

УДК 532.59: 551.466.3

ДИСПЕРСИОННОЕ СООТНОШЕНИЕ ДЛЯ ВЕТРОВЫХ ВОЛН С УЧЕТОМ ДРЕЙФОВОГО ТЕЧЕНИЯ

© 2024 г. Ю. Ю. Плаксина^{а,*}, А. В. Пуштаев^а, В. И. Родыгин^а,
Н. А. Винниченко^а, А. В. Уваров^а

^аМосковский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Ленинские горы, д. 1, стр. 2, Москва, 119991, Россия

*e-mail: yuplaksina@mail.ru

Поступила в редакцию 11.01.2024 г.

После доработки 17.03.2024 г.

Принята к публикации 10.04.2024 г.

Наличие дрейфового течения осложняет анализ дисперсионного соотношения для ветровых волн. В общем случае это соотношение получается из анализа уравнения Рэлея, которое не имеет для произвольного профиля скорости аналитического решения. В предельном случае, когда длина гравитационно-капиллярной волны существенно меньше характерной толщины течения, можно использовать простое доплеровское приближение. Но в общем случае это приближение не применимо, и требуется учитывать вертикальный профиль горизонтальной скорости до глубины, соответствующей рассматриваемым длинам волн. Профиль дрейфовой скорости определялся методом цифровой трассерной визуализации. Для получения пространственно-временных спектров волн с высоким разрешением по времени и пространству использовался цветной шпирен-метод. Небольшая добавка додецилсульфата натрия позволила оценить влияние растворимых примесей на структуру дрейфового течения и изменить соотношение между толщиной дрейфового слоя и длиной гравитационно-капиллярной волны. В работе применен алгоритм численного расчета дисперсионного соотношения для известного профиля скорости. Показано, что уравнение Рэлея хорошо описывает дисперсионное соотношение в ветровом канале в условиях, когда влияние профиля велико и не сводится к простым доплеровским поправкам. Таким образом, отклонения в получаемых в геофизике дисперсионных соотношениях от простых приближений могут соответствовать разным соотношениям между длинами волн и толщиной дрейфового течения.

Ключевые слова: дисперсионное соотношение, уравнение Рэлея, ветровые волны, метод цифровой трассерной визуализации, цветной шпирен-метод

DOI: 10.31857/S0002351524030024 EDN: IJJDVK

ВВЕДЕНИЕ

Дисперсионное соотношение для гравитационно-капиллярных волн широко используется в различных геофизических приложениях [Голицын, 2013]. Для покоящейся среды такие волны хорошо изучены и результаты эксперимента и теории находятся в хорошем соответствии [Miles, 2001]. Для ветровых волн появляется дрейфовое течение и распространение поверхностных волн описывается уравнением Рэлея. Очевидно, что в случае, когда толщина пограничного слоя в воде велика по сравнению с глубиной возмущений в гравитационно-капиллярной волне, то модернизация уравнения связана с простым учетом эффекта Доплера. В случае, когда толщины сравнимы, учет эффекта сложен и в общем случае аналитическое решение отсутствует. В геофизике, как

правило, ограничиваются двумя предельными случаями, то есть учетом с помощью эффекта Доплера или анализом с помощью дисперсионного соотношения для неподвижной среды. Для объяснения “промежуточных ситуаций” часто рассматривается существование угла между направлением волн и направлением течения (см, например [Tilina et al., 2022]). В то же время, есть и другое объяснение — это изменение соотношения между толщиной дрейфового слоя и длиной гравитационно-капиллярной волны. С точки зрения решения такой задачи можно выделить два подхода. Первый подход, основанный на простом анализе уравнения Рэлея, связан с поиском аналитических решений для некоторых видов профиля скорости [Burns, 1953; Hunt, 1955; Yih, 1972]. Вторым подходом связан с поиском эмпирических соотношений, фиксирующих отклонение эксперимен-

тальных данных от результата для покоящейся среды [Liberzon et al., 2011; Zavadsky et al., 2017]. Очевидны недостатки обоих подходов. В первом случае профили с аналитическими решениями не соответствуют реальным. Во втором не совсем понятно, что будет с поправками при изменении, например, параметров ветрового канала. Сравнение небольших [Longo et al., 2012] и более крупных каналов [Siddiqui et al., 2007] показывает, что параметры дрейфового ветрового течения отличаются очень существенно. Таким образом, эмпирические соотношения не могут описать всю совокупность явлений, а главное — не могут ответить на вопрос о применимости дисперсионного соотношения для ветровых волн в общем случае. В таких условиях оптимальным вариантом для проверки оказывается использование экспериментально измеренного профиля скорости и создание численного алгоритма, который позволяет рассчитать частоту для любого волнового вектора с помощью численного решения уравнения Рэлея [Tagakaki et al., 2020]. С точки зрения эксперимента необходимо определение рельефа волновой поверхности как функции координат и времени и определение профиля скорости. Существуют различные подходы к измерению этих величин. Широко распространенным методом измерения рельефа поверхности является стереосъемка, которая применяется как в натурных [Guimarães et al., 2020], так и в лабораторных [Shemer, 2019] условиях. Менее точным, но более простым методом, позволяющим охватить большие площади, оказывается применение радаров [Kanevsky, 2009; Yang et al., 2022]. Интересно отметить, что при измерении радаром возникает необходимость в двух подгоночных параметрах и они определяются как раз из линейного дисперсионного соотношения либо в пренебрежении доплеровскими эффектами, либо в предположении простого доплеровского сдвига. Используется также вариант с корректировкой этих величин либо за счет введения малой глубины слоя, либо за счет использования предположения о наличии угла между скоростью ветра и направлением распространения волн [Tilinina et al., 2022]. В лабораторных условиях более высокую точность измерений можно получить при фиксации отклонения лучей, преломляющихся на поверхности. Даже использование одного луча дает достаточно много информации с хорошим временным разрешением [Zavadsky et

al., 2017]. Возможно измерение профиля с помощью проволочных датчиков [Troitskaya et al., 2012; Tagakaki et al., 2020], но более перспективным является использование цветного шлирен-метода, впервые предложенного в [Zhang et al., 1994] и реализованного применительно к данной задаче впервые в [Veron et al., 2001]. Такой метод, по сравнению с перечисленными, дает не единичные точки, а большие массивы экспериментальных данных по пространству и времени. В настоящей работе используется модернизация данного метода, повышающая точность измерений [Плаксына и др., 2023].

