

УДК 551.465

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦИРКУЛЯЦИИ ЧЕРНОГО МОРЯ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ УРАВНЕНИЙ АДВЕКЦИИ–ДИФФУЗИИ ТЕПЛА И СОЛИ, ОБЛАДАЮЩИХ ДИСКРЕТНЫМИ НЕЛИНЕЙНЫМИ ИНВАРИАНТАМИ

© 2024 г. С. Г. Демьшев^{а, *}, О. А. Дымова^{а, **}

^аМорской гидрофизический институт РАН, ул. Капитанская, 2, Севастополь, 299011 Россия

*e-mail: demyshev@gmail.com

**e-mail: olgdymova@mhi-ras.ru

Поступила в редакцию 29.09.2023 г.

После доработки 14.02.2024 г.

Принята к публикации 28.02.2024 г.

В работе на основе результатов прогностических расчетов анализируется точность воспроизведения циркуляции Черного моря при использовании новых аппроксимаций нелинейных слагаемых в уравнениях переноса, обеспечивающих сохранение температуры и солёности в степени больше двух. Проведено три численных эксперимента, которые отличались схемами расчета температуры и солёности. В первом использовались традиционные схемы, обеспечивающие сохранение температуры и солёности в первой и второй степенях, во втором – сохранялись температура в первой и пятой степени, солёность в первой и третьей, в третьем – температура в первой и третьей, солёность в первой и пятой степени. Расчеты выполнены на основе модели МГИ с разрешением 1.6 км и учетом реалистичного атмосферного форсинга за 2016 г. Валидация результатов проведена на основе сравнения модельных полей с данными контактных и спутниковых измерений температуры и солёности в 2016 г. Анализ средних и среднеквадратических ошибок показал, что по сравнению с традиционной аппроксимацией новые разностные схемы уравнений адвекции-диффузии тепла и соли, обеспечивающие сохранение прогностических параметров в степени больше двух, улучшают точность воспроизведения солёности Черного моря в верхнем 100-м слое в течение всего года. Среднеквадратические ошибки в поле солёности уменьшаются на 15–20%, примерно на 10% точнее моделируются толщина верхнего перемешанного слоя в зимний период и глубина залегания верхней границы слоя скачка температуры летом в центральной части моря. По результатам трех экспериментов наименьшие отклонения от данных наблюдений получены при использовании аппроксимаций, обеспечивающих сохранение температуры в третьей степени и солёности в пятой степени.

Ключевые слова: моделирование, нелинейные инварианты, схемы аппроксимации, Черное море, данные наблюдений, термохалинные характеристики

DOI: 10.31857/S0002351524020096 EDN: KPTCKU

ВВЕДЕНИЕ

Для воспроизведения и исследования трехмерных гидрофизических полей морей и океанов, непрерывных по времени и пространству, преимущественно используются численные модели динамики морской среды. Достоверность результатов расчетов зависит, в том числе, и от свойств разностных схем, на основе которых строятся модели диагноза и прогноза морских течений. Одним из методов уменьшения ошибки моделирования, особенно при длительных интегрированиях, является построение и использова-

ние разностных схем, удовлетворяющих законам сохранения, что по аналогии с непрерывным случаем должно быть связано с инвариантностью системы дискретных уравнений (например, [Самарский и др., 1997; Cheviakov et al., 2020]). Дискретными инвариантами гиперболической системы уравнений динамики океана в адиабатическом приближении и при отсутствии трения, диффузии и внешних источников являются интегралы по объему от плотности, полной (кинетическая плюс потенциальная) энергии, температуры, солёности в степени 2 и более. При нелинейной зависимости плотности от темпера-

туры T и солёности S для сохранения дискретного интеграла от плотности целесообразно использовать такие аппроксимации нелинейных слагаемых, чтобы наряду с T и S сохранялись T^K и S^L , где K и L — целые положительные числа. Наличие дискретных инвариантов T^K и S^L при нелинейном виде уравнения состояния позволяет при указанных условиях сохранять плотность и полную энергию, что повышает устойчивость разностного решения и его близость к точному.

Убедительным практическим примером важности инвариантности дискретных уравнений для атмосферных и океанических моделей служит известная аппроксимация Аракавы—Лэмба [Arakawa et al., 1981], которую удалось обобщить на схему дискретную по пространству и по времени [Sorgentone et al., 2015]. Она обладает двумя квадратичными инвариантами, что обеспечивает сохранение среднего волнового числа, взвешенного по энергии. Этим самым предотвращается передача энергии по спектру в сторону одних масштабов, например, в малые масштабы. Поскольку в численных моделях наиболее короткие волны — двухшаговые, групповая скорость которых нулевая, то используемые схемы с двумя квадратичными законами сохранения препятствуют накоплению энергии на этих масштабах.

Продолжением этих исследований являются работы [Scott et al., 1994; Palha et al., 2017; Головизнин и др., 1998; Goloviznin et al., 2022; Демьшев, 2023]. Для линейных и нелинейных одномерных волновых уравнений на пяти- и девятиточечных шаблонах в [Cheviakov et al., 2020] получены конечно-разностные уравнения, сохраняющие симметрию и законы сохранения. В случае линейного волнового уравнения выписана явная пятиточечная схема, сохраняющая основные геометрические симметрии и шесть соответствующих законов сохранения. Для нелинейных волновых уравнений построена девятиточечная неявная схема, сохраняющая четырёхточечные симметрии и три локальных закона сохранения. В работе [Капцов, 2019] для одномерных уравнений мелкой воды в лагранжевых координатах разработана инвариантная конечно-разностная схема, которая обладает локальными законами сохранения энергии, массы, центра масс и импульса.

Ряд работ посвящен выбору дискретных моделей для уравнений Навье—Стокса, обладающих законами сохранения или инвариантности относительно преобразования координат. В [Scott et al., 1994] рассматриваются двумерные уравнения Навье—Стокса для несжимаемой жидкости, выводятся необходимые и достаточные условия, при которых дискретная аппроксимация удовлетворяет закону сохранения в пространстве сеточных интегрируемых функций. Представлены численные результаты, демонстрирующие способность схемы точно разрешать формирующийся пограничный слой. В работе [Palha et al., 2017] предложена специальная дискретизация двумерных уравнений Навье—Стокса для несжимаемой жидкости, которая в пределе исчезающей диссипации точно сохраняет массу, кинетическую энергию, энтрофию и полную завихренность. Приведены доказательства сохранения точных дискретных свойств и демонстрационные численные тестовые примеры на нерегулярных треугольных сетках.

Уравнения адвекции—диффузии тепла и соли являются неотъемлемой частью моделей динамики морей и океанов, что требует их аккуратной аппроксимации. В оригинальных работах [Головизнин и др., 1998; Goloviznin et al., 2022] для одномерного уравнения переноса разработана и апробирована схема КАБАРЕ, которая представляет собой трехслойную явную разностную схему второго порядка аппроксимации и является точной при числах Куранта 0.5 и 1. Представлены результаты по применению новой малодиссипативной многослойной гидростатической модели, которая описывает динамику жидкости с переменной плотностью и свободной поверхностью. Для решения системы гиперболических уравнений в каждом слое используется явная схема КАБАРЕ. Результаты численных расчетов удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными. В работе [Демьшев, 2023] для уравнения адвекции непрерывного по времени и разностного по пространственным переменным получены схемы, которые обеспечивают сохранение одновременно температуры в первой и в K -й ($K > 1$), солёности в первой и L -й ($L > 1$) степени. Найденные аппроксимации температуры и солёности при полиномиальной зависимости плотности от температуры и солёности

также приводят к дивергентному виду уравнения адвекции плотности. Такой его вид обеспечивает выполнение закона сохранения полной энергии в дискретной постановке.

Цель настоящей работы – оценить точность результатов моделирования при использовании схем, которые обеспечивают сохранение температуры и солёности в первой и в третьей, пятой степенях в сравнении с традиционной аппроксимацией нелинейных слагаемых в уравнениях адвекции–диффузии тепла и соли. На основе сопоставления данных контактных и спутниковых наблюдений с результатами прогностических расчетов циркуляции Черного моря в 2016 г. рассчитаны и проанализированы средние и среднеквадратические ошибки полей температуры и солёности.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Численные эксперименты проведены с использованием нелинейной вихреразрешающей модели Морского гидрофизического института [Демышев и др., 1992; Demyshev et al., 2022]. Модель построена на основе полной системы уравнений термогидродинамики океана в приближении Буссинеска и гидростатики в декартовой системе координат. Уравнение состояния представлено в виде полиномиальной зависимости плотности от температуры и солёности во второй степени. Изменением давления мы пренебрегаем, что допустимо в Черном море вследствие малости его глубины по сравнению с океаном. Вертикальное турбулентное перемешивание описано моделью замыкания Меллора–Ямады 2.5 [Mellor et al., 1982]. В качестве граничных условий на свободной поверхности задаются напряжение ветра, потоки тепла, осадки и испарение. На твердых участках границы задано отсутствие нормальных потоков импульса, тепла и соли, на дне – условие прилипания. В модели учитываются климатический сток рек и водообмен через проливы [Гидрометеорология, 1991]. В начальный момент времени задаются высота уровня моря, температура, солёность и горизонтальная скорость. Один раз в сутки в модели производится усвоение спутниковой температуры поверхности моря [https://data.marine.copernicus.eu/product/SST_BS_SST_

L3S_NRT_OBSERVATIONS_010_013]. Батиметрия бассейна построена на основе цифрового массива глубин EMODnet [https://emodnet.es.europa.eu/geonetwork/srv/eng/catalog.search#/metadata/19f800a9-f0fd-4055-b4cd-90ed156dc7fc]. Конечно-разностная аппроксимация уравнений модели, граничных и начальных условий по пространственным переменным реализована на сетке C и подробно описана в работе [Демышев, 2012]. Для аппроксимации производных по времени используется схема “чехарда” с периодическим подключением схемы Матсуно.

