

УДК 551.558.1:551.554:536.25

ВАРИАНТ ТЕОРИИ ЛОКАЛЬНОГО ПОДОБИЯ И АППРОКСИМАЦИЯ ВЕРТИКАЛЬНЫХ ПРОФИЛЕЙ ТУРБУЛЕНТНЫХ МОМЕНТОВ КОНВЕКТИВНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ АТМОСФЕРЫ

© 2024 г. А. Н. Вульфсон^{a, b, *}, П. В. Николаев^c

^aИнститут водных проблем РАН, ул. Губкина, 3, Москва, 119333 Россия

^bНациональный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, ул. Мясницкая, 20, Москва, 101000 Россия

^cНациональный исследовательский технологический университет МИСиС, Ленинский просп., 4, стр. 1, Москва, 119049 Россия

*e-mail: vulfson@iwp.ru

Поступила в редакцию 28.02.2023 г.

После доработки 22.09.2023 г.

Принята к публикации 15.11.2023 г.

Аппроксимация турбулентных моментов конвективного слоя атмосферы выполнена на основе варианта локальной теории подобия, использующего понятия полуэмпирической теории турбулентности Прандтля. В предложенном варианте локальной теории подобия в качестве базовых параметров приняты второй момент вертикальной скорости и “спектральный” путь перемешивания Прандтля. Такой подход позволяет распространить теорию Прандтля на турбулентные моменты вертикальной скорости и плавучести и дополнительно предложить более десяти новых аппроксимаций. Рассмотрено сопоставление предложенной аппроксимации с другими вариантами теории локального подобия. Показано, что выбранные базовые параметры значительно улучшают соответствие аппроксимаций локального подобия с экспериментальными данными. Аппроксимации согласуются с наблюдениями в турбулентном конвективном ярусе атмосферы, верхняя граница которого практически соответствует нижней границе температурной инверсии. Аналитические аппроксимации локального подобия могут найти приложения при построении замыканий моментов высокого порядка в вихре разрешающих численных моделях турбулентности, а также при конструировании “mass-flux” параметризации.

Ключевые слова: конвективный пограничный слой, теория локального подобия, полуэмпирическая теория турбулентности Прандтля

DOI: 10.31857/S0002351524010057

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть h — высота конвективного пограничного слоя; z — высота уровня над подстилающей поверхностью. В условиях свободной конвекции и вынужденной конвекции со слабым ветром теория локального подобия расширяет область приложения теории Мони́на–Обухова с узкого поверхностного слоя $0 \leq z/h \leq 0.1$ на большую часть конвективного слоя $0 \leq z/h \leq 0.75$.

Варианты теории локального подобия предполагают априорное задание двух базовых размерных параметров, отнесенных к произвольному уровню z и характеризующих турбулентное

перемешивание на этом уровне. Аппроксимации турбулентных моментов строятся на основе теории размерности в форме обобщенных одночленов, зависящих от базовых параметров. В рамках теории локального подобия возможны различные способы априорного задания базовых параметров. Выбор базовых параметров формирует тот или иной вариант теории локального подобия.

Для конвективного пограничного слоя атмосферы без сдвига ветра теория локального подобия была впервые предложена в работе [Zeman, Lumley, 1976]. В качестве базовых параметров

Статья подготовлена на основе устного доклада, представленного на IV Всероссийской конференции с международным участием “Турбулентность, динамика атмосферы и климата”, посвященной памяти академика А.М. Обухова (Москва, 22–24 ноября 2022 г.).

в этой теории использовалась высота z и локальный поток плавучести gs_θ , величина которого пропорциональна турбулентному конвективному потоку тепла на этом уровне. Последовательное развитие варианта теории [Zeman, Lumley, 1976] выполнено в работе [Вульфсон и др., 2004], см. также [Sorbjan, 1986]. Другой вариант теории локального подобия для конвективного пограничного слоя атмосферы подробно обсуждался в серии работ [Sorbjan, 1986; 1987; 1988; 1990; 1991]. В качестве базовых параметров в этой теории использовались параметр скорости $w_s = z^{1/3}(gs_\theta)^{1/3}$ и параметр плавучести $g\theta_s = z^{-1/3}(gs_\theta)^{2/3}$, где gs_θ – локальный поток “буссинесковской” плавучести на произвольном уровне z , пропорциональный конвективному потоку тепла.

Существенно, что предложенные варианты теории локального подобия соответствуют экспериментальным данным только в нижней половине конвективного пограничного слоя $0 \leq z/h \leq 0.5$.

В настоящей работе рассматривается еще один вариант теории локального подобия в свободно-конвективном пограничном слое атмосферы, использующий идеи полуэмпирических теорий турбулентности [Prandtl, 1925; 1932]. В данном варианте в качестве базовых размерных параметров использован второй момент вертикальной скорости w^2 и параметр длины l_{PS} , соответствующий “спектральному” пути перемешивания Прандтля. Такой выбор базовых параметров позволяет рассматривать алгебраические формулы полуэмпирической теории турбулентности Прандтля как соотношения теории локального подобия. Выбранные базовые параметры w^2 и l_{PS} значительно улучшают соответствие аппроксимаций с экспериментальными данными и согласуются с наблюдениями в области перемешивания $0 \leq z/h \leq 0.75$. Следует заметить, что уровень $z/h = 0.75$ соответствует верхней границе существования ансамбля конвективных термиков, подробнее см. [Вульфсон, Бородин, 2016; Vulfson, Borodin, 2018; Vulfson, Nikolaev, 2022].

Аналитические аппроксимации теории локального подобия для моментов конвективного пограничного слоя представляют вполне определенный теоретический интерес в связи с про-

блемами конструктивного замыкания моментов высокого порядка в вихре разрешающих численных моделях турбулентности и “mass-flux” параметризациях.