Измерение профиля скорости дрейфового течения также может проводиться традиционными методами, например, связанными с использованием трубок Пито [Polnikov et al., 2020], или акустической доплеровской велосиметрии [Troitskaya et al., 2012], но в лабораторных условиях более информативным оказывается использование стандартного метода цифровой трассерной визуализации (PIV) [Raffel et al., 2018]. Метод PIV достаточно активно используется для измерений в ветровых каналах [Плаксына и др., 2023; Banner et al., 1998; Siddiqui et al., 2007]. Следует отметить, что для сильных ветровых волн применение метода PIV ограничено из-за турбулизации потока (см, например, [Troitskaya et al., 2012]), но в этом случае нелинейное взаимодействие приводит к невозможности применения уравнения Рэлея и необходимо рассматривать нелинейные поправки, используя существенные упрощения [Simmen et al., 1985; Tagakaki et al., 2020].

Использование ИК-термографии позволяет существенно расширить информацию о приповерхностном течении и может использоваться как для определения скорости поверхности по смещению мелких тепловых структур [Кандауров и др., 2014], так и для исследования вопроса о наличии или отсутствии поверхностной пленки [Плаксына и др., 2023; Veron et al., 2001].

МЕТОДИКА РАСЧЕТА ДИСПЕРСИОННОГО СООТНОШЕНИЯ ПО УРАВНЕНИЮ РЭЛЕЯ

Рассмотрим уравнение Рэлея и алгоритм его численного решения при известном профиле дрейфовой скорости. Стандартный анализ малых возмущений (возмущения скорости в ветровой волне существенно меньше дрейфовой скорости) приводит к уравнению Рэлея [Miles, 2001; Burns,

1953; Yih, 1972; Hunt, 1955], описывающему малые возмущения скорости в приповерхностном слое. Выпишем уравнение для возмущений вертикальной скорости $\tilde{v}$

$$(\omega - kU) \left(\frac{d^2 \tilde{v}}{dz^2} - k^2 \tilde{v} \right) + k \tilde{v} \frac{d^2 U}{dz^2} = 0, \quad (1)$$

которое написано для гармоники возмущений вертикальной скорости

$$\tilde{v}(z) \exp(-i\omega t + ikx), \quad (2)$$

распространяющейся по среде с профилем скорости $U(z)$.

В (1, 2) ω — частота, k — волновой вектор, соответствующий горизонтальному распространению волны по направлению ветра.

Граничные условия для возмущений скорости определяются влиянием силы тяжести и лапласова давления и с учетом вертикального смещения поверхности ξ имеют стандартный вид

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + U(0) \frac{\partial \xi}{\partial x} = v_{z=0} \quad (3)$$

$$p' = -\rho g \xi + \sigma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

где ρ — плотность жидкости, g — ускорение свободного падения, σ — коэффициент поверхностного натяжения, ξ — смещение рельефа по вертикальной оси, p' — возмущение давления. Для замыкания граничных условий необходимо использовать уравнение движения по оси x , выписанное для точки на поверхности $z = 0$:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} p' = -\frac{\partial v_x}{\partial t} - U(0) \frac{\partial v_x}{\partial x} - v \frac{dU}{dz} \quad (4)$$

и уравнение непрерывности

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

где v_x — возмущение скорости по горизонтальной оси. Исключая из (3)–(5) возмущения давления и горизонтальной скорости, из системы (3) получим с учетом разложения по гармоникам, аналогичного (2)

$$\begin{aligned} i(\omega - kU(0)) \tilde{\xi} &= -\tilde{v} \\ -kg \tilde{\xi} - \frac{\sigma k^3}{\rho} \tilde{\xi} &= -i \left(\frac{\omega}{k} - U(0) \right) \frac{d\tilde{v}}{dz} + i \tilde{v} \frac{dU}{dz}. \end{aligned} \quad (6)$$

Система (6) позволяет исключить возмущение вертикального смещения и свести граничные условия к одному уравнению для возмущения вертикальной скорости на поверхности

$$\begin{aligned} \tilde{v} \left(g + \frac{\sigma k^3}{\rho} \right) &= - \left(\frac{\omega}{k} - U(0) \right)^2 \frac{d\tilde{v}}{dz} - \\ &- \tilde{v} \left(\frac{\omega}{k} - U(0) \right) \frac{dU}{dz}. \end{aligned} \quad (7)$$

Уравнение (1) с граничным условием (7) и определяет решение задачи.

Например, при отсутствии дрейфовой скорости $U(z) = 0$, из (1) получим, что

$$\frac{d^2 \tilde{v}}{dz^2} - k^2 \tilde{v} = 0. \quad (8)$$

Решение (8), удовлетворяющее условию сходимости на глубине в приближении глубокой воды:

$$\tilde{v} = v_0 \exp(-kz). \quad (9)$$

Подстановка (9) в (7) приводит к известному дисперсионному соотношению

$$\omega^2 = kg + \frac{\sigma k^3}{\rho}. \quad (10)$$

Это решение определяет первый предел по частотам. Второй предел определяется условием $U(z) = U(0)$. В этом случае условие (9) сохраняется, а подстановка (9) в (7) дает

$$(\omega - kU(0))^2 = kg + \frac{\sigma k^3}{\rho}. \quad (11)$$

Это уравнение дает максимальное значение частоты. В случае сравнимой ширины дрейфового слоя и глубины гравитационно-капиллярных волн возникает промежуточная ситуация, “эффективная скорость” оказывается между нулем и величиной скорости дрейфа на поверхности $U(0)$. По этой причине и частота оказывается между минимальным значением, определяемым (10), и максимальным, определяемым (11). Аналитические решения с различными профилями $U(z)$ можно найти в [Burns, 1953; Hunt, 1955; Yih, 1972].