В работе проведено три численных эксперимента при одинаковых начальных и граничных условиях. Для задания потоков импульса, тепла и влаги на поверхности моря использован атмосферный реанализ ERA5 [https://www.ecmwf.int/en/forecasts/dataset/ecmwf-reanalysis-v5]. Начальные поля взяты из физического реанализа Черного моря CMEMS [https://data.marine.copernicus.eu/product/BLKSEA_MULTIYEAR_PHY_007_004/description]. Расчеты выполнены с горизонтальным разрешением 1.64 км, что соответствует примерно $(1/48)^\circ$ долготы и $(1/66)^\circ$ широты, левый нижний узел соответствует точке с координатами 27.34° в.д., 40.81° с.ш. По вертикали задано 27 горизонтов с глубинами 2.5; 5; 10; 15; 20; 25; 30; 40; 50; 62.5; 75; 87.5; 100; 112.5; 125; 150; 200; 300; 400; 500; 700; 900; 1100; 1300; 1500; 1700; 2100 м. Шаг по времени составляет 96 с. Коэффициенты при бигармонических операторах Лапласа, описывающих горизонтальную турбулентную вязкость и диффузию, равны 10^{16} см⁴/с. Коэффициенты вертикальной вязкости и диффузии, изменяющиеся по времени и по глубине, рассчитываются на каждом шаге по времени по [Mellor et al., 1982]. Эмпирические константы в параметризациях вертикального обмена, коротковолновой солнечной радиации на поверхности моря и другие постоянные коэффициенты приведены в Appendix работы [Demyshev et al., 2022]. Численные эксперименты различались аппроксимациями адвективных слагаемых в уравнениях переноса тепла и соли в соответствии с результатами работы [Демышев, 2023] (см. Приложение). В первом расчете T2S2 использовалась традиционная аппроксимация нелинейных слагаемых (П.1), при которой сохранялись T , S и T^2 , S^2 . Во втором эксперименте

T5S3 использовалась схема, сохраняющая T , S и T^5 , S^3 (П.2), что соответствует наибольшим степеням температуры и солёности в рекомендованном ЮНЕСКО уравнении состояния [ИОС, 2010]. В отличие от океана, где плотность в основном определяется температурой и уравнение состояния [ИОС, 2010] представлено в виде полинома с различными степенями по температуре, в Черном море плотность в преобладающей степени зависит от солёности [Булгаков и др., 1984]. Поэтому третий эксперимент T3S5 проводился на основе аппроксимации адвективных слагаемых по формуле (П.3), которая обеспечивает сохранение T , S и T^3 , S^5 . Все расчеты выполнены на один год с 1 января по 31 декабря 2016 г. Выходными данными модели являются среднесуточные поля уровня моря, температуры, солёности и скорости течений.

СОПОСТАВЛЕНИЕ С ДАННЫМИ НАБЛЮДЕНИЙ

Для валидации результатов численных экспериментов использованы данные контактных измерений температуры и солёности, полученные 14-ю буями-профилемерами ARGO [https://www.coriolis.eu.org/Data-Products/Data-selection] и в 87, 89, 91-м рейсах НИС “Профессор Водяницкий” [Артамонов и др., 2018] в 2016 г. Натурные данные имеются за весь 2016 г. и охватывают практически всю глубоководную зону и часть зоны шельфа западнее Крыма. Данные были разделены по вертикальным слоям, районам и сезонам. На рис. 1 представлены карты, показывающие расположение станций измерений для теплого (июнь–август) и холодного (октябрь–декабрь) сезонов.

Для каждого буя/рейса в соответствующий сезон рассчитаны средние (*mean*) и среднеквадратические (*RMSE*) отклонения модельных температуры и солёности от измеренных для каждого из трех экспериментов:

$$mean = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (q_n^{insitu} - q_n^{model}),$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^N (q_n^{insitu} - q_n^{model})^2}{N}},$$

где q – исследуемый параметр по натурным (*in situ*) или модельным (*model*) данным, N – количество измерений. Полученные оценки показывают, что ниже верхнего 300-метрового слоя при изменении степени K и L в уравнениях (П.1)–(П.3) отклонения модельных полей температуры и солёности от измеренных меняются незначительно. Поэтому ниже мы приводим результаты валидации до указанного горизонта. Если в выбранный сезон в определенном районе моря (западная, центральная, восточная части и т.п.) действовало несколько буев, то в табл. 1–4 представлены средние *RMSE* по буям, указанным в заголовках столбцов.

Из анализа *RMSE* и профилей температуры зимой (табл. 1) следует, что в глубоководной части моря (рис. 1а, буи ARGO 3901852, 3901854, 3901855, 6900807, 6901831) модельная толщина верхнего перемешанного слоя больше, чем реальная. В районе свала глубин в зоне действия Основного черноморского течения ОЧТ (рис. 1а, рейс 91, буи 6901832, 6901833) структура модельных профилей качественно похожа на измеренные, однако для всех расчетов слой скачка температуры залегает в среднем на 20 м ниже,

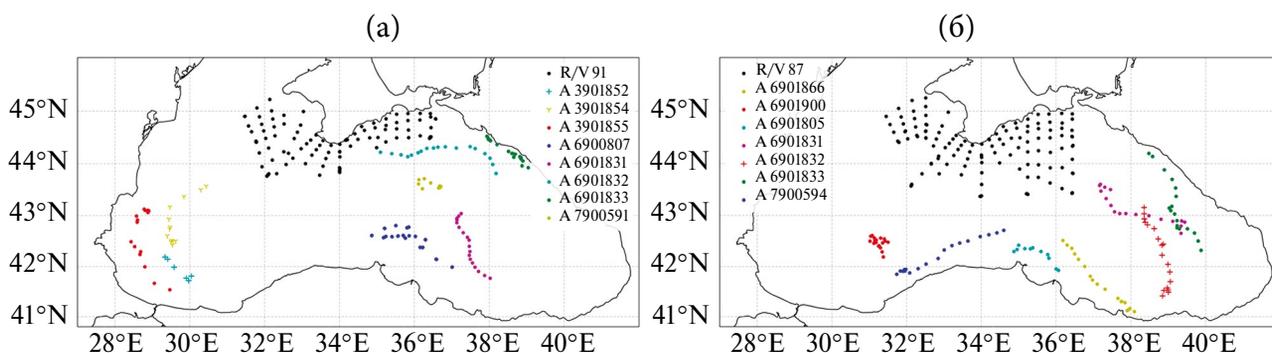


Рис. 1. Карты расположения станций измерений температуры и солёности зимой (а) и летом (б) 2016 г. по данным НИС “Профессор Водяницкий” и буев-профилемеров ARGO.

Таблица 1. *RMSE* температуры и профили температуры в ноябре и декабре 2016 г.

Глубина, м	R/V 91 (16 ноя–3 дек)			A 3901852, 3901854, 3901855 (22 окт–29 дек)			A 6900807, 6901831 (1 окт–30 дек)			A 6901832, 6901833 (1 окт–29 дек)		
	T2S2	T3S5	T5S3	T2S2	T3S5	T5S3	T2S2	T3S5	T5S3	T2S2	T3S5	T5S3
0–5	0.767	0.871	0.718	0.546	0.469	0.351	0.695	0.714	0.631			
5–30	0.792	0.911	0.737	0.715	0.578	0.456	1.022	0.965	1.027	1.053	1.302	1.252
30–100	1.601	0.966	1.018	1.384	0.425	0.603	0.936	0.422	0.581	1.209	0.736	0.880
100–300	0.305	0.342	0.349	0.263	0.277	0.295	0.125	0.259	0.261	0.341	0.338	0.349

Таблица 2. *RMSE* солёности и профили солёности в ноябре и декабре 2016 г.

Глубина, м	R/V 91 (16 ноя–3 дек)			A 3901852, 3901854, 3901855 (22 окт–29 дек)			A 6900807, 6901831 (1 окт–30 дек)			A 6901832, 6901833 (1 окт–29 дек)		
	T2S2	T3S5	T5S3	T2S2	T3S5	T5S3	T2S2	T3S5	T5S3	T2S2	T3S5	T5S3
0–5	0.179	0.142	0.137	0.332	0.181	0.174	0.286	0.165	0.155			
5–30	0.176	0.144	0.138	0.298	0.153	0.183	0.349	0.235	0.203	0.180	0.112	0.130
30–100	0.590	0.531	0.545	0.748	0.481	0.541	0.961	0.911	0.915	0.678	0.583	0.620
100–300	0.653	0.746	0.777	0.558	0.471	0.503	0.403	0.531	0.528	0.619	0.692	0.748

чем по данным наблюдений. При этом разница между результатами трех расчетов наименьшая. В экспериментах T3S5 и T5S3 для всех районов глубина залегания слоя скачка воспроизводится точнее по сравнению с данными T2S2, что демонстрирует величина *RMSE* в слое 30–100 м. Для всех экспериментов в окрестностях слоя 100–150 м обнаруживается ядро вод пониженной температуры (менее 8.5°C), которое в натуральных профилях практически не проявляется.

