать и используя общее уравнение (17) для длинноволновых возмущений течения в двухуровенной модели с трением. Для таких возмущений можно считать в уравнении (17)  $\Delta \theta' = 0$ . При этом (17) сводится к уравнению

$$(\theta')_{tt} + S^2(\theta')_{\alpha\alpha} + R\theta'_t = 0.$$
(28)

Отыскивая решения (28) вида  $\theta' = \theta'(r,t)\cos(n\alpha)$  получим уравнение  $\theta'_{tt} - n^2 S^2 \theta' + R \theta'_t = 0$ . Если теперь  $\theta' = A e^{\gamma t}$ , то инкремент нарастания  $\gamma$  находится из квадратного уравнения  $\gamma^2 + R \gamma - n^2 S^2 = 0$ , откуда

$$\gamma = -(R / 2) \pm \sqrt{(R / 2)^2 + n^2 S^2}.$$
 (29)

ИЗВЕСТИЯ РАН. ФИЗИКА АТМОСФЕРЫ И ОКЕАНА

Как видно, всегда есть положительный корень  $\gamma$ , отвечающий неустойчивости.

Отметим, что аналогичный результат для плоских бароклинных течений был получен в нашей недавней работе [Kalashnik et. al., 2021].

### 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как известно, в однородной по плотности жидкости баротропное течение с твердотельным вращением устойчиво. В рамках двухуровенной квазигеострофической модели в настоящей работе показано, что это не так в случае бароклинного течения с различным направлением вращения на двух уровнях (течения хетонного типа). За счет разности скоростей по вертикали, такое течение всегда неустойчиво. В работе развита линейная теория неустойчивости таких течений как в модели без трения, так и модели с экмановским трением. Показано, что для неустойчивости в модели с трением горизонтальное волновое число возмущения должно быть меньше некоторого критического значения. Установлено, что неустойчивость относительно длинноволновых возмущений в модели без трения носит абсолютный характер, т.е. существует всегда.

Автор благодарит анонимных рецензентов за полезные замечания.

Работа выполнена при поддержке РНФ (проект № 23-17-00273).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Дикий Л.А. Гидродинамическая устойчивость и динамика атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1976. 107 с.

- Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Волны в стратифицированных средах. М.: Наука, 2015. 735 с.
- Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Внутренние гравитационные волны, возбуждаемые пульсирующим источнико м возмущений // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2015. № 6. С. 26-34.
- Булатов В.В., Владимиров Ю.В., Владимиров И.Ю. Дальние поля поверхностных возмущений от пульсирующего источника в жидкости бесконечной глубины // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2017. № 5. С. 23-29.
- Шакина Н.П. Гидродинамическая неустойчивость в атмосфере. Л.: Гидрометеоиздат, 1990. 309 с.
- *Гряник В.М., Соколовский М.А., Веррон Ж.* Динамика бароклинных вихрей с нулевой суммарной интенсивностью (хетонов) // Сборник "Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей". Москва, Ижевск, 2003. С. 547-622.
- Badin G. Surface semi-geostrophic dynamics in the ocean // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. 2013. V. 107. P. 526–540.

том 60 № 3 2024

- *Blumen W.* Uniform potential vorticity flow: part I. Theory of wave interactions and two dimensional turbulence // J. Atmos. Sci. 1978. V. 35. P 774–783.
- *Dolzhansky F. V.* Fundamentals of Geophysical Hydrodynamics. Springer-Verlag: Berlin Heidelberg, 2013. 272 pp.
- Held I.M., Pierrehumbert R.T., Garner S.T., Swanson K.L. Surface quasi-geostrophic dynamics // J. Fluid Mech. 1995. V. 282. P. 1–20.
- *Hogg N.G., Stommel H.M.* The heton, an elementary between discrete baroclinic geostrophic vortices, and its implications concerning eddy heat flow // Proc. R. Soc. Lond. 1985. V. A 397. P. 1-20.
- *Kalashnik M.V., Chkhetiani O.G., Kurgansky M. V.* Discrete SQG models with two boundaries and baroclinic instability of jet flows // Phys. Fluids. 2021. V. 33. 076608.
- Kalashnik M.V., Kurgansky M.V., Chkhetiani O.G. Baroclinic instability in geophysical fluid dynamics // Phys.-Usp. 2022. V. 65. № 10. P. 1039–1070.

- *Kalashnik M.V., Chkhetiani O.G., Kurgansky. M.V.* Baroclinic instability of spatially-periodic flows in a discrete surface quasi geostrophic model with two levels // Dynamics of Atmospheres and Oceans. 2022. V. 99. 101313.
- *Kalashnik M.V.* Long-wave instabilities in the SQG model with two boundaries // Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics. 2020. https://doi.org/10.1080/03091 929.2020.1831483
- Pedlosky J. Geophysical Fluid Dynamics. Springer-Verlag, Berlin/New York, 1987. 710 pp.
- Phillips N.A. Energy transformation and meridional circulations associated with simple baroclinic waves in a two-level, quasi-geostrophic model // Tellus. 1954. V. 6. P. 273–283.
- Sokolovskiy M.A., Verron J. Dynamics of Vortex Structures in a Stratified Rotating Fluid. Cham, Heidelberg: Springer International Publishing, 2014. 371 pp.
- *Vallis G.K.*. Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics. Cambridge University Press, 2006. 758 pp.

## INSTABILITY OF SOLID-BODY ROTATION OF HETON TYPE M. V. Kalashnik<sup>1,2,3,\*</sup>

<sup>1</sup>Obukhov Institute of Atmospheric Physics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 119017 Russia <sup>2</sup>Schmidt Institute of Physics of the Earth, Russian Academy of Sciences, Moscow, 123995 Russia <sup>3</sup>Research and Production Association Typhoon, Obninsk, Kaluga oblast, 249038 Russia \*e-mail: kalashnik-obn@mail.ru

It is traditionally believed that in a liquid of uniform density, an axisymmetric barotropic flow with solidbody rotation is stable. Within the framework of a two-level quasi-geostrophic model, this work shows that this is not in the case of a baroclinic flow with solid-body rotation of the heton type. Such a flow has different directions of rotation at two levels. Due to the vertical velocity shift, this flow is always unstable. The paper develops a linear theory of the instability of such flows both in a model without friction and in a model with Ekman friction. It is shown that for instability in a model with friction, the horizontal wave number of the disturbance should not exceed a certain critical value. It has been established that instability with respect to long-wave disturbances in the model without friction is absolute in nature, i.e. always exists. The development of instability may be associated with the formation of observed disturbances in the axial zone of intense atmospheric vortices.

Keywords: baroclinic instability, vertical velocity shear, axisymmetric flows, solid-state rotation, hetons