2. ВЕРТИКАЛЬНАЯ СТРУКТУРА КОНВЕКТИВНОГО СЛОЯ АТМОСФЕРЫ И УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ КОНВЕКЦИИ

Пусть t – время; x, y, z – координаты декартовой системы координат, в которой ось z направлена противоположно ускорению силы тяжести g , а оси x, y расположены на плоской однородной подстилающей поверхности. Предположим, что $\bar{\Theta}(z)$ – фоновое значение потенциальной температуры статической стратифицированной атмосферы; $d\bar{\Theta}/dz$ – температурная стратификация атмосферы;

Согласно [Kaimal et al., 1976] конвективный пограничный слой атмосферы высотой h состоит из трех горизонтальных ярусов, см. рис. 1.

Ярус $h_{ib} < z < h$ называют инверсионным слоем. Нижняя граница инверсионного подслоя расположена на уровне $h_{ib} \approx 0.85h$. Стратификация атмосферы в инверсионном слое перемешивания устойчива $d\bar{\Theta}/dz > 0$. Ярус $h_s < z < h_{ib}$, для которого $h_s \approx 0.1h$, называют слоем перемешивания. Нижняя граница слоя перемешивания расположена на уровне $h_s \approx 0.1h$. Стратификация атмосферы в слое перемешивания нейтральна, а средняя потенциальная температура слоя практически постоянна $d\bar{\Theta}/dz = 0$, $\bar{\Theta}(z) = \Theta_0 = \text{const}$.

Ярус $0 < z < h_s$, прилегающий к подстилающей поверхности $z = 0$, называют поверхностным слоем. В поверхностном конвективном слое стратификация атмосферы неустойчива, $d\bar{\Theta}/dz \leq 0$, подробнее см. [Kaimal et al., 1976].

Так как ярус перемешивания обладает самой большой вертикальной протяженностью, величину $\Theta_0 = \text{const}$ можно интерпретировать как среднюю потенциальную температуру всего конвективного слоя.

Равенство $\bar{\Theta}(h_s) = \Theta_0$ следует рассматривать как уравнение для определения высоты конвективного поверхностного слоя h_s , см. рис. 1.

Описание свободно конвективного режима турбулентности реализуем в рамках уравнений теории конвекции Буссинеска. Математическое обоснование системы уравнений Буссинеска

для случая использования в стратифицированной жидкости выполнено [Spiegel, Veronis, 1960]. Обоснование системы уравнений Буссинеска для случая использования в стратифицированной атмосфере выполнено в [Вульфсон, 1981], см. также [Mahrt, 1986].

Допустим, что \vec{u} , w — компоненты вектора скорости вдоль плоскости xy и оси z соответственно. Будем считать, что $\rho(x, y, z, t)$, $p(x, y, z, t)$ и $\Theta(x, y, z, t)$ — локальные значения плотности, давления и потенциальной температуры соответственно; $\bar{\rho}(z)$, $\bar{p}(z)$, $\bar{\Theta}(z)$ — фоновые значения плотности, давления и потенциальной температуры, связанные уравнениями состояния идеального газа и статики. Предположим, что $\bar{\rho}_a(z)$ — фоновое значение плотности статической адиабатической атмосферы; $\bar{\rho}_0 = \bar{\rho}_a(0)$ — постоянное значение средней плотности на подстилающей поверхности.

Пусть $p' = p - \bar{p}$ — отклонение локального давления p от его статического фонового значения $\bar{p}(z)$; $\Phi_b = p'/\bar{\rho}_a \approx p'/\bar{\rho}_0$ — модифицированное возмущение давления в стратифицированной атмосфере; $\Theta'_b(x, y, z, t) = \Theta(x, y, z, t) - \bar{\Theta}(z)$ — локальная флуктуация потенциальной температуры в стратифицированной атмосфере.

Уравнения Буссинеска будут рассмотрены в области $\Omega = \{-\infty < x, y < \infty, 0 < z < h\}$.

Следуя [Turner, 1973], введем локальную “буссинескову” плавучесть.

$$\begin{aligned} g\theta_b(x, y, z, t) &= g\Theta'_b(x, y, z, t)/\Theta_0 = \\ &= g\{\Theta(x, y, z, t) - \bar{\Theta}(z)\}/\Theta_0. \end{aligned} \quad (1)$$

Использование в качестве новой переменной системы уравнений Буссинеска приводит к уравнениям

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\vec{u} = -\vec{\nabla}_h\Phi_b, & \frac{d}{dt}w = -\frac{\partial}{\partial z}\Phi_b + (g\theta_b) \\ \frac{d}{dt}(g\theta_b) + g\Gamma w = 0, & \vec{\nabla}_h \cdot \vec{u} + \frac{\partial}{\partial z}w = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь $\vec{\nabla}_h = \vec{i}\partial/\partial x + \vec{j}\partial/\partial y$ — горизонтальный оператор Гамильтона; \vec{i} , \vec{j} — направляющие векторы осей x и y соответственно; $g\Gamma = g\Theta_0^{-1}d\bar{\Theta}(z)/dz$ — параметр стратификации.

Уравнения позволяют рассматривать плавучесть $g\theta_b$ как самостоятельную переменную, экви-

валентную пульсации потенциальной температуры Θ'_b . Модифицированная форма уравнений конвекции была впервые предложена [Вульфсон и др., 2004] и использована также в работах [Fodor, Mellado, 2020; Vulfson, Nikolaev, 2022].

Пусть $gs_\theta(z) = \overline{g\theta_b w}$ — локальный поток “буссинесковой” плавучести на произвольном уровне z , размерность которого $[gs_\theta] = m^2/c^3$. Соответственно, $gS_\theta = gs_\theta(0) = gH/(c_p\rho_0\Theta_0)$ — поток плавучести на подстилающей поверхности. С учетом краевые условия на нижней горизонтальной границе $z = 0$ примут вид

$$\left\{\overline{w\vec{u}' \cdot w\vec{u}'}\right\}^{1/2} = U_*^2, \quad \overline{(g\theta_b w)}_0 = gS_\theta. \quad (3)$$

Здесь \vec{u}' — отклонение скорости от среднего горизонтального ветра; U_* — динамическая скорость.