В поле солёности зимой (табл. 2) наибольшие *RMSE* для всех экспериментов наблюдается в слое 30–100 м в районе свала глубин (рис. 1а, рейсы 91, буи 6901832, 6901833) и слое 100–300 м в глубоководной части моря (рис. 1а, буи ARGO 3901852, 3901854, 3901855, 6900807, 6901831), что связано с отличиями в глубине залегания верхней границы основного галоклина: как видно из поведения профилей, приведенных в табл. 2, для всех станций измерений характерна мень-

Таблица 3. *RMSE* температуры и профили температуры в июне–августе 2016 г.

Глубина, м	R/V 87 (30 июн–18 июл)			A 6901900, 7900594 (1 июн–25 авг)			A 6900805, 6901866 (2 июн–25 июл)			A 6901831, 6901832, 6901833 (2 июн–29 авг)		
	T2S2	T3S5	T5S3	T2S2	T3S5	T5S3	T2S2	T3S5	T5S3	T2S2	T3S5	T5S3
0–5	0.662	1.158	1.379	1.023	1.187	1.419	0.708	0.967	0.912			
5–30	3.026	3.005	3.089	2.970	2.082	2.605	1.143	1.005	1.304	2.862	2.117	2.485
30–100	1.112	1.105	1.079	0.902	0.972	1.028	1.323	1.206	1.177	0.999	0.824	0.883
100–300	0.253	0.254	0.255	0.227	0.249	0.253	0.269	0.295	0.292	0.280	0.279	0.283

Таблица 4. *RMSE* солёности и профили солёности в июне–августе 2016 г.

Глубина, м	R/V 87 (30 июн–18 июл)			A 6901900, 7900594 (1 июн–25 авг)			A 6900805, 6901866 (2 июн–25 июл)			A 6901831, 6901832, 6901833 (2 июн–29 авг)		
	T2S2	T3S5	T5S3	T2S2	T3S5	T5S3	T2S2	T3S5	T5S3	T2S2	T3S5	T5S3
0–5	0.232	0.188	0.217	0.369	0.247	0.294	0.137	0.146	0.146			
5–30	0.184	0.129	0.143	0.216	0.126	0.151	0.110	0.087	0.102	0.231	0.216	0.212
30–100	0.556	0.419	0.422	0.859	0.712	0.777	0.376	0.307	0.302	0.791	0.832	0.830
100–300	0.483	0.557	0.574	0.366	0.403	0.486	0.470	0.462	0.452	0.453	0.716	0.684

шая толщина верхнего перемешанного слоя, чем по данным моделирования. При этом результаты экспериментов T3S5 и T5S3 показывают более близкие к реальности величины солёности, что отражается в величине *RMSE* солёности для верхнего 100-метрового слоя. Наименьшие отклонения модельной солёности для всех экспериментов наблюдаются для юго-западной части моря (рис. 1а, буи ARGO 3901852, 3901854, 3901855) – района с интенсивной струйной ди-

намикой и слабой вихревой изменчивостью в зимний период. Для остальных районов в слое 30–100 м *RMSE* солёности, полученной в экспериментах T3S5 и T5S3, меньше примерно на 20%, чем по данным T2S2, а в слое 100–300 м – наоборот, на 15% больше (табл. 2).

В летний период в Черном море такие факторы, как прогрев вод моря, ослабление ОЧТ и интенсификация вихревой изменчивости, при-

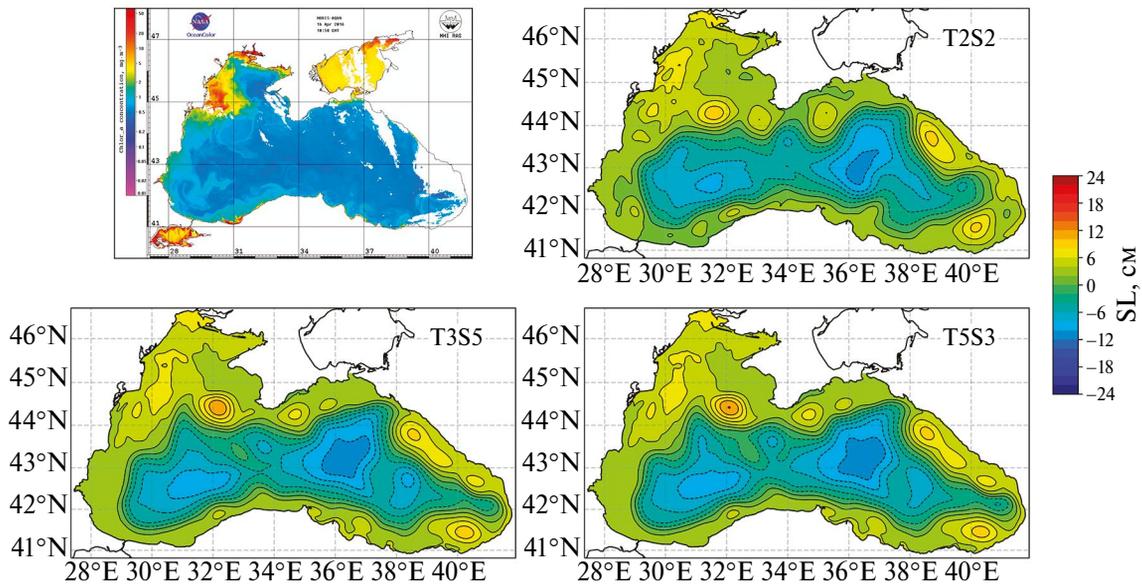


Рис. 2. Снимок концентрации хлорофилла и модельные поля уровня моря 28.04.2016.

водят к значительным вертикальным градиентам температуры и поэтому $RMSE$ температуры увеличивается (табл. 3). Наибольшие $RMSE$ до 3°C в слое 5–30 м наблюдаются в центральной части моря (рис. 16, рейс 87, буи № 6901900, 7900594) и связаны с неточностью воспроизведения глубины залегания верхней границы слоя скачка температуры. Как видно из структуры профилей температуры летом, толщина верхнего квазиоднородного слоя и верхняя граница слоя скачка температуры по данным измерений расположены глубже примерно на 5 м, чем по данным численных экспериментов. При этом величины $RMSE$ в слое 5–30 м мало отличаются между собой. Также относительно большие значения $RMSE$ температуры для всех экспериментов получены в слое 30–100 м, где залегают воды холодного промежуточного слоя (ХПС). Для всех модельных профилей в слое 50–100 м наблюдается ядро ХПС, где значения температуры менее 8.5°C , и которое практически отсутствует в данных наблюдений. Анализ $RMSE$ и модельных профилей температуры показывает, что в летний сезон изменение схемы аппроксимации уравнений адвекции тепла и соли мало влияет на точность воспроизведения полей температуры в верхнем 100-метровом слое.

На всех профилях солёности летом (табл. 4) модельные значения ниже наблюдаемых, т.к. модельная глубина залегания верхней грани-

цы основного галоклина ниже, чем по данным измерений, в среднем на 50 м, что указывает на возможную систематическую ошибку в данных наблюдений. Наибольшие значения $RMSE$ выявлены в слое 30–100 м, где в вертикальной структуре поля солёности присутствуют наибольшие градиенты. При этом в прибрежной и центральной частях моря для экспериментов Т3S5 и Т5S3 $RMSE$ солёности в верхнем 100-метровом слое ниже по сравнению с данными Т2S2. Наименьшая разница между натурной и модельной толщиной основного галоклина обнаружена в центральной глубоководной части моря (рис. 16, буи 6901900, 790059, 46900805, 6901866). Для зоны свала глубин южнее Крыма и в районе побережья Северного Кавказа наблюдаются наибольшие отклонения между модельными и натурными данными. Для верхнего квазиоднородного слоя (0–30 м) результаты экспериментов Т3S5 и Т5S3 демонстрируют лучшее качественное и количественное соответствие с данными измерений: $RMSE$ солёности ниже для всех районов, а для станций по данным рейса 87 и буев 6901900, 7900594 модельное изменение солёности с глубиной качественно соответствует вертикальной структуре реальных профилей.

Таким образом, валидация результатов численных экспериментов показала, что для всех расчетов наблюдается качественное соответствие температуры и солёности данным наблюдений.