В рассматриваемых условиях можно использовать методику численного анализа дисперсионного уравнения [Tagakaki et al., 2020]. Уравнение (1) — второго порядка, и для заданной величины волнового вектора необходимо найти такую величину ω , при которой величина $\tilde{v}$ стремится к нулю при удалении на бесконечность по z (будет рассмотрено приближение глубокой воды, соответствующее экспериментальным условиям, расширение задачи на случай произвольной глубины слоя проблемы не представляет). Начальные условия при $z = 0$ определяются (7). Саму величину $\tilde{v}(0)$ можно взять равной единице (в линейном

приближении амплитуда произвольна), а производная удовлетворяет условию (7)

$$\left(\frac{\omega}{k} - U(0)\right)^2 \frac{d\tilde{v}}{dz} = -\left(g + \frac{\sigma k^2}{\rho}\right) \tilde{v} - \tilde{v} \left(\frac{\omega}{k} - U(0)\right) \frac{dU}{dz} \Big|_{z=0}. \quad (12)$$

Задача может быть решена методом Рунге–Кутты с подбором величины ω для заданного волнового вектора k . Полученная величина ω для монотонного профиля скорости лежит в интервале от минимального значения, определяемого (10), до максимального, определяемого (11). Очевидно, что при сложном профиле дрейфового течения (например, со сменой направлений) диапазон изменения частоты может быть шире.

Приведенный алгоритм является общим и позволяет рассчитать дисперсионную кривую при произвольном заданном вертикальном профиле горизонтальной скорости.

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Для сравнения теоретических расчетов дисперсионной кривой с экспериментальными данными были проведены измерения, позволяющие определить необходимые нам параметры ветровых волн. Измерения проводились в ветро-волновом канале из прозрачного оргстекла в слое воды глубиной 29 см при различных скоростях ветра в двух вариантах — в чистой технической воде и при добавлении 0.1 мМ додецилсульфата натрия (SDS). Горизонтальные размеры канала отображены на рис. 1. На этом же рисунке обозначены места, в которых проводились измерения. Обдув поверхности происходил с узкого края через решетку размером 10×15 см, с ячейками 1×1 см. Решетка использовалась для формирования плоскопараллельного воздушного потока на начальном участке канала. Следует отметить, что соотношение глубины канала и размеров фиксируемых волн позволяли применять приближение глубокой воды.

Поля скорости измерялись методом цифровой трассерной визуализации вблизи поверх-

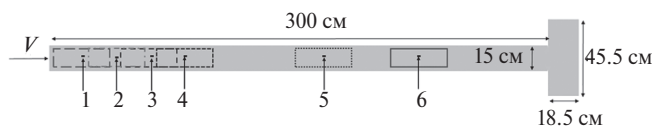


Рис. 1. Схема ветро-волнового канала (вид сверху). 1, 2, 3, 4, 5, 6 — места измерения полей скорости в воде в вертикальной плоскости и скорости ветра термодатчиком РСУ-423 на высоте 1.7 см от уровня невозмущенной поверхности; прямоугольниками обозначены области измерения поля температуры и рельефа поверхности.

ности воды в вертикальных сечениях размером порядка 2×1 см, расположенных в 20, 40, 60, 80, 168 и 224 см от начала канала (см. рис. 1). Съемка велась высокоскоростной камерой с частотой 500 кадров в секунду. Далее поля вертикальной скорости усреднялись по горизонтальной координате и времени (период усреднения 10 с) и получались вертикальные профили горизонтальной составляющей скорости в поверхностном слое воды. По средней горизонтальной скорости на поверхности оценивалась скорость дрейфа поверхности по направлению ветра. Для используемой в работе съемки пространственное разрешение составляло 0.3 мм.

Определение рельефа поверхности в местах, обозначенных на рис. 1 прямоугольниками, проводилось цветным шпирен-методом [Плаксына и др., 2023; Zhang et al., 1994]. Пример результатов измерений приведён на рис. 2.

По полученным полям рельефа поверхности рассчитывался пространственно-временной спектр ветровых волн. Для сравнения с “классическими” методами следует указать, что количество измеряемых точек по пространству велико (примерно 1900 на 700 пикселей) для участка по-

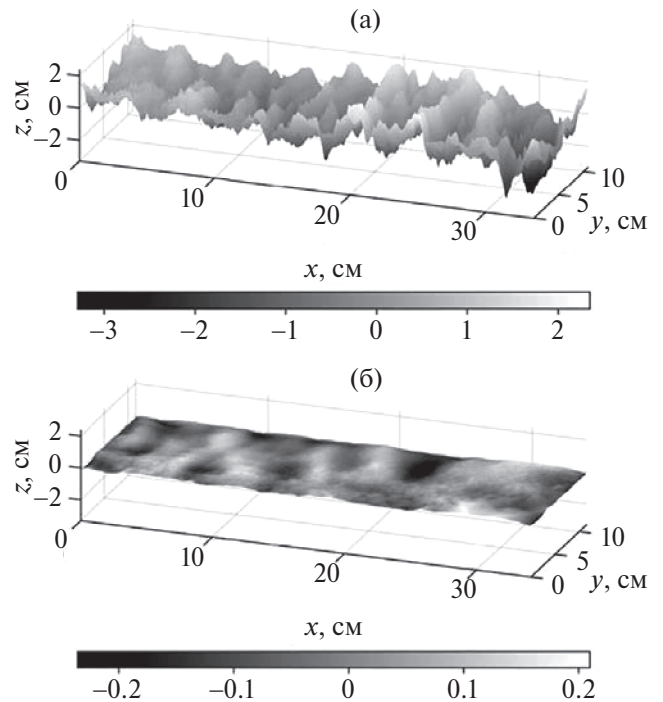


Рис. 2. Примеры измеренных распределений рельефа поверхности в области 2 на рис. 1, при скорости ветра над этой областью 2.7 ± 0.1 м/с: а — в воде, б — в воде с 0.1 мМ SDS (Для наглядности рельеф поверхности окрашен в оттенки серого согласно цветовой шкале соответствующей значениям z).