Уравнения теории конвекции и их краевые условия будут рассматриваться далее как базовые соотношения, формирующие турбулентность конвективного пограничного слоя.

Использование вместо переменной Θ'_b переменной плавучести $g\theta_b$, размерность которой $[g\theta] = m/s^2$, приводит к появлению новых турбулентных моментов вида $(g\theta_b)^n w^m$, пропорциональных обычным турбулентным моментам $(\Theta'_b)^n w^m$. Однако это обстоятельство совершенно несущественно, так как безразмерные формы моментов $(g\theta_b)^n w^m$ и $(\Theta'_b)^n w^m$ полностью совпадают.

3. ТЕОРИЯ МОНИНА–ОБУХОВА И ТЕОРИИ ЛОКАЛЬНОГО ПОДОБИЯ В ПОВЕРХНОСТНОМ КОНВЕКТИВНОМ СЛОЕ АТМОСФЕРЫ

Для описания турбулентности в конвективном поверхностном слое атмосферы $0 < z/h < 0.1$ используют теорию Монина–Обухова, см. [Monin, Yaglom, 1975]. Для описания турбулентности в конвективном слое атмосферы $0 < z/h < 1$ используют локальные теории подобия, см., например, [Zeman, Lumley, 1976; Sorbjan, 1986]. Покажем, что в режиме свободной конвекции в конвективном поверхностном слое атмосферы $0 < z/h < 0.1$ известные варианты локальной теории подобия формируют профили турбулентных моментов, форма которых геометрически подобна профилям классической теории подобия Монина–Обухова.

В качестве иллюстрации рассмотрим моменты второго порядка, которые дополним смешанным моментом третьего порядка. Из соотношений, следуют, общие соотношения для следующих моментов

$$\begin{aligned} \overline{w^2} &= g_{ww}(z, gS_\theta, U_*, g\Gamma), \\ \overline{(g\theta_b)^2} &= g_{\theta\theta}(z, gS_\theta, U_*, g\Gamma), \\ \overline{(g\theta_b)^2 w} &= g_{\theta\theta w}(z, gS_\theta, U_*, g\Gamma), \end{aligned} \quad (4)$$

где g_{ww} , $g_{\theta\theta}$, $g_{\theta\theta w}$ – положительные функции.

В условиях слабого ветра $U_* \approx 0$ и положительного потока тепла на подстилающей поверхности $gS_\theta > 0$ в конвективном поверхностном слое $0 < z/h < 0.1$ параметр стратификации $g\Gamma = g\Gamma(z, gS_\theta)$. Поэтому, согласно [Kader, Yaglom, 1990], в уравнениях существует только два базовых параметра gS_θ и z , т.е.

$$\begin{aligned} \overline{w^2} &= g_{ww}(z, gS_\theta), \quad \overline{(g\theta_b)^2} = g_{\theta\theta}(z, gS_\theta), \\ \overline{(g\theta_b)^2 w} &= g_{\theta\theta w}(z, gS_\theta). \end{aligned} \quad (5)$$

В этих условиях использование π -теоремы и теории размерности, см. [Buckingham, 1914; Varenblatt, 1996], приводит к равенствам

$$\begin{cases} \overline{w^2} = \lambda_{ww}^o (gS_\theta)^{2/3} z^{2/3} \\ \overline{(g\theta_b)^2} = \lambda_{\theta\theta}^o (gS_\theta)^{4/3} z^{-2/3} \\ \overline{(g\theta_b)^2 w} = \lambda_{\theta\theta w}^o (gS_\theta)^{5/3} z^{-1/3}. \end{cases} \quad (6)$$

где $\lambda_{ww}^o > 0$, $\lambda_{\theta\theta}^o > 0$ и $\lambda_{\theta\theta w}^o > 0$ – положительные безразмерные постоянные теории Монина–Обухова.

Масштабирование в конвективном поверхностном слое можно выполнить с помощью параметров Дирдорфа

$$\begin{aligned} w_D &= (hgS_\theta)^{1/3}, \\ g\theta_D &= h^{-1/3}(gS_\theta)^{2/3} = gS_\theta / w_D, \end{aligned} \quad (7)$$

подробнее см. [Deardorff, 1970].

Тогда с учетом уравнения примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\overline{w^2}}{w_D^2} &= \lambda_{ww}^o \left(\frac{z}{h}\right)^{2/3}, \\ \frac{\overline{(g\theta_b)^2}}{(g\theta_D)^2} &= \lambda_{\theta\theta}^o \left(\frac{z}{h}\right)^{-2/3}, \\ \frac{\overline{(g\theta_b)^2 w}}{(g\theta_D^2) w_D} &= \lambda_{\theta\theta w}^o \left(\frac{z}{h}\right)^{-1/3}. \end{aligned} \quad (8)$$

Моменты соответствуют классической теории подобия Монина–Обухова в режиме свободной конвекции в приземном слое $0 < z/h < 0.1$.

Коэффициенты $\lambda_{ww}^o = 1.8$, $\lambda_{\theta\theta}^o = 1.8$ и $\lambda_{\theta\theta w}^o = 1.1$ были установлены по измерениям в приземном слое в эксперименте Kansas-1968, см. [Wyngaard et al., 1971; Kaimal et al., 1976].