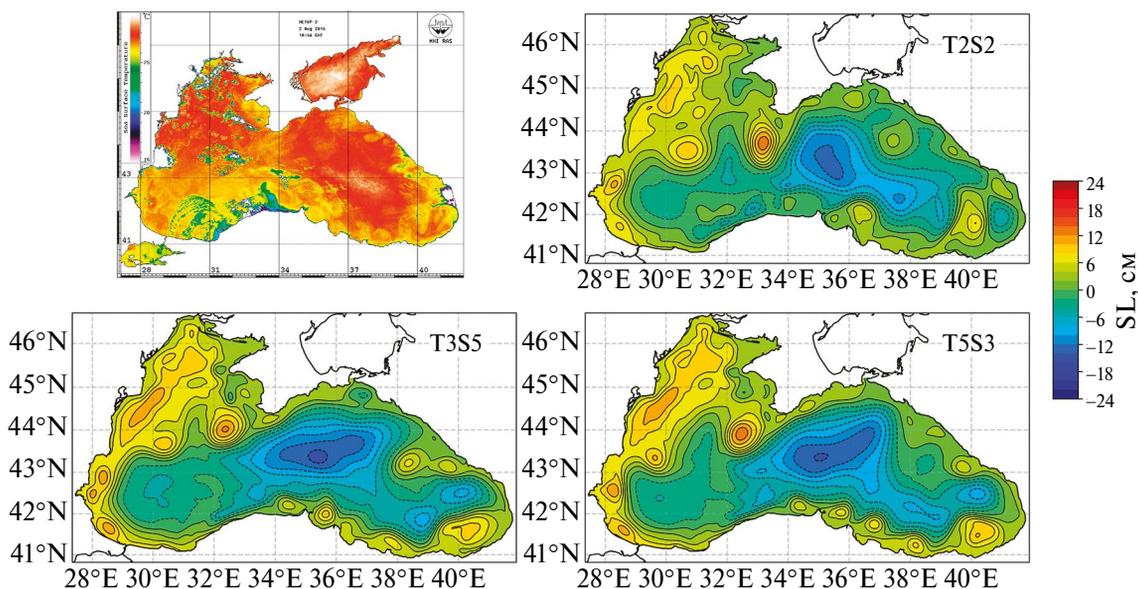


Рис. 3. Снимок температуры поверхности моря и модельные поля уровня моря 02.08.2016.

Количественная разница связана с неточностью воспроизведения толщины верхнего перемешанного слоя зимой и верхнего квазиоднородного слоя летом. Наибольшие значения отклонений от данных наблюдений обнаружены в слоях 5–30 м для температуры и 30–100 м для солёности. Изменение схемы аппроксимации уравнений адвекции-диффузии тепла и соли улучшает точность воспроизведения толщины верхнего перемешанного слоя в зимний период и глубины залегания верхней границы слоя скачка температуры летом в центральной части моря.

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Рассмотрим различия между результатами трех экспериментов. Приведенный уровень моря является важной интегральной характеристикой для анализа эволюции поля течений в верхнем слое, спутниковые данные о котором позволяют оценить соответствие модельных и реальных пространственных особенностей поля течений. Было проведено последовательное по времени сопоставление модельных полей уровня моря и карт альтиметрического уровня, построенных на основе алгоритма [Kubryakov et al., 2012], которые получены в отделе дистанционных методов исследований МГИ РАН. Сравнение показало качественное соответствие между данными альтиметрии и основными динамическими особенностями Черного моря (такими как ОЧТ, Севастопольский и Батумский антици-

клоны) в центральной и западной глубоководных частях моря. Однако в прибрежной зоне, вследствие недостаточного пространственного разрешения данных альтиметрии ($1/8^\circ$), затруднительно оценить мезомасштабную динамику вод. Поэтому для анализа также привлекались спутниковые снимки температуры поверхности моря и концентрации хлорофилла “a” [http://dvs.net.ru/mp/data/main_ru.shtml].

Анализ карт уровня показал, что отличия в результатах проявляются с конца апреля, после прекращения действия зимних ветров, и связаны они с динамикой мезомасштабных антициклонов. Например, на снимке концентрации хлорофилла за 28.04.2016 (рис. 2) наблюдается антициклонический круговорот в окрестностях 31° в.д., который вовлекает шельфовые воды с высокой концентрацией хлорофилла и переносит их в глубоководную зону. Судя по контрастности и форме “языка” вод, орбитальная скорость вихря достаточно высокая. Как видно из рис. 2, в экспериментах T3S5 и T5S3 расположенный в этом районе Севастопольский антициклон более интенсивен: площадь вихря и высота уровня больше по сравнению с экспериментом T2S2.

Характерные для летнего сезона ослабление ОЧТ и усиление мезомасштабной изменчивости проявляются во всех экспериментах. Однако, в эксперименте T2S2 ширина струи больше и ци-

клонический круговорот охватывает меньшую площадь, чем в экспериментах T3S5 и T5S3. Из рис. 3 видно более плотное расположение изолиний уровня над свалом глубин по результатам T3S5 и T5S3, что свидетельствует о более интенсивном течении. Качественное сопоставление карт уровня со спутниковыми данными показывает, что форма и расположение восточного циклонического круговорота в северо-восточной части моря по данным T3S5 и T5S3 соответствует зоне прогретых поверхностных вод между 43° и 45° с.ш. (красная область). Также важным отличием между расчетами в летний сезон является динамика вод около Анатолийского побережья. Типичным примером цепочки прибрежных мезомасштабных вихрей в юго-восточной части моря, существование которых подтверждается многочисленными наблюдениями [Akriņag et al., 2022], являются вихревые структуры на снимке температуры поверхности на рис. 3 между 34° и 39° в.д. Сравнение пространственного положения изолиний уровня и снимка на рис. 3 подтверждает, что эксперимент T5S3 дает результаты наиболее близкие к реальной картине. Также на рис. 3 в поле температуры видны два прибрежных вихря около Новороссийска, черты которых можно обнаружить в экспериментах T5S3 и T3S5. В окрестностях 40° в.д. в поле температуры прослеживается Батумский антициклон, воспроизводимый в результатах численных экспериментов, по периферии которого наблюдаются циклонические вихри.

Далее со временем наибольшие отличия в поле уровня проявляются в структуре ОЧТ и динами-

ке Севастопольского и Батумского антициклонов. В октябре–ноябре ширина ОЧТ в западной и южной частях моря в эксперименте T2S2 больше, следовательно, здесь круговорот менее интенсивен. Севастопольский антициклон стационарируется на кромке Северо-западного шельфа, однако, если в эксперименте T2S2 он ослабевает, то по данным T3S5 и T5S3 наоборот интенсифицируется. Во всех экспериментах Батумский антициклон сопровождается циклоническим круговоротом, который наиболее интенсивен в T2S2. При этом на спутниковых снимках интенсивный циклон в этом районе не наблюдался.

Помимо карт поля уровня об усилении интенсивности циркуляции в экспериментах T3S5 и T5S3 также свидетельствует и изменение кинетической энергии течений. На рис. 4 представлен временной ход средней в верхнем модельном слое плотности кинетической энергии. Как видно из рис. 4, начиная с мая, кинетическая энергия, а следовательно, и скорость течений в верхнем слое для эксперимента T2S2 меньше, чем в двух других расчетах. Так как постановка численных экспериментов и граничные условия для всех расчетов одинаковые, то, по-видимому, использование аппроксимаций, обеспечивающих сохранение температуры и солёности в степенях больше двух, приводит к более интенсивной циркуляции, что соответствует реальным измерениям скорости течений [Артамонов и др., 2018].

Как было показано выше, значимые отличия в результатах моделирования температуры и со-

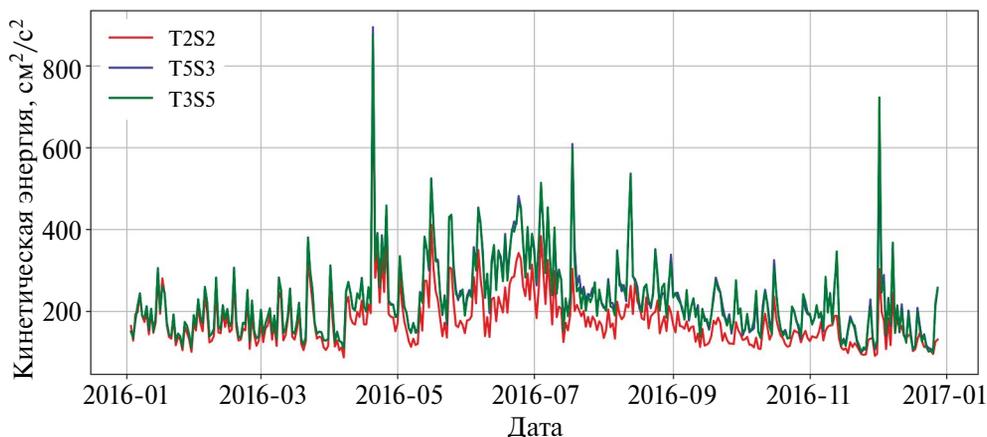


Рис. 4. Изменение со временем средней плотности кинетической энергии в верхнем слое.