верхности длиной 40 см и шириной 15 см. В данных измерениях на каждый квадратный сантиметр приходится примерно 2000 пикселей, что позволяет рассматривать длины волн до 0.2 мм. Понятно, что эта величина зависит только от особенностей съемки и размеров матрицы. Частота съемки определяет разрешение по частотам. В нашем случае частоты ограничивались величиной 200 с^{-1} .

С помощью ИК-термографии высокого разрешения тепловизором FLIR SC 7700 (спектральный диапазон 3.7–4.8 мкм, матрица 640×512 пикс) отслеживались термические структуры поверхности воды, по которым определялись наличие или отсутствие пленки естественных примесей на поверхности [Плаксина и др., 2023; Veron et al., 2001].

ЗАВИСИМОСТЬ ДИСПЕРСИОННОГО СООТНОШЕНИЯ В ВЕТРОВЫХ ВОЛНАХ ОТ НАЛИЧИЯ ПРИМЕСИ НА ПОВЕРХНОСТИ ВОДЫ И СКОРОСТИ ВЕТРА

Рассмотрим два типичных спектра ветровых поверхностных волн, полученных экспериментально на основе измерения рельефа поверхности в течении некоторого времени и средней скорости дрейфа. Такой подход позволяет проанализировать задачу даже без знания профиля дрейфового течения. Эти данные вполне доступны и при натурных измерениях. На рис. 3 приведены результаты для воды (скорость обдува $v_{air} = 4.64 \text{ м/с}$, скорость дрейфового течения на поверхности $U_0 = 12.3 \text{ см/с}$) и воды с добавлением SDS (ско-

рость обдува $v_{air} = 4.47 \text{ м/с}$, скорость дрейфового течения на поверхности $U_0 = 28.4 \text{ см/с}$). При данных скоростях область, на которой измеряется рельеф поверхности в воде, свободна от поверхностной пленки, а в воде с добавлением SDS пленка успевает восстанавливаться из объема в процессе движения за счет дрейфового течения. На оба спектра также нанесены дисперсионные кривые $\omega(k)$: сплошная без учета движения поверхности (10), пунктирная с учетом доплеровского сдвига по скорости (11). Из рис. 3 видно, что в воде в рассматриваемом диапазоне волновых векторов толщина дрейфового течения оказывается больше длины волны и результат хорошо описывается доплеровским приближением. Такая ситуация типична для ветровых каналов при использовании чистой воды [Veron et al., 2001; Tagakaki et al., 2020]. При добавлении малой примеси SDS толщина дрейфового течения существенно уменьшается и по графику 3б можно даже определить характерную толщину слоя. Она соответствует таким обратным волновым векторам, при которых начинается смещение с кривой (10) в сторону зависимости (11). Очевидно, что расположение реальной дисперсионной кривой между двумя предельными значениями может трактоваться как изменение угла между течением и ветром (то есть доплеровская добавка берется с некоторым весом, зависящим от угла). Однако рис. 3б свидетельствует, что изменение влияния доплеровской добавки может происходить в рамках одного измерения при увеличении волново-

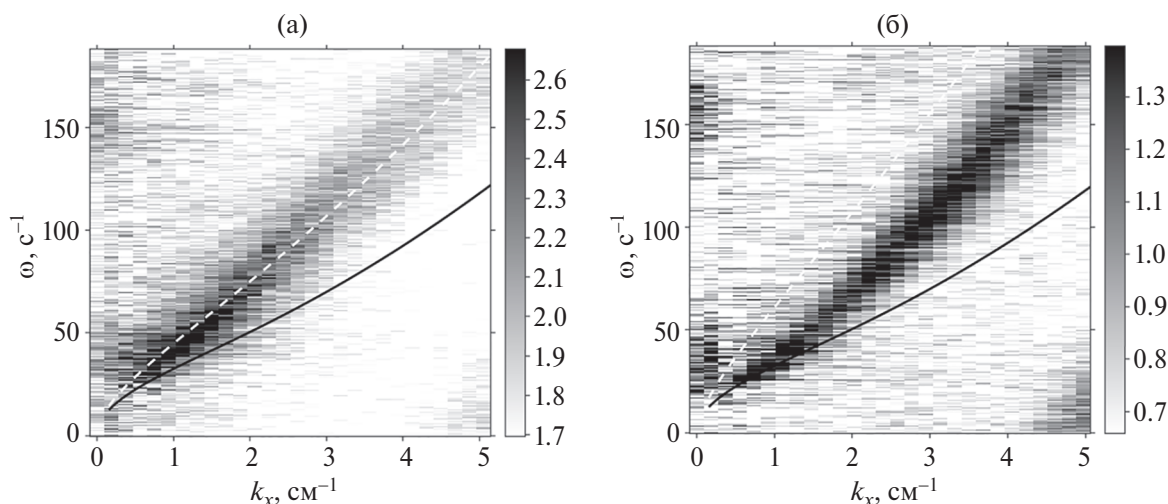


Рис. 3. Сравнительный анализ спектров волн (прямоугольная область вблизи точки 2 на рис. 1): а — вода, б — вода с добавлением SDS. Сплошная и пунктирная кривые — расчеты по формулам (10) и (11) соответственно. Цветовые шкалы показывают десятичные логарифмы амплитуды спектральной плотности.