Рассмотрим аппроксимацию турбулентных моментов в рамках варианта теории локального подобия [Zeman, Lumley, 1976], см. также [Вульфсон и др., 2004], развитой для нижней половины конвективного слоя $0 < z/h < 0.5$. Базовыми параметрами этой теории на произвольном уровне являются параметры z и gS_θ . Использование теории размерности и двух определяющих параметров z и gS_θ приводит к равенствам

$$\begin{cases} \overline{w^2} = \lambda_{ww}(gS_\theta)^{2/3} z^{2/3} = \lambda_{ww}(gS_\theta)^{2/3} \left(\frac{gS_\theta}{gS_\theta}\right)^{2/3} z^{2/3} \\ \overline{(g\theta_b)^2} = \lambda_{\theta\theta}(gS_\theta)^{4/3} z^{-2/3} = \lambda_{\theta\theta}(gS_\theta)^{4/3} \left(\frac{gS_\theta}{gS_\theta}\right)^{4/3} z^{-2/3} \\ \overline{(g\theta_b)^2 w} = \lambda_{\theta\theta w}(gS_\theta)^{5/3} z^{-1/3} = \lambda_{\theta\theta w}(gS_\theta)^{5/3} \left(\frac{gS_\theta}{gS_\theta}\right)^{5/3} z^{-1/3}, \end{cases} \quad (9)$$

где $\lambda_{ww} > 0$, $\lambda_{\theta\theta} > 0$ и $\lambda_{\theta\theta w} > 0$ – положительные безразмерные постоянные теории локального подобия.

Масштабирование с учетом параметров Дирдорфа позволяет построить соотношения

$$\begin{cases} \frac{\overline{w^2}}{w_D^2} = \lambda_{ww} \left(\frac{z}{h}\right)^{2/3} \left(\frac{gS_\theta}{gS_\theta}\right)^{2/3} \\ \frac{\overline{(g\theta_b)^2}}{(g\theta_D)^2} = \lambda_{\theta\theta} \left(\frac{z}{h}\right)^{-2/3} \left(\frac{gS_\theta}{gS_\theta}\right)^{4/3} \\ \frac{\overline{(g\theta_b)^2 w}}{(g\theta_D^2) w_D} = \lambda_{\theta\theta w} \left(\frac{z}{h}\right)^{-1/3} \left(\frac{gS_\theta}{gS_\theta}\right)^{5/3} \end{cases} \quad (10)$$

В рамках теории [Zeman, Lumley, 1976] предполагается, что в поверхностном слое $z/h \ll 1$ выполняется предельное равенство $\lim_{z/h \rightarrow 0} gS_\theta = gS_\theta$. В этом приближении соотношения теории локального подобия [Zeman, Lumley, 1976] переходят в соотношения, подобные формулам теории подобия Монина–Обухова.

Рассмотрим аппроксимацию турбулентных моментов в рамках варианта теории локального подобия [Sorbjan, 1986; 1987; 1988; 1990; 1991].

Базовыми параметрами теории на произвольном уровне z являются скорость w_S и плавучесть $g\theta_S$, размерности которых имеют вид $[w_S] = m / s$, $[g\theta_S] = m / s^2$. Поэтому, согласно этому варианту теории локального подобия,

$$\frac{\overline{w^2}}{w_S^2} = \lambda_{ww}, \quad \frac{\overline{(g\theta_b)^2}}{(g\theta_S)^2} = \lambda_{\theta\theta}, \quad (11)$$

$$\frac{\overline{(g\theta_b)^2 w}}{(g\theta_S)^2 w_S} = \lambda_{\theta\theta w}.$$

В теории локального подобия [Sorbjan, 1986; 1987; 1988; 1990; 1991] базовые параметры w_S и $g\theta_S$ были заданы соотношениями

$$w_S = z^{1/3} (gs_\theta)^{1/3}, \quad (12)$$

$$g\theta_S = z^{-1/3} (gs_\theta)^{2/3}.$$

Подстановка в приводит к равенствам. В условиях, когда $\lim_{z/h \rightarrow 0} gs_\theta = gS_\theta$, соотношения теории локального подобия [Sorbjan, 1986; 1987; 1988; 1990; 1991] переходят в соотношения, подобные формулам теории подобия Мони́на–Обухова.

Полученные результаты показывают, что на малых высотах $0 < z/h \ll 1$ все известные варианты теорий локального подобия имеют общую асимптотику, соответствующую аппроксимации теории подобия Мони́на–Обухова в режиме свободной конвекции.

Следует подчеркнуть, что известные теории локального подобия для аппроксимации данных в слое $0 < z/h < 0.5$ выбирают собственные коэф-

фициенты $\lambda_{ww} > 0$, $\lambda_{\theta\theta} > 0$ и $\lambda_{\theta\theta w} > 0$, которые отличаются от стандартных коэффициентов теории Мони́на–Обухова λ_{ww}^0 , $\lambda_{\theta\theta}^0$ и $\lambda_{\theta\theta w}^0$. Поэтому в поверхностном слое $0 < z/h < 0.1$ вертикальные профили турбулентных моментов теорий локального подобия и теории Мони́на–Обухова геометрически подобны, но не идентичны.

4. БАЗОВЫЕ ПАРАМЕТРЫ НОВОЙ ТЕОРИИ ЛОКАЛЬНОГО ПОДОБИЯ И ПОЛУЭМПИРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПРАНДТЛЯ

В настоящей работе рассмотрен новый вариант теории локального подобия, включающий базовые параметры полуэмпирической теории турбулентности Прандтля. В предложенном варианте локального подобия в качестве определяющих размерных параметров использованы второй момент вертикальной скорости $\overline{w^2} = \overline{w^2}(z)$ и путь перемешивания Прандтля $l_P = l_P(z)$. При этом мы дополнительно предполагаем, что путь перемешивания Прандтля l_P задан его спектральной формой $l_{PS}(z)$, подробнее см. [Hanna, 1968].

В рамках полуэмпирической теории Прандтля коэффициент турбулентного теплообмена K_H и диссипация энергии ε выражаются через параметры w^2 и l_P соотношениями

$$K_H = l_P \left(\overline{w^2} \right)^{1/2}, \quad (13)$$

$$\varepsilon = \lambda_\varepsilon l_P^{-1} \left(\overline{w^2} \right)^{3/2},$$

подробнее см. см. [Prandtl, 1925; 1932; Hinze, 1975].