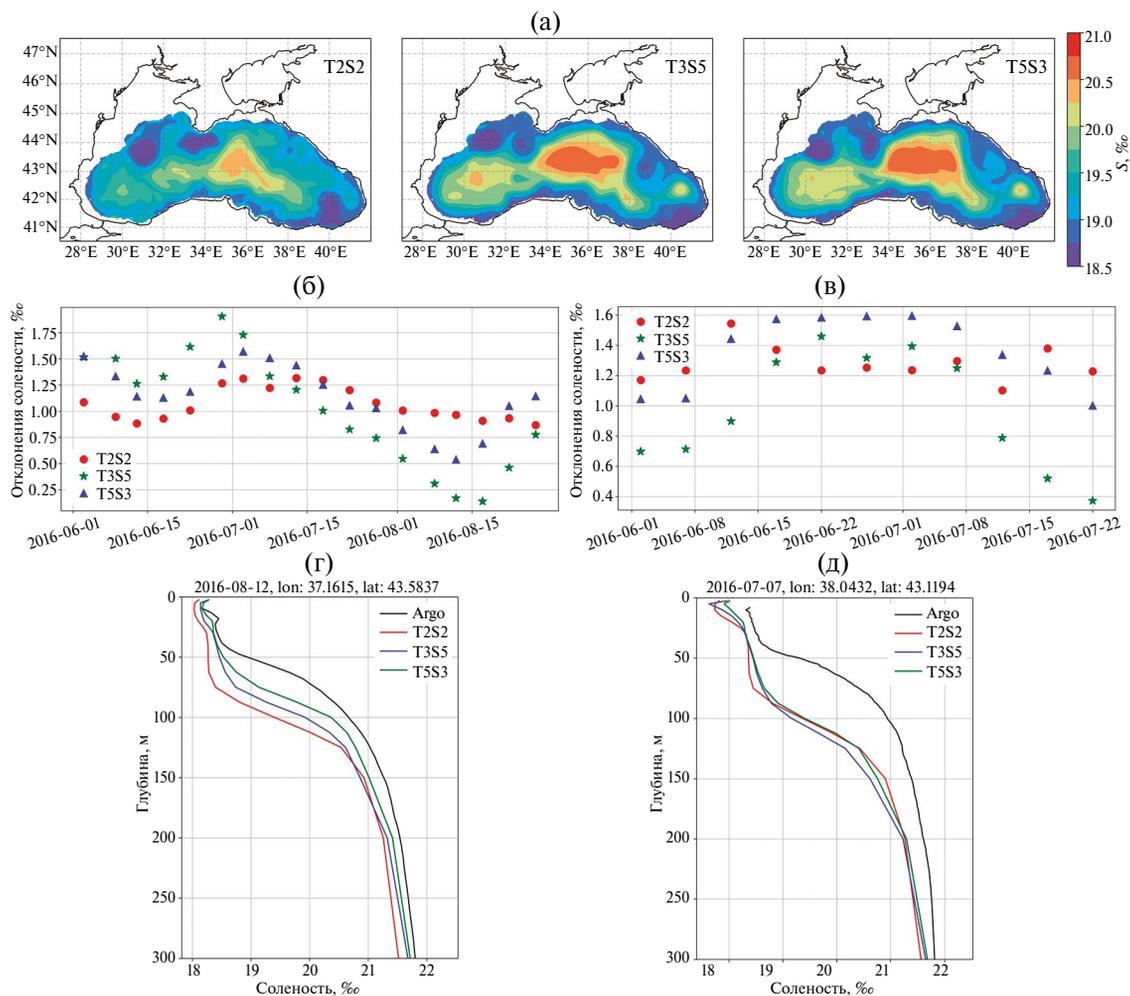


Рис. 5. Пространственное распределение поля солёности 10.07.2016 на горизонте 100 м (а). Отклонение модельной солёности от измеренной на горизонте 100 м летом 2016 г. для буйа 6901831 (б) и буйа 6901900 (в). Профили солёности с указанием даты и координаты по данным моделирования и буйев 6901831 (г) и 6901900 (д).

лености наблюдаются в верхнем 300-метровом слое. Анализ пространственных распределений поля солёности на различных горизонтах показал, что разница в интенсивности циркуляции проявляется начиная с глубин примерно 75 м с конца весны. В экспериментах Т3S5 и Т5S3 в центральной части моря наблюдаются области повышенной солёности по сравнению с Т2S2 (рис. 5а), что свидетельствует об усилении подъема вод. Такая картина прослеживается до конца осени. Из рис. 1б видно, что летом в глубоководной части моря находились буйи АRGO № 6901831 и 6901900. Для восточной части моря сопоставление с данными буйа 6901831, двигавшегося на северо-восток, демонстрирует уменьшение ошибки в результатах экспериментов Т3S5 и Т5S3 (рис. 5б), когда буй переместился севернее

43° с.ш. в область с наибольшей разницей между экспериментами (рис. 5а). Так, анализ разницы между модельными и натурными данными для лета 2016 г. показал, что величины $mean S$ составили 1.36, 1.22, 1.25‰ для экспериментов Т2S2, Т3S5, Т5S3 соответственно. Отклонение солёности вдоль траектории буйа 6901900 свидетельствует, что в западной части моря (рис. 1а) эксперимент Т3S5 дает наименьшую ошибку (рис. 5в): величины $mean S$ составили 1.62, 1.28, 1.57‰ для экспериментов Т2S2, Т3S5, Т5S3 соответственно. Профили солёности вдоль траекторий буйев демонстрируют, что уменьшение ошибки моделирования солёности в центральной части связано с более точным воспроизведением верхней границы основного галоклина в экспериментах Т3S5 и Т5S3 (рис. 5г, д).

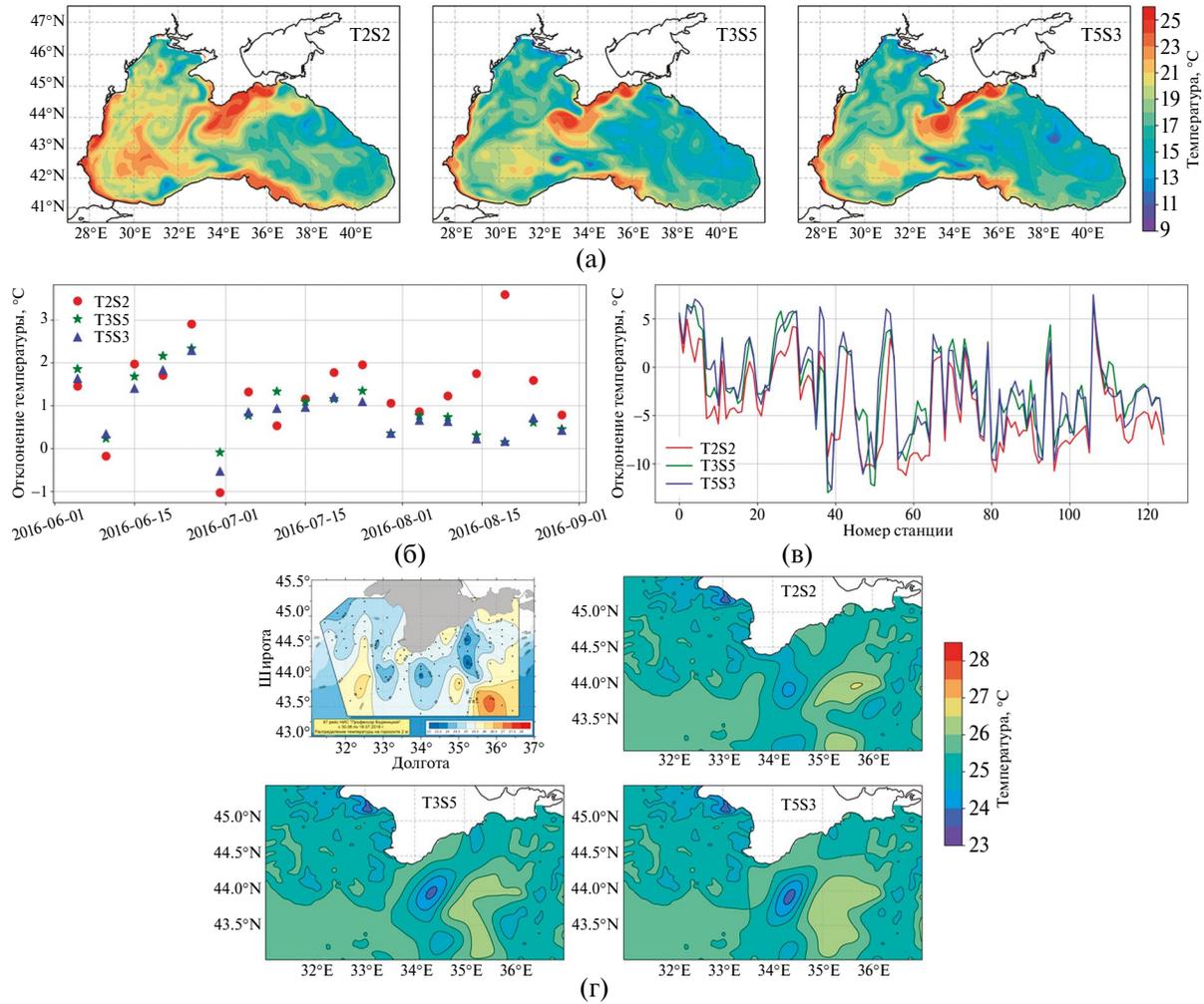


Рис. 6. Пространственное распределение полей температуры на горизонте 15 м на 04.07.2016 (а). Отклонение модельной температуры от измеренной на горизонте 15 м летом 2016 г. для буя 6901866 (б) и рейса № 87 (в). Поле температуры на горизонте 2 м по данным рейса № 87 и численных экспериментов на 04.07.2016 (г).