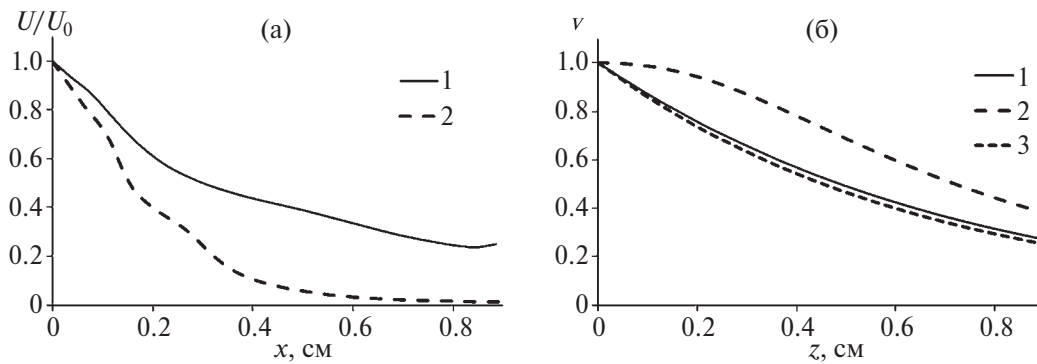


Рис. 4. а – нормированные на скорость дрейфа поверхности вертикальные профили горизонтальной скорости на расстоянии $x = 40$ см (точка 2 на рис. 1), полученные из PIV-измерений для 1 – воды, 2 – воды с SDS; б – зависимость возмущения скорости для $k = 1.52 \text{ см}^{-1}$ от глубины для 1 – воды, 2 – воды с SDS, 3 – “классического” расчета (по формуле (9)).

го вектора k , и такое изменение свидетельствует о влиянии толщины дрейфового течения.

Любой анализ дисперсионного уравнения должен начинаться со сравнения значений $kU(0)$ и ω . Если отношение этих величин существенное в рассматриваемом диапазоне волновых векторов, необходимо учитывать доплеровский сдвиг и проводить анализ толщины дрейфового течения.

Профиль скорости в ветровом канале определяется замыканием течения и наличием двух областей – ветрового погранслоя и обратного течения. Очевидно, что обратное течение не будет влиять на распространение волн при условии, что оно расположено ниже, чем величина $1/k$, определяющая глубину гравитационно-капиллярных поверхностных волн. На рис. 4 представлены типичные профили скорости для воды и воды с добавлением SDS для тех же параметров, как и на рис. 3. Как видно из рис. 4, предварительные выводы о разной толщине дрейфового течения пол-

ностью подтвердились. Сравнение профилей возмущений скорости, полученных из численного расчета и приведенных на рис. 4б для определенного волнового вектора, также подтверждает выдвинутые предположения. Профиль возмущения вертикальной скорости для воды практически совпадает с теоретическим (9), а вот при наличии SDS профиль сильно искажается за счет дрейфового течения, которое сильно меняется на глубине проникновения возмущений скорости.

Рассмотрим теперь, как в итоге меняется дисперсионное соотношение при увеличении скорости обдува в воде и в воде с добавлением SDS. На рис. 5 представлены результаты для разных скоростей обдува на расстоянии 40 см от начала канала для воды, а на рис. 6 – для воды с добавлением SDS. Как видно из представленных рисунков, расчет уравнения Рэлея с учетом реального профиля дрейфовой скорости достаточно точно описывает дисперсионную кривую и практически со-

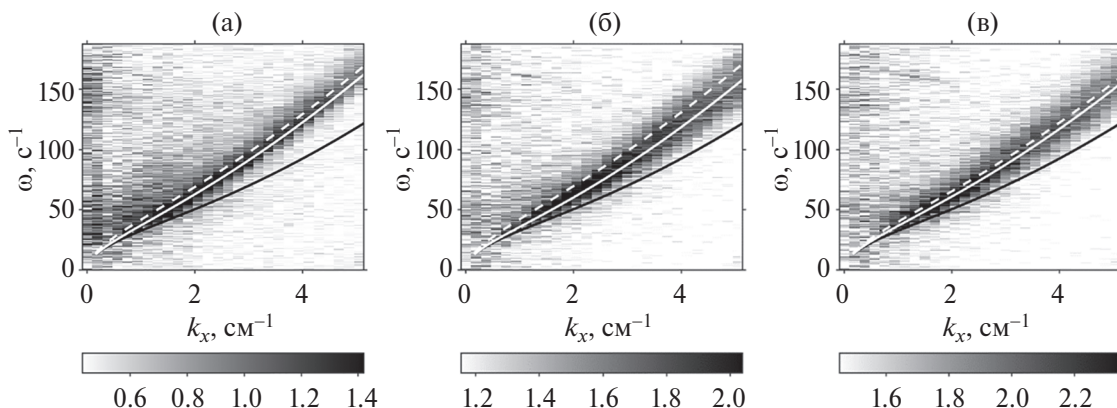


Рис. 5. Дисперсионные кривые для воды на расстоянии 40 см от начала канала. (а) $v_{\text{air}} = 1.49 \text{ м/с}$, $U_0 = 9.24 \text{ см/с}$; (б) $v_{\text{air}} = 2.24 \text{ м/с}$, $U_0 = 9.60 \text{ см/с}$; (в) $v_{\text{air}} = 3.32 \text{ м/с}$, $U_0 = 6.63 \text{ см/с}$. Черная кривая – расчет по формуле (10), пунктирная – расчет по формуле (11), светлая кривая – расчет с учетом профиля скорости. Цветовые шкалы показывают десятичные логарифмы амплитуды спектральной плотности.