Соотношения допускают интерпретацию в рамках теории размерности. Справедливость теории Прандтля показывает, что выбор пути перемешивания l_P и дисперсии вертикальной скорости w^2 в качестве базовых параметров теории подобия для параметров K_H и ε физически оправдан. Поэтому можно предположить эффективность аппроксимаций, выраженных через параметры w^2 и l_P , и для других турбулентных моментов. Сопоставление с экспериментальными данными подтверждает эту гипотезу. Таким образом, вариант локальной теории подобия с базовыми параметрами w^2 и l_P следует интерпретировать как теоретическое дополнение к полуэмпирической теории Прандтля.

Эффективность новой теории подтверждается

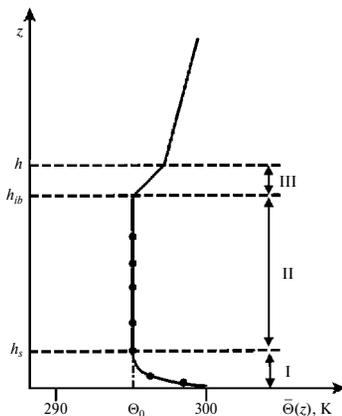


Рис. 1. Вертикальная структура конвективного пограничного слоя атмосферы и зависимость средней потенциальной температуры $\Theta(z)$ от высоты согласно измерениям в эксперименте Minnesota-1973, см. [Kaimal et al., 1976]. I – приземный слой атмосферы; II – слой перемешивания; III – инверсионный слой.

ее сопоставлением с известными теориями локального подобия. Аппроксимация локальной теории подобия [Sorbjan, 1986; 1987] соответствует эмпирическим данным не во всем конвективном слое $0 \leq z/h \leq 1$, а только в его нижней половине $0 \leq z/h \leq 0.5$. Предлагаемый вариант теории локального подобия опирается на более удачный выбор базовых параметров. Это обстоятельство обеспечивает аппроксимацию турбулентных моментов в более мощном слое $0 \leq z/h \leq 0.75$, расположенном ниже уровня температурной инверсии, и является практическим обоснованием использования базовых параметров l_p и w^2 .

5. “СПЕКТРАЛЬНЫЙ” ПУТЬ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ ПРАНДТЛЯ

В рамках теории Прандтля путь перемешивания рассматривается как некоторый “доминирующий” параметр длины, характеризующий турбулентное течение. В турбулентном слое с плоскими горизонтальными границами $l_p = l_p(z)$.

Далее для определения пути перемешивания Прандтля будет принят спектральный метод те-

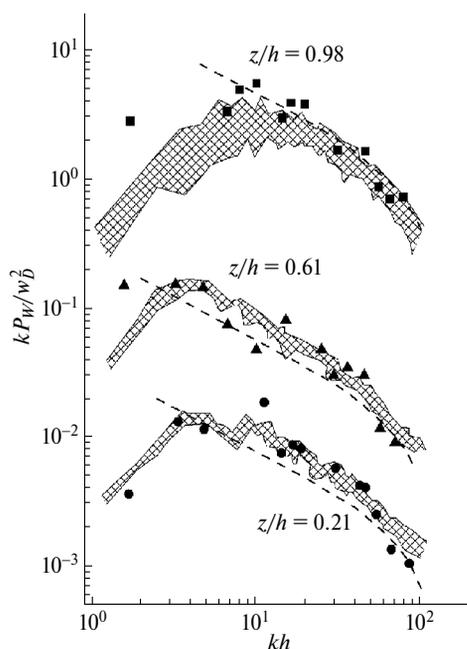


Рис. 2. Нормализованный спектр вертикальной скорости на высотах $z/h = 0.21$, $z/h = 0.61$ и $z/h = 0.98$. Штрихованная область представляет диапазон результатов численного моделирования [Schmidt, Schumann, 1989]. Геометрические символы представляют измерения [Deardorff, Willis, 1985] на различных высотах. Тонкие пунктирные линии соответствуют инерционной части спектра для фильтрованных измерений и пропорциональны $k^{-5/3}$. Данные умножены на 0,1, 1,0 и 100 для кривых $z/h = 0.21$, $z/h = 0.61$ и $z/h = 0.98$ соответственно.

ории турбулентности.

Пусть k – волновое число спектрального разложения квадрата вертикальной скорости w^2 на некотором уровне z/h ; $P_w(k)$ – спектральная плотность разложения квадрата вертикальной скорости w^2 ; $kP_w(k)/w_D^2$ – нормированная спектральная плотность вертикальной скорости на некотором уровне z/h , зависящая от kh .

Зависимость $kP_w(k)/w_D^2$ от безразмерной высоты kh согласно вычислениям [Schmidt, Schumann, 1989] представлена на рис. 2. В области коротких волн $k \gg 1$ располагается инерционная часть спектра.

Измерения, выполненные на фиксированных уровнях z/h конвективного пограничного слоя, указывают на существование длин волн Λ_{mw} , реализующих максимум в профилях спектров вертикальной скорости w . Следует заметить, что величина Λ_{mw} примерно соответствует интегральному масштабу турбулентности.

Данные экспериментальных наблюдений Λ_{mw}/h , полученные [Caughey, Palmer, 1979] в экспериментах Minnesota-1973 и Ashchurch-1974, представлены на рис. 3.

В настоящей работе в качестве аппроксимации измеренных величин Λ_{mw}/h использован многочлен третьей степени вида

$$\frac{\Lambda_{mw}}{h} = 2\pi\beta_P \frac{z}{h} \left\{ 1 - 0.8 \left(\frac{z}{h} \right) \right\}^2, \quad (14)$$

где $\beta_P = 1.2$ – постоянный коэффициент ($2\pi\beta_P = 7.54$).