Анализ полей температуры на различных горизонтах показал, что наиболее значимые отличия наблюдаются в летний сезон в верхнем 30-метровом слое. На рис. 6 представлены пространственные распределения температуры по результатам трех экспериментов летом 2016 г. и отклонения от данных измерений вдоль траектории буев ARGO на горизонте 15 м. Как видно из рис. 6а, в западной глубоководной части моря температура в эксперименте T2S2 на 1–2 °С выше, чем в T3S5 и T5S3. Далее, со временем, западная часть прогревается, и во всех экспериментах получены качественно и количественно близкие результаты. По данным буя ARGO 6901866, действовавшего летом 2016 г. к северо-востоку от Анатолийского побережья (рис. 1б), отклонения температуры от

данных измерений ниже по результатам T3S5 и T5S3 (рис. 6б): величины *mean T* равны 1.36, 0.96, 0.85 °С для экспериментов T2S2, T3S5, T5S3 соответственно. Для северной части моря (рейс № 87 НИС “Профессор Водяницкий”, рис. 1б) наблюдаются наибольшие отклонения модельной температуры от измеренной и здесь существенной разницы между результатами экспериментов не выявлено (рис. 6в). Большие отклонения значений температуры связаны с неточностью восстановления глубины верхнего перемешанного слоя (табл. 3), что обусловлено высокочастотной изменчивостью физических процессов, не воспроизводимой моделью МГИ, но зафиксированной за счет высокой частоты и плотности выполнения измерений. Из рис. 6г видно, что в натуральных данных имеется несколь-

ко вихревых образований с размером около 10 км (в правой и левой частях полигона), тогда как в модельных полях воспроизводиться только вихрь в центре полигона к северу от Крыма.

Наиболее важные на наш взгляд различия, обнаруженные в результатах моделирования поля температуры, – это толщина сезонного термоклина и толщина ХПС. В центральной части моря в экспериментах T3S5 и T5S3 с середины июня по конец сентября слой скачка температуры и слой ХПС тоньше, чем в T2S2. В качестве примера на рис. 7а показаны вертикальные разрезы температуры вдоль 43° с.ш. в июле. Как видно в окрестностях горизонта 25 м наблюдается сгущение изотерм в расчетах T3S5 и T5S3, а толщина ХПС в среднем менее 50 м. Анализ натуральных данных за 2016–2019 гг. [Морозов и др., 2020] показывает, что в Черном море наблюдается поднятие нижней границы ХПС. По сведениям, представленным в монографии [Иванов и др., 2011], максимальная

величина среднего для летнего сезона вертикального градиента температуры, характеризующего слой скачка, равна $-1.4^{\circ}\text{C}/\text{м}$. Средние за июль оценки величины вертикального градиента модельной температуры в слое 20–25 м для глубоководной части моря (мористее изобаты 1500 м) составляют -1.03 , -1.23 , $-1.34^{\circ}\text{C}/\text{м}$ для первого, второго и третьего экспериментов соответственно. Анализ профилей температуры по данным ARGO (рис. 7б, в) и глубоководных станций рейса № 87 НИС “Профессор Водяницкий” (рис. 7г) вблизи 43° с.ш. указывает на то, что эксперименты T3S5 и T5S3 качественно и количественно точнее воспроизводят форму и толщину ХПС. Как видно из рис. 7б–г результаты расчетов T3S5 и T5S3 находятся в лучшем соответствии с наблюдениями в слое 25–50 м.

Сравнение результатов моделирования полей температуры и солености указывает на то, что при использовании уравнений (П.2) и (П.3)

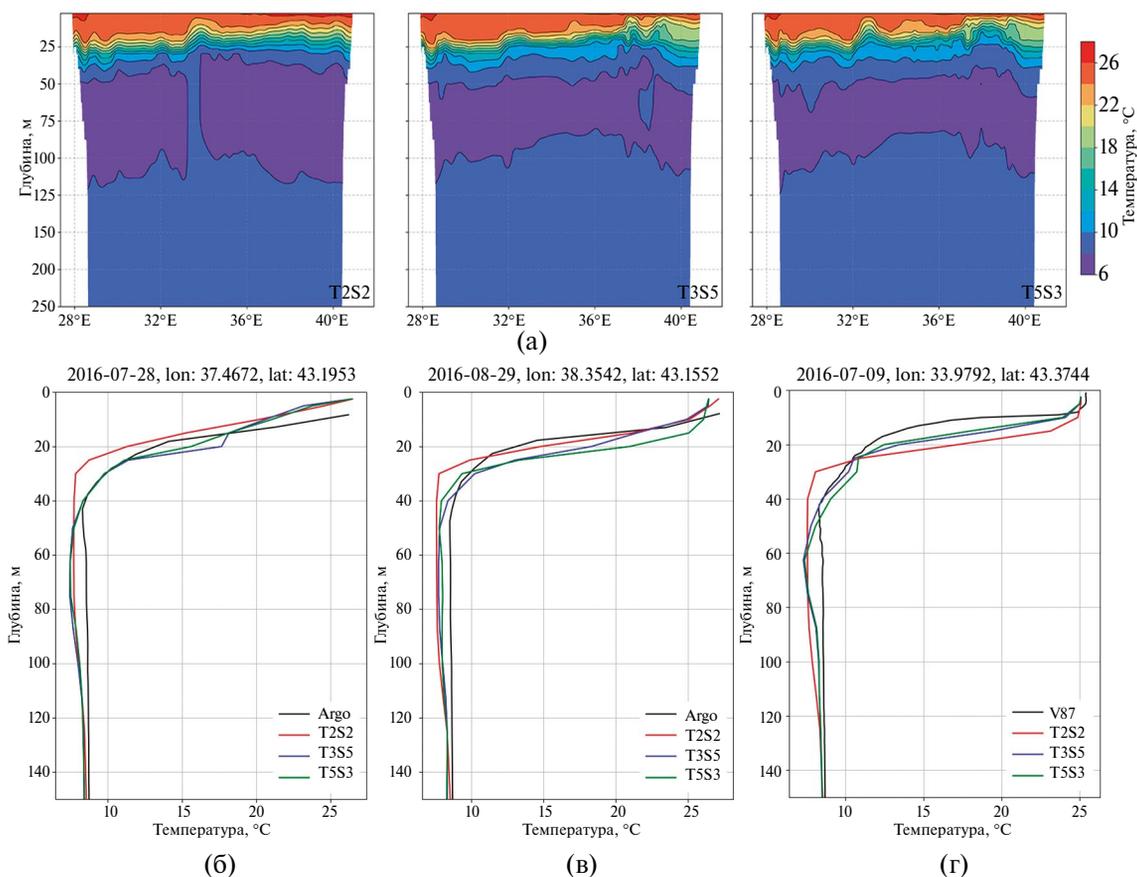


Рис. 7. Вертикальный разрез поля температуры вдоль 43° с.ш. 30.07.2016 (а). Профили температуры по данным моделирования, буев Арго № 6901831 (б), № 6901832 (в) и рейса № 87 (г).

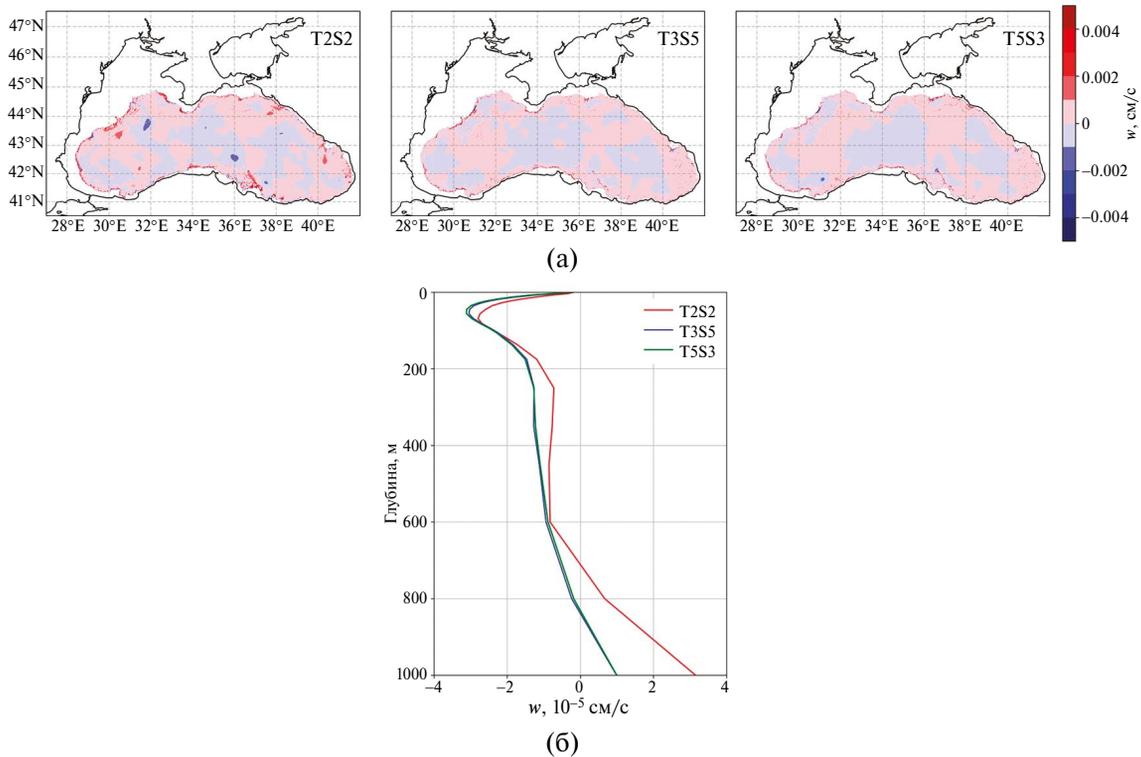


Рис. 8. Среднее за лето поле вертикальной скорости на горизонте 300 м (а). Средний для глубоководной части моря профиль вертикальной скорости по результатам трех экспериментов (б).