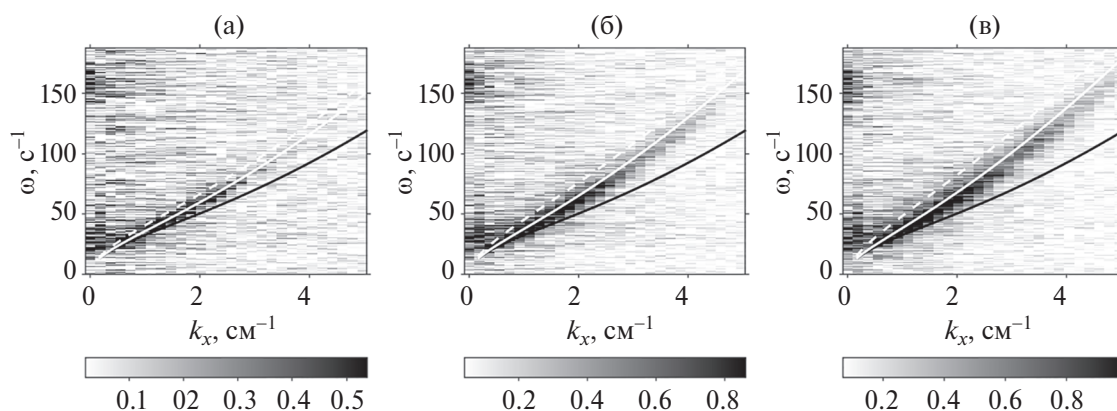


Рис. 6. Дисперсионные кривые для воды с добавлением SDS на расстоянии 40 см от начала канала: а – $v_{air} = 1.34$ м/с, $U_0 = 8.06$ см/с; б – $v_{air} = 2.08$ м/с, $U_0 = 12.8$ см/с; в – $v_{air} = 3.12$ м/с, $U_0 = 19.3$ см/с. Черная кривая – расчет по формуле (10), пунктирная – расчет по формуле (11), светлая кривая – расчет с учетом профиля скорости. Цветовые шкалы показывают десятичные логарифмы амплитуды спектральной плотности.

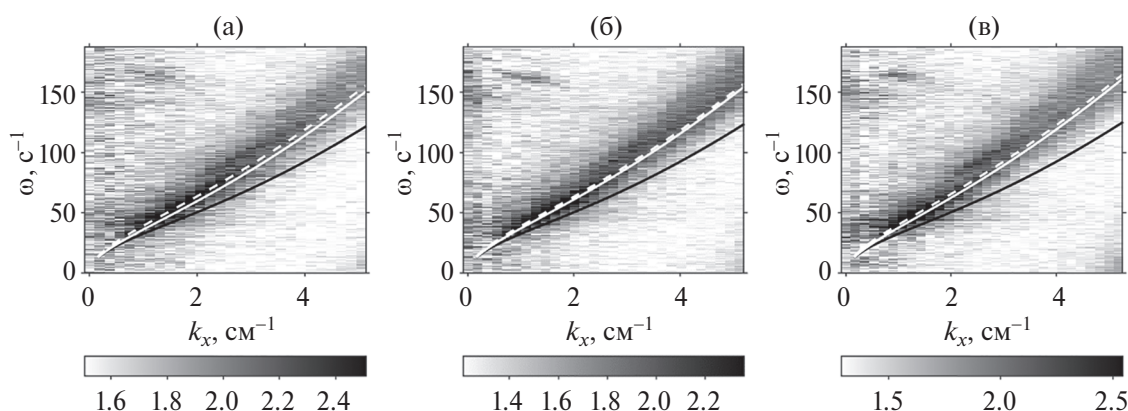


Рис. 7. Зависимость дисперсионного соотношения от расстояния X от начала канала для воды: а – $X = 40$ см, $v_{air} = 2.79$ м/с, $U_0 = 7.43$ см/с; б – $X = 60$ см, $v_{air} = 2.68$ м/с, $U_0 = 6.46$ см/с; в – $X = 80$ см, $v_{air} = 2.52$ м/с, $U_0 = 7.56$ см/с. Черная кривая – расчет по формуле (10), пунктирная – расчет по формуле (11), светлая кривая – расчет с учетом профиля скорости. Цветовые шкалы показывают десятичные логарифмы амплитуды спектральной плотности.

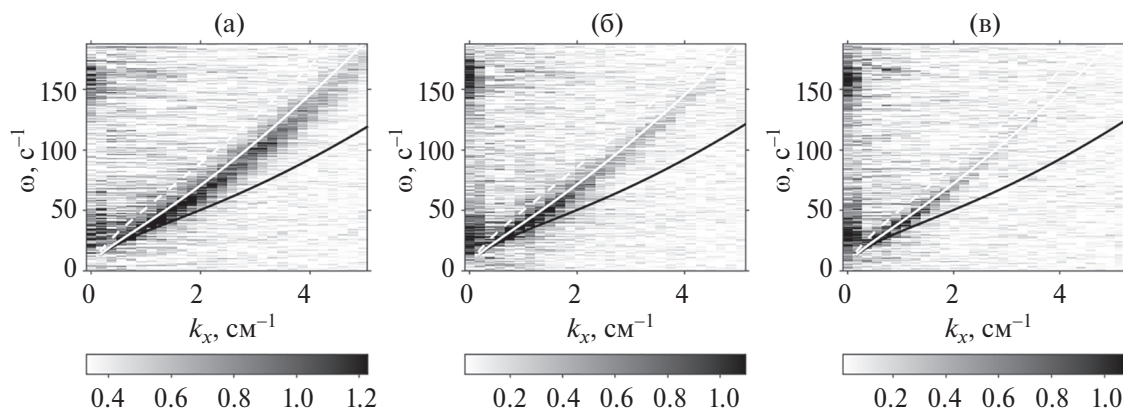


Рис. 8. Зависимость дисперсионного соотношения от расстояния от начала канала для воды с добавлением SDS: а – $X = 40$ см, $v_{air} = 2.60$ м/с, $U_0 = 16.0$ см/с; б – $X = 60$ см, $v_{air} = 2.60$ м/с, $U_0 = 17.7$ см/с; в – $x = 80$ см, $v_{air} = 2.44$ м/с, $U_0 = 18.3$ см/с. Черная кривая – расчет по формуле (10), пунктирная – расчет по формуле (11), светлая кривая – расчет с учетом профиля скорости. Цветовые шкалы показывают десятичные логарифмы амплитуды спектральной плотности.