Профиль кубической аппроксимации, изображенный на рис. 3, качественно воспроизводит форму измеренного вертикального профиля Λ_{mw} . При этом, согласно (14), доминирующий турбулентный масштаб Λ_{mw} сравнительно мал возле горизонтальных границ конвективного слоя и достигает максимума $\Lambda_{mw} \approx 1.4$ примерно на уровне $z/h = 0.4$.

Следуя идеям [Hanna, 1968] будем предполагать, что “спектральный” путь перемешивания Прандтля l_{PS} пропорционален длине волны Λ_{mw} , т.е.

$$l_{PS} = \gamma_P \Lambda_{mw}, \quad \Lambda_{mw} = \gamma_P^{-1} l_{PS}, \quad (15)$$

где $\gamma_P > 0$ – постоянный положительный коэффициент.

Существенно, что “спектральное” определение справедливо при любой форме профиля Λ_{mw} , аппроксимирующего экспериментальные

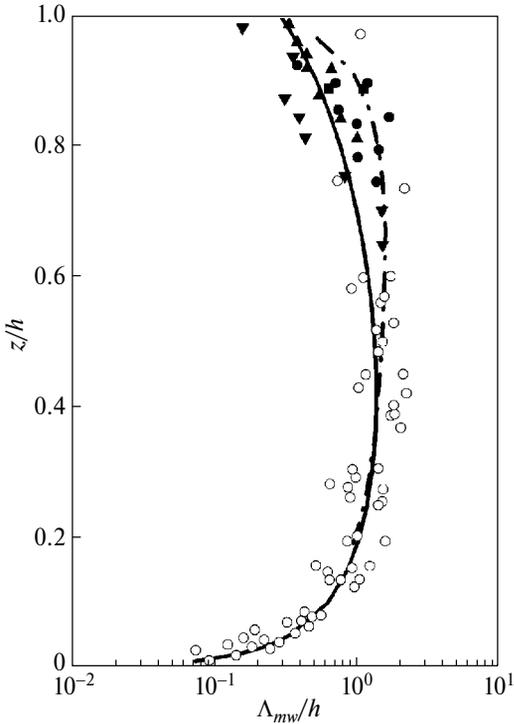


Рис. 3. Изменение с высотой безразмерной длины волны Λ_{mw}/h . Сплошная линия соответствует аппроксимации при значении коэффициента $\beta_p = 1.2$. Штрихпунктирная линия соответствует аппроксимации, предложенной [Caughey, Palmer, 1979]. Геометрические символы представляют натурные измерения [Caughey, Palmer, 1979]. Светлые кружки соответствуют данным эксперимента в Minnesota-1973. Черные кружки, треугольники и квадраты соответствуют данным эксперимента в Ashchurch-1974.

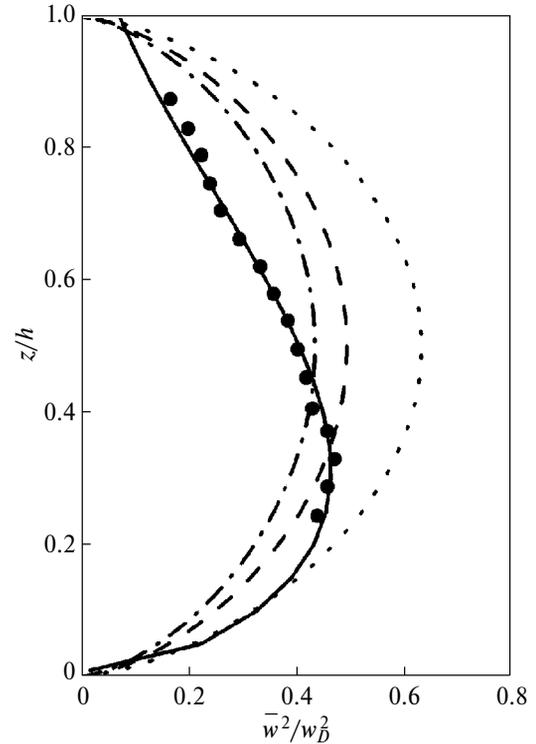


Рис. 4. Значения безразмерного второго момента вертикальной скорости, по данным [Ansmann et al., 2010]. Сплошная линия соответствует аппроксимации. Штриховая линия соответствует аппроксимации [Zeman, Lumley, 1976] с коэффициентом $\lambda_{vw}^z = 1.25$. Штрихпунктирная и пунктирные линии соответствуют [Sorbjan, 1986] и [Sorbjan, 1990] с коэффициентами $\lambda_{vw}^z = 1.1$ и $\lambda_{vw}^z = 1.6$ соответственно.

данные с приемлемой точностью и линейно изменяющегося с высотой вблизи подстилающей поверхности.

В исследовании [Hanna, 1968] предполагалось, что в уравнении коэффициент $\gamma_P = 1$. Подход [Hanna, 1968] широко используется в задачах распространения примеси, см., например, [Degrazia et al., 2015].

В настоящем исследовании коэффициент γ_P выбран так, чтобы в конвективном поверхностном слое $0 < z/h < 0.1$ аналитические формы коэффициента турбулентного теплообмена K_H в рамках теории Прандтля и теории Монина–Обухова были бы идентичны. Такое условие приводит к равенству $\gamma_P = k_0(\pi\beta_P)^{-1}$, где $k_0 = 0.4$ – постоянная Кармана.

При $\pi\beta_P = 3.77$ и $k_0 = 0.4$ коэффициент $\gamma_P = k_0(\pi\beta_P)^{-1} = 0.11$. Следовательно, согласно, “спектральный” путь перемешивания Прандтля

l_{PS} примерно в девять раз меньше длины волны Λ_{mw} . Существенно, что полученная оценка не зависит от формы профиля Λ_{mw} . Из соотношения $\gamma_P = k_0(\pi\beta_P)^{-1}$ немедленно следует, что

$$\frac{l_{PS}}{h} = 2k_0 \frac{z}{h} \left[1 - 0.8 \left(\frac{z}{h} \right) \right]^2. \quad (16)$$

Учитывая, что температурная инверсия воздействует на турбулентный поток несколько иначе, чем твердая стенка, соответствующая аппроксимация l_{PS} должна быть асимметричной, что и реализовано в аппроксимации.