наблюдается интенсификация подъема вод в центральной части моря. Анализ пространственно-временной изменчивости поля вертикальной скорости показал, что в летний сезон при близких по величине значениях скорости увеличивается площадь зоны отрицательных значений, соответствующих в модели МГИ (ось z направлена вниз) подъему вод. На рис. 8а представлены средние за лето поля вертикальной скорости на горизонте 300 м. Видно, что в центральной и восточной частях моря области, обозначенные голубым цветом ($w < 0$), занимают большую площадь в экспериментах Т3S5 и Т5S3. Также обращает внимание более регулярный характер зон чередования положительных и отрицательных значений скорости. Оценки среднего за весь период интегрирования профиля вертикальной скорости для глубоководной части моря (мористее изобаты 1000 м) демонстрируют увеличение скорости подъема вод в верхнем 600-метровом слое для экспериментов Т3S5 и Т5S3 (рис. 8б). Максимум вертикальной скорости в экспериментах Т3S5 и Т5S3 расположен в слое 27.5–35 м, тогда как в эксперименте Т2S2 в слое 35–45 м. Резуль-

таты, полученные с применением новых схем (П.2) и (П.3), согласуются с оценками глубины максимума скорости подъема вод по данным реанализа Черного моря [Дорофеев и др., 2016].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлены результаты сравнительного анализа гидрофизических полей Черного моря, реконструированных при использовании в численной модели циркуляции МГИ дискретных уравнений адвекции-диффузии тепла и соли, обладающих свойством сохранения температуры и солёности в различных степенях. Рассмотрены три схемы аппроксимации адвективных членов, обеспечивающие сохранение температуры и солёности в степенях от двух до пяти.

Результаты расчетов демонстрируют, что в верхнем 100-метровом слое величина отклонения модельных значений солёности от измеренных меньше в экспериментах Т5S3 и Т3S5 по сравнению с экспериментом Т2S2, в котором используется традиционная аппроксимация нели-

нейных слагаемых. Наименьшие отклонения модельной солености от измеренной наблюдаются для юго-западной части моря – зоны с интенсивной струйной динамикой и слабой вихревой изменчивостью в зимний период. Для остальных районов в слое 30–100 м $RMSE$ солености для экспериментов T3S5 и T5S3 меньше примерно на 20%, чем по данным T2S2.

Для верхнего слоя 0–30 м использование аппроксимаций, обеспечивающих наличие инвариантов степени больше двух, приводит к лучшим качественным и количественным результатам по температуре. Оценки показали, что $RMSE$ температуры в экспериментах T3S5 и T5S3 уменьшается приблизительно на 10%. В то же время в летний сезон изменение схемы аппроксимации мало влияет на точность воспроизведения полей температуры в слое 30–100 м.

Анализ профилей солености вдоль траекторий буев демонстрирует, что уменьшение ошибки моделирования солености обусловлено более точным воспроизведением верхней границы основного галоклина. Сравнение профилей модельной температуры с данными ARGO и глубоководных станций НИС “Профессор Водяницкий” показывает, что эксперименты T3S5 и T5S3 по сравнению с расчетом T2S2 качественно и количественно точнее воспроизводят форму и толщину ХПС. По результатам трех экспериментов наименьшие отклонения от данных наблюдений получены при использовании аппроксимаций, обеспечивающих сохранение температуры в третьей степени и солености в пятой степени.

Результаты работы позволяют предположить, что увеличение степени инвариантов при нелинейной аппроксимации адвективных слагаемых в уравнениях эволюции температуры и солености позволяет лучше в смысле близости к наблюдениям воспроизвести области резких градиентов в прогнозируемых полях.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают благодарность сотрудникам ФГБУН ФИЦ МГИ С.В. Станичному и А.А. Кубрякову за предоставленные данные альтиметрии, Е.А. Скрипалевой за предоставление данных съемок рей-

сов НИС “Профессор Водяницкий”. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ № 23-27-00141.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Введем разностную сетку для бассейна с неровным дном, которая описывается боксами с целочисленными значениями в его центрах i, j, k ($i = i_1, \dots, i_N, j = j_1, \dots, j_M, k = 1, \dots, K_{ij}$) и на гранях – $i + 1/2, j + 1/2, k + 1/2$. Горизонтальные размеры боксов (h_x, h_y) постоянные, по вертикали используется неравномерная аппроксимация

$$\left(h_z^k = z_{k+1/2} - z_{k-1/2}, \quad h_z^{k+1/2} = z_{k+1} - z_k \right).$$

Разностные операторы имеют вид (для j, k – аналогично):

$$\Phi_{i,j,k}^{-x} = \frac{\Phi_{i+1/2,j,k} + \Phi_{i-1/2,j,k}}{2},$$

$$\delta_x \Phi_{i,j,k} = \frac{\Phi_{i+1/2,j,k} - \Phi_{i-1/2,j,k}}{h_x},$$

$$\nabla_{x,y}^2 \Phi_{i,j,k} = \delta_x^2 \Phi_{i,j,k} + \delta_y^2 \Phi_{i,j,k}.$$

Тогда уравнения адвекции температуры и солености в точке (i, j, k) записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{dT_{i,j,k}}{dt} + \delta_x(u_{i,j,k} T_{i,j,k}) + \delta_y(v_{i,j,k} T_{i,j,k}) + \\ + \delta_z(w_{i,j,k} T_{i,j,k}) = 0, \\ \frac{dS_{i,j,k}}{dt} + \delta_x(u_{i,j,k} S_{i,j,k}) + \delta_y(v_{i,j,k} S_{i,j,k}) + \\ + \delta_z(w_{i,j,k} S_{i,j,k}) = 0, \end{aligned}$$

Для температуры и солености в работе [Демышев, 2023] при условии сохранения T, S и T^K, S^L на гранях бокса (полуцелые значения индексов) получены следующие соотношения по оси x (для j, k – аналогично):

$$\begin{aligned} T_{i+1/2,j,k} &= \frac{K-1}{K} \left(T_{i,j,k} + \frac{T_{i+1,j,k}^{K-1}}{\Phi(T_{i+1,j,k}, T_{i,j,k})} \right), \\ S_{i+1/2,j,k} &= \frac{L-1}{L} \left(S_{i,j,k} + \frac{S_{i+1,j,k}^{L-1}}{\Psi(S_{i+1,j,k}, S_{i,j,k})} \right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(T_{i+1,j,k}, T_{i,j,k}) &= \sum_{n=0}^{K-2} T_{i+1,j,k}^{K-n-2} T_{i,j,k}^n, \\ \Psi(S_{i+1,j,k}, S_{i,j,k}) &= \sum_{m=0}^{L-2} S_{i+1,j,k}^{L-m-2} S_{i,j,k}^m. \end{aligned}$$

При $K = L = 2$ следует известная аппроксимация (для j, k – аналогично):

$$\begin{aligned} T_{i+1/2,j,k} &= \overline{T_{i+1/2,j,k}^x}, \\ S_{i+1/2,j,k} &= \overline{S_{i+1/2,j,k}^x}. \end{aligned} \quad (\text{П.1})$$

При $K = 5$ и $L = 3$ имеем (для j, k – аналогично)

$$T_{i+1/2,j,k} = \frac{4 + T_{i+1,j,k}^2 T_{i,j,k}^2 + T_{i+1,j,k}^3 T_{i,j,k} + T_{i+1,j,k}^4}{5 \frac{T_{i+1,j,k}^3 + T_{i+1,j,k}^2 T_{i,j,k} + T_{i+1,j,k} T_{i,j,k}^2 + T_{i,j,k}^3}{T_{i+1,j,k}^2 + T_{i,j,k}^2}}, \quad (\text{П.2})$$

$$S_{i+1/2,j,k} = \frac{2 S_{i+1,j,k}^2 + S_{i+1,j,k} S_{i,j,k} + S_{i,j,k}^2}{3 S_{i+1,j,k} + S_{i,j,k}},$$

и, соответственно, при $K = 3$ и $L = 5$:

$$S_{i+1/2,j,k} = \frac{4 + S_{i+1,j,k}^2 S_{i,j,k}^2 + S_{i+1,j,k}^3 S_{i,j,k} + S_{i+1,j,k}^4}{5 \frac{S_{i+1,j,k}^3 + S_{i+1,j,k}^2 S_{i,j,k} + S_{i+1,j,k} S_{i,j,k}^2 + S_{i,j,k}^3}{S_{i+1,j,k}^2 + S_{i+1,j,k} S_{i,j,k} + S_{i,j,k}^2}}, \quad (\text{П.3})$$

$$T_{i+1/2,j,k} = \frac{2 T_{i+1,j,k}^2 + T_{i+1,j,k} T_{i,j,k} + T_{i,j,k}^2}{3 T_{i+1,j,k} + T_{i,j,k}}.$$

При интегрировании по всей области аппроксимации (П.1), (П.2), (П.3) обеспечивают сохранение T, S и T^K, S^L ($K \geq 2, L \geq 2$), то есть выполняются соотношения

$$\sum_{i,j,k} \frac{dT_{i,j,k}^K}{dt} h_x h_y h_z + \sum_{i,j} \frac{d\zeta_{i,j}}{dt} T_{i,j,1/2}^K h_x h_y = 0,$$

$$\sum_{i,j,k} \frac{dS_{i,j,k}^L}{dt} h_x h_y h_z + \sum_{i,j} \frac{d\zeta_{i,j}}{dt} S_{i,j,1/2}^L h_x h_y = 0,$$

где ζ – приведенный уровень моря и эти выражения при отсутствии диффузии и внешних сил соответствуют следующим интегралам:

$$\frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial t} \int \int \int_{-\zeta}^H (T^K) dx dy dz = 0,$$

$$\frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial t} \int \int \int_{-\zeta}^H (S^L) dx dy dz = 0.$$

Полученные аппроксимации требуют дополнительного анализа при $|T| \ll 1^\circ\text{C}$ и/или $S \ll 1\%$. Для условий Черного моря такая ситуация прак-

тически не имеет место, а в данных расчетах она отсутствует.