впадает с экспериментальными данными. Но для воды без добавления SDS дисперсионная кривая не сильно отличается от дисперсионной кривой, рассчитанной с учетом эффекта Доплера, тогда как для воды с добавлением SDS это расхождение значительно. С увеличением k отличие точного решения от классического дисперсионного соотношения, не учитывающего скорость дрейфа, растет очень существенно.

Следует иметь в виду, что применимость уравнения Рэлея ограничивается линейными эффектами. В теории поверхностных волн нелинейность, как правило, связывают с величиной $k\xi$. В данном случае эта величина не превышает в рассматриваемом диапазоне 0.21 для воды и 0.021 для воды с добавлением SDS. То есть в рассматриваемом диапазоне частот при распространении волн в воде с добавлением SDS условие $v \ll U$ выполнено с большим запасом и применение уравнения Рэлея не вызывает вопросов. Для воды эти величины становятся сравнимыми для высоких частот, но уравнение Рэлея продолжает достаточно неплохо описывать дисперсионную кривую, но дает только небольшие поправки к простому доплеровскому сдвигу частоты. Условие малости скорости в гравитационной волне существенно нарушается для сильных ветровых волн [Tagakaki et al., 2020]. В этом случае уравнение Рэлея не выполнено и требуется анализ нелинейных режимов. Такой анализ в настоящее время рассматривался только для определенных типов основного течения (например, линейного [Simmen et al., 1985; Tagakaki et al., 2020]). Но линейный профиль для дрейфового течения в канале мало соответствует реальности.

Рассмотрим теперь зависимость дисперсионного соотношения от расстояния от начала канала. Очевидно, что от расстояния от начала канала зависит амплитуда волн и параметры спектра (см, например, [Мельникова и др., 2012]). В то же время, с точки зрения линейной теории, дисперсионное уравнение должно определяться только профилем скорости. Это свойство хорошо иллюстрируется рис. 7 и 8. На рисунках видно хорошее соответствие линейной теории и эксперимента.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Необходимость учета дрейфового течения при расчете дисперсионных кривых не вызывает сомнений. В то же время точный учет взаимодей-

ствия течения с гравитационно-капиллярной волной в линейном приближении требует решения уравнения Рэлея. С точки зрения анализа уравнения Рэлея существовал большой разрыв между решаемыми модельными задачами и расчетами для реальных профилей течения. В работе рассмотрен алгоритм расчета дисперсионного соотношения, который позволяет строить дисперсионные кривые, исходя из экспериментальных данных для реального профиля дрейфового течения. Основным фактором, определяющим влияние течения, оказывается отношение величины $kU(0)$ к частоте волны ω . Если это отношение достаточно велико — в первую очередь необходимо проанализировать влияние простого доплеровского сдвига, дающего максимальное увеличение частоты. Как показывают наши эксперименты в ветровом канале и данные других авторов, для воды такой расчет оказывается достаточно точным, но такая ситуация вызвана только большой толщиной течения по сравнению с рассматриваемыми длинами волн. В реальных натурных условиях их отношение может быть любым. Еще один вывод работы связан с тем, что малые добавки растворимых примесей резко перестраивают структуру дрейфового течения. Такие добавки не образуют сликов в их классическом понимании, но создают “динамическую пленку“, которая за счет процессов адсорбции—десорбции формирует специфическое дрейфовое течение, достаточно узкое и с малой амплитудой волн на поверхности по сравнению с чистой водой. Очевидно, что и в натурных условиях такой вариант вполне возможен. Представленные результаты указывают на тот факт, что уравнение Рэлея хорошо выполняется и позволяет получить дисперсионное соотношение в общем случае при выполнении линейного приближения. Стандартный анализ дисперсионного соотношения с применением “угла между волной и ветром“, вообще говоря, не обязательно соответствует действительности. Длинноволновые волны имеют значительную глубину проникновения и влияние дрейфовых течений (а точнее, любых течений под поверхностью) может быть велико. Анализ дисперсионного уравнения оказывается полезным инструментом для анализа подповерхностных течений. Применяемая для радарных измерений нормировка по дисперсионному уравнению, вообще говоря, превращается в самосопряженную задачу. Только

решение такой задачи позволит выработать правильные алгоритмы анализа ветрового волнения на основе радарных наблюдений.