В приземном слое вблизи от подстилающей поверхности $z/h \ll 1$, поэтому соотношение имеет асимптотику $l_{PS} = 2k_0 z$. Обоснование этого равенства приведено в приложении работы [Vulfson, Nikolaev, 2022]. Из аппроксимации следует, что $\max_{0 \leq z/h \leq 1} l_{PS}/h \approx 0.15$ при $z/h \approx 0.4$. Эта

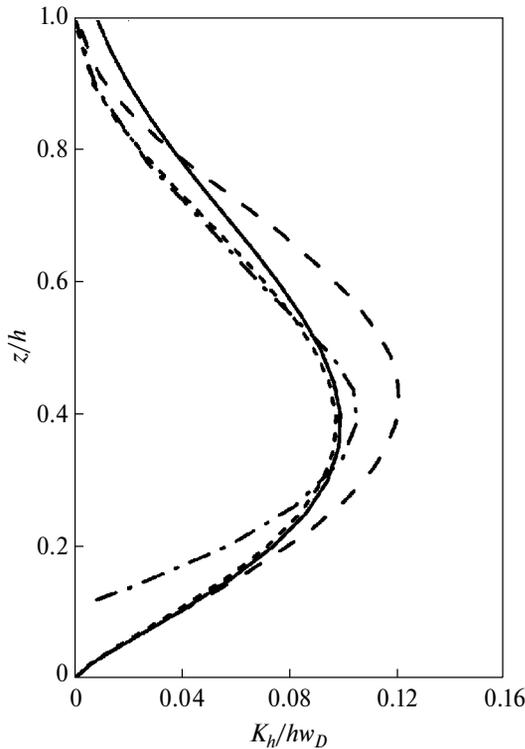


Рис. 5. Вертикальные профили безразмерных коэффициентов турбулентности. Штрихпунктирная линия соответствует аппроксимации численных расчетов [Abdella, Mcfarlane, 1997]. Линия коротких штрихов соответствуют аппроксимации численных расчетов [Holtslag, Moeng, 1991]. Линия длинных штрихов соответствует аппроксимации [Kristensen et al., 2010]. Сплошная линия соответствует аппроксимации при значении коэффициента $\lambda_K = 1.1$.

величина совпадает со средним размером малых термик (теплых вихрей), реализующих турбулентный теплообмен. На это обстоятельство специально указывал Прандтль при построении своей теории пути перемешивания.

Кубический профиль $9.1 \cdot (l_{PS}/h)$, равный Λ_{mw}/h и пропорциональный (16), изображен на рис. 3 сплошной линией.

6. ВТОРОЙ МОМЕНТ ВЕРТИКАЛЬНОЙ СКОРОСТИ

Далее для аппроксимации второго момента вертикальной скорости $\overline{w^2}$ будет использовано соотношение

$$\frac{\overline{w^2}}{w_D^2} = \lambda_{ww}^o \left(\frac{z}{h}\right)^{2/3} \left\{ 1 - 0.8 \left(\frac{z}{h}\right) \right\}^2, \quad (17)$$

$$\lambda_{ww}^o = 1.8.$$

Аппроксимация (17) получена при обработке данных экспериментов АМТЕХ 1975 и АММА-

2006 и предложена в работах [Lenschow et al., 1980; Lenschow et al., 2012].

Различные аппроксимации второго момента вертикальной скорости $\overline{w^2}/w_D^2$ в атмосфере и их сравнение подробно обсуждались в работе [Wood et al., 2010]. В этой работе было показано, что аппроксимация (17) является статистически наиболее точной из существующих аппроксимаций.

При $0 \leq z/h < 0.1$ уравнение (17) примет форму (8) с коэффициентом $\lambda_{\theta\theta}^o = 1.8$, установленным по измерениям в эксперименте Kansas-1968, см. работы [Priestley, 1959; Wyngaard et al., 1971]. Таким образом, базовый параметр (17) согласован теорией Монина–Обухова.

На рис. 4. представлены данные натурального эксперимента AVEC-2006 о втором моменте вертикальной скорости $\overline{w^2}$, полученные в работе [Ansmann et al., 2010]. Геометрические символы представляют данные измерений, сплошная линия соответствует аппроксимации (17). На рис. рис. 4. изображены также аппроксимации $\overline{w^2}$ принятые в других известных теориях локального подобия. Штриховая линия соответствует аппроксимации [Zeman, Lumley, 1976] с коэффициентом $\lambda_{ww}^z = 1.25$. Штрихпунктирная и пунктирная линии соответствуют аппроксимациям [Sorbjan, 1986] и [Sorbjan, 1990] с коэффициентами $\lambda_{ww}^{zs} = 1.1$ и $\lambda_{ww}^{zs} = 1.6$ соответственно.

Результаты, представленные на рис. 4, являются экспериментальным обоснованием выбора $\overline{w^2}$ в форме (17) в качестве базового параметра.

7. КОЭФФИЦИЕНТ ТУРБУЛЕНТНОГО ОБМЕНА

Согласно классической теории подобия Монина–Обухова и с учетом параметров Дирдорфа коэффициент турбулентного теплообмена поверхностного слоя K_H в условиях свободной конвекции примет вид

$$K_H = \lambda_K (gS_\theta)^{1/3} z^{4/3},$$

$$\frac{K_H}{h \cdot w_D} = \lambda_K \left(\frac{z}{h}\right)^{4/3}, \quad (18)$$

$$0 \leq z/h \leq 0.1.$$

где $\lambda_K \sim 1$ постоянный коэффициент. Соотношение (18) было впервые получено в [Обухов, 1946].