Также конечно-разностные аппроксимации, представленные формулами (П.1), (П.2), (П.3), позволяют получить дивергентный вид уравнения адвекции плотности, что обеспечивает точное выполнение закона сохранения полной энергии при нелинейной зависимости плотности от температуры и солёности [Демьшев, 2023].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Артамонов Ю.В., Скрипалева Е.А., Алексеев Д.В., Федирко А.В., Шутлов С.А., Колмак Р.В., Шаповалов Р.О., Шербаченко С.В. Гидрологические исследования в северной части Черного моря в 2016 г. (87, 89 и 91-й рейсы НИС “Профессор Водяницкий”) // Морской гидрофизический журнал. 2018. Т. 34. № 3. С. 247–253.
<https://doi.org/10.22449/0233-7584-2018-3-247-253>

Булгаков С.Н., Коротаев Г.К. Возможный механизм стационарной циркуляции вод Черного моря // Комплексные исследования Черного моря. Севастополь: МГИ АН УССР, 1984. С. 32–40.

Гидрометеорология и гидрохимия морей СССР. Т. 4. Черное море. Вып. 1. Гидрометеорологические условия / Под ред. Симонова А.И., Альтмана Э.Н. СПб.: Гидрометеоздат, 1991. 428 с.

Головизнин В.М., Самарский А.Л. Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной // Математическое моделирование. 1998. Т. 10. № 1. С. 86–100.

Демьшев С.Г. Нелинейные инварианты дискретной системы уравнений динамики моря в квазистатическом приближении // Морской гидрофизический журнал. 2023. Т. 39. № 5. С. 557–583. EDN: JWSUUM

Демьшев С.Г. Численная модель оперативного прогноза течений в Черном море // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2012. Т. 48. № 1. С. 137–149. EDN: OOWHLL

Демьшев С.Г., Коротаев Г.К. Численная энергосбалансированная модель бароклинных течений океана с неровным дном на сетке С // Численные модели и результаты калибровочных расчетов течений в Атлантическом океане: Атмосфера – Океан – Космос. Программа “Разрезы“. М.: Институт вычислительной математики РАН, 1992. С. 163–231.

Дорофеев В.Л., Сухих Л.И. Анализ изменчивости гид-

- рофизических полей Черного моря в период 1993–2012 годов на основе результатов выполненного реанализа // Морской гидрофизический журнал. 2016. № 1. С. 33–48.
<https://doi.org/10.22449/0233-7584-2016-1-33-48>
- Иванов В.А., Белокопытов В.Н.* Океанография Черного моря. Севастополь: Морской гидрофизический институт НАН Украины, 2011. 212 с. EDN: XPERZR.
- Капцов Е.И.* Численная реализация инвариантной схемы для одномерных уравнений мелкой воды в лагранжевых координатах // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2019. № 108. 28 с.
<https://doi.org/10.20948/prepr-2019-108>
- Морозов А.Н., Маньковская Е.В.* Холодный промежуточный слой Черного моря по данным экспедиционных исследований 2016–2019 годов // Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон моря. 2020. № 2. С. 5–16.
<https://doi.org/10.22449/2413-5577-2020-2-5-16>
- Самарский А.А., Мажукин В.И., Матус П.П.* Инвариантные разностные схемы для дифференциальных уравнений с преобразованием независимых переменных // Доклады Академии Наук. 1997. Т. 352. № 5. С. 602–605.
- Akpınar A., Sadıghrad E., Fach B.A., Arkin S.* Eddy Induced Cross-Shelf Exchanges in the Black Sea // Rem. Sens. 2022. V. 14. № 19. P. 4881.
<https://doi.org/10.3390/rs14194881>
- Arakawa A., Lamb V.R.* A potential enstrophy and energy conserving scheme for the shallow water equation // Mon. Wea. Rev. 1981. V. 109. № 1. P. 18–36.
- Cheviakov A.F., Dorodnitsyn V.A., Kaptsov E.I.* Invariant Conservation Law-Preserving Discretizations of Linear and Nonlinear Wave Equations // J. Math. Phys. 2020. V. 61. № 8. P. 081504.
<https://doi.org/10.48550/arXiv.2007.07821>
- Demyshev S.G., Dymova O.A.* Analysis of the annual mean energy cycle of the Black Sea circulation for the climatic, basin-scale and eddy regimes // Ocean Dynamics. 2022. V. 72. P. 259–278.
<https://doi.org/10.1007/s10236-022-01504-0>
- Goloviznin V.M., Maiorov Pavel A., Maiorov Petr A., Solovjev A.V.* Validation of the low dissipation computational algorithm CABARET-MFSH for multilayer hydrostatic flows with a free surface on the lock-release experiments // J. Comput. Phys. 2022. V. 463. P. 111239.
<https://doi.org/10.1016/j.jcp.2022.111239>
http://dvs.net.ru/mp/data/main_ru.shtml
https://data.marine.copernicus.eu/product/BLKSEA_MULTIYEAR_PHY_007_004/description
https://data.marine.copernicus.eu/product/SST_BS_SST_L3S_NRT_OBSERVATIONS_010_013
<https://emodnet.ec.europa.eu/geonetwork/srv/eng/catalog.search#/metadata/19f800a9-f0fd-4055-b4cd-90ed156dc7fc>
<https://www.coriolis.eu.org/Data-Products/Data-selection>
<https://www.ecmwf.int/en/forecasts/dataset/ecmwf-reanalysis-v5>
- IOC, SCOR and IAPSO, 2010: The international thermodynamic equation of Seawater-2010: Calculation and use of thermodynamic properties. Intergovernmental oceanographic Commission, Manuals and Guides No. 56. UNESCO. 196 p.
- Kubryakov A.A., Stanichny S.V.* Reconstruction of mean dynamic topography of the Black Sea for altimetry measurements // Izv. Atmos. Ocean. Phys. 2012. №48. P. 973–979.
<https://doi.org/10.1134/S0001433812090095>
- Mellor G.L., Yamada T.* Development of a turbulence close model for geophysical fluid problems // Rev. Geophys. Space Phys. 1982. № 20. P. 851–875.
<https://doi.org/10.1029/RG020i004p00851>
- Palha A., Gerritsma M.* A mass, energy, enstrophy and vorticity conserving (MEEVC) mimetic spectral element discretization for the 2D incompressible Navier-Stokes equations // J. Comput. Phys. 2017. V. 328. P. 200–220.
<https://doi.org/10.1016/j.jcp.2016.10.009>
- Scott A., James R.* New flux-conserving numerical scheme for the steady, incompressible Navier-Stokes equations // Fluid Mechanics and Heat Transfer. 1994. Report/2013. Patent Number E-8642 NASA-TM-106520 NAS 1.15:106520.
- Sorgentone C., La Cognata S., Nordstrom J.* A new high order energy and enstrophy conserving Arakawa-like Jacobian differential operator // J. Comput. Phys. 2015. V. 301. P. 167–177.
<https://doi.org/10.1016/j.jcp.2015.08.028>

Modeling of the Black Sea Circulation Using Equations of Heat and Salt Advection–Diffusion Having Discrete Nonlinear invariants

S. G. Demyshev^{1,*}, O. A. Dymova^{1,**}

¹ *Marine Hydrophysical Institute Russian Academy of Sciences,
st. Kapitanskaya, 2, Sevastopol, 299011 Russia*

*e-mail: demyshev@gmail.com

**e-mail: olgdymova@mhi-ras.ru

In this work the accuracy of reconstructing the Black Sea circulation by using new approximations of nonlinear terms in the transport equations, ensuring the conservation of temperature and salinity to a power greater than two, is analyzed based on the results of forecast calculations. Three numerical experiments with differences in the schemes for calculating temperature and salinity are carried out. In the first experiment – traditional schemes are used to conserve of temperature and salinity in the first and second degrees; in the second one – the temperature is conserved in the first and fifth degrees, salinity in the first and third; in the third one – the temperature in the first and third, salinity in the first and fifth degrees. Calculations are performed on the basis of the MHI model with a resolution of 1.6 km and taking into account realistic atmospheric forcing for 2016. Validation of the results is carried out based on comparison of model fields with in-situ and satellite measurements of temperature and salinity in 2016. Analysis of mean and root mean square errors showed that new schemes for the advection-diffusion equations of heat and salt, ensuring the conservation of predictive parameters to a power greater than two, improve the accuracy of reconstructing the salinity in the Black Sea upper 100m layer throughout the year compared with traditional approximation. The root mean square errors in the salinity field are reduced by 15–20%, the thickness of the upper mixed layer in winter and the depth of the upper boundary of the thermocline layer in summer in the central part of the sea are modeled approximately 10% more accurately. Based on the results of three experiments, the smallest deviations from observational data are obtained when using approximations that ensure the conservation of temperature to the third power and salinity to the fifth power.

Keywords: modeling, nonlinear invariants, approximation schemes, the Black Sea, observational data, thermohaline characteristics