БЛАГОДАРНОСТИ

Выражаем благодарность д.ф.-м.н. О. Н. Мельниковой за помощь в организации эксперимента. Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (грант № 22–79–00135). Было использовано оборудование, приобретенное за счет средств Программы развития Московского университета.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Голицын Г. С. Статистика и динамика природных процессов и явлений: Методы, инструментарий, результаты. М.: Красанд, 2013. 400 с.
- Кандауров А. А., Троицкая Ю. И., Сергеев Д. А., Вдовин М. И., Байдаков Г. А. Среднее поле скорости воздушного потока над поверхностью воды при лабораторном моделировании штормовых и ураганных условий в океане // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2014. Т. 50. № 4. С. 455–467.
- Мельникова О. Н., Показеев К. В., Рожновская А. А. Дрейфовая скорость в области усиления ветровых волн // Изв. РАН. Серия физическая. 2012. Т. 76. № 12. С. 1515–1519.
- Плакшина Ю. Ю., Пуштаев А. В., Винниченко Н. А., Уваров А. В. Влияние слабой поверхностной плёнки на возникновение и распространение ветровых волн в канале // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2023. Т. 59. № 5. С. 661–672.
- Banner M. L., Peirson W. L. Tangential stress beneath wind-driven air-water interfaces // J. Fluid Mech. 1998. V. 364. P. 115–145.
- Burns J. C. Long waves in running water // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1953. V. 49. № 4. P. 695–706.
- Guimarães P. V., Arduin F., Bergamasco F., Leckler F., Filipot J. F., Shim J. S., Dulov V., Benetazzo A. A data set of sea surface stereo images to resolve space-time wave fields // Sci. Data 2020. V. 7. № 1. P. 145.
- Hunt J. N. Gravity waves in flowing water // Proc. R. Soc. Lond. A. 1955. V. 231. № 1187. P. 496–504.
- Kanevsky M. B. Radar imaging of the ocean waves. Elsevier, 2008. 195 p.
- Liberzon D., Shemer L. Experimental study of the initial stages of wind waves' spatial evolution // J. Fluid Mech. 2011. V. 681. P. 462–498.
- Longo S., Chiapponi L., Clavero M., Mäkelä T., Liang D. Study of the turbulence in the air-side and water-side boundary layers // Coast. Eng. 2012. V. 69. P. 67–81.
- Miles J. Gravity waves on shear flows // J. Fluid Mech. 2001. V. 443. P. 293–299.
- Polnikov V., Qiao F., Ma H. Surface Drift Currents Induced by Waves and Wind in a Large Tank // J. Phys. Oceanogr. 2020. V. 50. P. 3063–3072.
- Raffel M., Willert C. E., Scarano F., Kähler C. J., Wereley S. T., Kompenhans J. (2007) Particle image velocimetry: a practical guide. Third edition. Springer: Berlin, 2018. 669 p.
- Shemer L. On evolution of young wind waves in time and space // Atmosphere. 2019. V. 10. № 9. P. 562.
- Siddiqui K., Loewen M. R. Characteristics of the wind drift layer and microscale breaking waves // J. Fluid Mech. 2007. V. 573. P. 417–456.
- Simmen J. A., Saffman P. G. Steady deep-water waves on a linear shear current // Studies in Applied Mathematics. 1985. V. 73. № 1. P. 35–57.
- Takagaki N., Suzuki N., Troitskaya Y., Tanaka C., Kandaurov A., Vdovin M. Effects of current on wind waves in strong winds // Ocean Sci. 2020. V. 16. № 5. P. 1033–1045.
- Tilinina N., Ivonin D., Gavrikov A., Sharmar V., Gulev S., Suslov A., Suslov A., Fadeev V., Trofimov B., Bargman S., Salavatova L., Koshkina V., Shishkova P., Ezhova E., Krinitsky M., Razorenova O., Koltermann K. P., Tereschenkov V., Sokov A. Wind waves in the North Atlantic from ship navigational radar: SeaVision development and its validation with the Spotter wave buoy and WaveWatch III // Earth Sys. Sci. Data 2022. V. 14. № 8. P. 3615–3633.
- Troitskaya Y. I., Sergeev D. A., Kandaurov A. A., Baidakov G. A., Vdovin M. A., Kazakov V. I. Laboratory and theoretical modeling of air-sea momentum transfer under severe wind conditions // J. Geophys. Res.: Oceans. 2012. V. 117. № C11. COOJ21.
- Veron F., Melvill W. K. Experiments on the stability and transition of wind-driven water surfaces // J. Fluid Mech. 2001. V. 446. P. 25–65.
- Yang J., Wang C., Tian, Y., Zhou H., Wen B. Wind direction inversion using shore-based UHF radar // IEEE Trans. Geosci. Remote Sens. 2022. V. 60. P. 1–16.
- Yih C. S. Surface waves in flowing water // J. Fluid Mech. 1972. V. 51. № 2. P. 209–220.
- Zavadsky A., Benetazzo A., Shemer L. On the two-dimensional structure of short gravity waves in a wind wave tank // Phys. Fluids. 2017. V. 29. № 1. P. 016601.
- Zavadsky A., Shemer L. Water waves excited by near-impulsive wind forcing // J. Fluid Mech. 2017. V. 828. P. 459–495.
- Zhang X., Cox C. Measuring the two-dimensional structure of wavy water surface optically: A surface gradient detector // Exp. Fluids 1994. V. 7. P. 225–237.
- Zhang X., Dabiri D., Gharib M. Optical mapping of fluid density interfaces: Concepts and implementations // Rev. Sci. Instrum. 1996. V. 67. № 5. P. 1858–1868.

DISPERSION RELATION FOR WIND WAVES WITH ACCOUNT FOR THE DRIFT CURRENT

Yu. Yu. Plaksina^{1,*}, A. V. Pushtaev¹, V. I. Rodygin¹, N. A. Vinnichenko¹, A. V. Uvarov¹

¹*Lomonosov Moscow State University, Leninskiye Gory, 1/2, Moscow, 119991 Russia*

**e-mail: yuplaksina@mail.ru*

Analysis of the wind waves dispersion relation becomes complicated if drift current is present. In general, this relation is derived from the Rayleigh equation, which does not have an analytical solution for an arbitrary velocity profile. In the limiting case, when the gravity-capillary wavelength is small compared to the typical flow depth, the simple Doppler approximation can be used. But in general, this approximation is not valid, and it necessary to take into account the vertical profile of horizontal velocity up to the depth, which corresponds to the considered wavelength. The velocity profile of the drift current is determined using Particle Image Velocimetry. High-resolution spatiotemporal spectra of the waves are obtained with color schlieren technique. Small addition of sodium dodecyl sulfate enabled us to estimate the influence of soluble impurities on the structure of the drift current and modification of the ratio between the drift current depth and the gravity-capillary wavelength. In the present work, an algorithm for numerical calculation of the dispersion relation for a given velocity profile is proposed. It is shown that the dispersion relation for a wind channel is adequately described by Rayleigh equation and the angle between the wave propagation direction and the wind, which is introduced in geophysics for correction of the dispersion relation, may be actually related to different values of the ratio between the wavelength and the drift current depth.

Keywords: dispersion relation, Rayleigh equation, wind waves, Particle Image Velocimetry, color schlieren technique