Универсальную полиномиальную аппроксима-

цию K_H для неподвижного конвективного слоя, согласованную с классической теорией подобия Мони́на-Обухова, можно представить в виде

$$\frac{K_H}{h \cdot w_D} = C_K(P) \cdot \left(\frac{z}{h}\right)^{4/3} \left\{1 - \frac{z}{h}\right\}^P, \quad (19)$$

$$0 \leq z/h \leq 1.$$

Здесь $P > 0$ – рациональный показатель степени; $C_K(P) > 0$ – функция показателя степени, зависящая от выбранной модели.

Аппроксимации классического подобия (19) с показателями $P = 1/3$, $C_K(1/3) = 1.7$; $P = 2$, $C_K(2) = 1$ и $P = 2$, $C_K(2) = 0.8$ были предложены в работах [Sorbjan, 1990], [Holtslag, Moeng, 1991] и [Noh et al., 2003] соответственно.

Полуэмпирическая теория турбулентности Прандтля позволяет построить аналитические выражения для коэффициента турбулентного теплообмена K_H , включающие путь перемешивания Прандтля l_P . Возможность использования спектрального пути перемешивания l_{PS} в форме Λ_{mw} для вычисления коэффициента турбулентного теплообмена K_H рассматривалась в работах

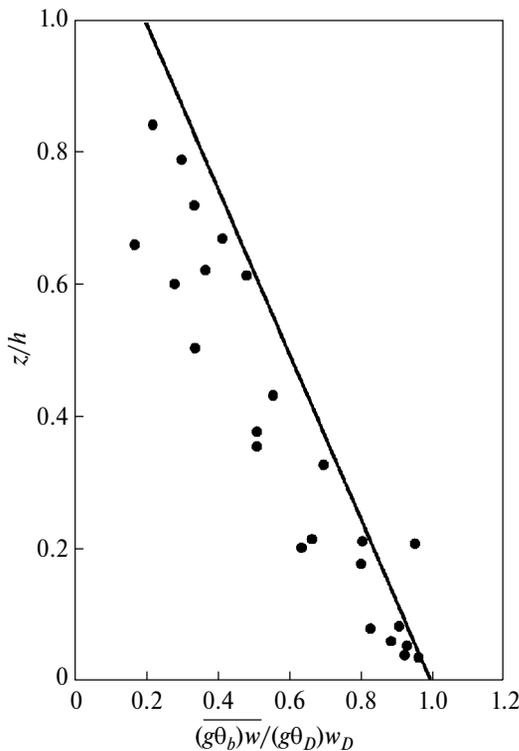


Рис. 6. Безразмерный момент “бусинесковской” плавучести согласно натурному эксперименту ARTIST-1999, представленному в работе [Gryanik, Hartmann, 2002]. Сплошная линия соответствует аппроксимации с коэффициентом $\lambda_{\theta w}^0 = 1$.

[Sun, Chang, 1986; Zhang, Drennan, 2012; Degrazia et al., 2015].

Рассмотрим аппроксимацию профиля коэффициента турбулентного обмена K_H в рамках теории локального подобия. Подстановка базовых параметров, (16), (17) в формулу Прандтля $K_H = l_P (\overline{w^2})^{1/2}$ приводит к выражению

$$\frac{K_H}{h \cdot w_D} = \lambda_K \left(\frac{z}{h}\right)^{4/3} \left\{1 - 0.8 \left(\frac{z}{h}\right)\right\}^3, \quad (20)$$

$$\lambda_K = \alpha_P \cdot \lambda_{ww}^{1/2},$$

где λ_K – постоянный коэффициент. При $\lambda_{ww} = 1.8$ и $\alpha_P = 0.8$ найдем, что $\lambda_K = \alpha_P \cdot \lambda_{ww}^{1/2} = 1.1$.

Сопоставление аппроксимации (20) при значении коэффициента $\lambda_K = 1.1$ с результатами численных расчетов [Holtslag, Moeng, 1991; Abdella, Mcfarlane, 1997], а также с аналитической аппроксимацией [Kristensen et al., 2010] представлено на рис. 5.

Натурные измерения коэффициента турбулентности K_H сопряжены со значительными трудностями. Однако представленные результаты численного моделирования убедительно демонстрируют возможность приложения теории Прандтля к описанию коэффициента турбулентного теплообмена.

8. УНИВЕРСАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ТУРБУЛЕНТНЫХ МОМЕНТОВ ВЕРТИКАЛЬНОЙ СКОРОСТИ И ПЛАВУЧЕСТИ

Для аппроксимации произвольных турбулентных моментов p -го порядка можно предложить общее уравнение. Используем соотношение размерности $[g\theta_b] = [l_P^{-1} \overline{w^2}] = \text{м/с}^2$, тогда в соответствии с предложенной теорией локального подобия общее выражение для турбулентных моментов p -го порядка примет вид

$$\overline{(g\theta_b)^m w^n} = \lambda_{mn}^{(p)} l_{PS}^{-m} (\overline{w^2})^{m+n/2}, \quad (21)$$

$$0 \leq m, \quad n \leq p, \quad m+n = p.$$

Здесь $\lambda_{mn}^{(p)} > 0$ – неизвестные постоянные, включенные в соотношения турбулентных моментов; $m \geq 0$, $n \geq 0$, $p \geq 2$ – целые неотрицательные индексы.

Полученное в рамках теории локального подобия универсальное уравнение для моментов турбулентной конвекции (21) является существенным дополнением к теории Прандтля.

9. ПРОФИЛИ ВТОРЫХ МОМЕНТОВ ПУЛЬСАЦИЙ ВЕРТИКАЛЬНОЙ СКОРОСТИ И ПЛАВУЧЕСТИ

Аппроксимация локального подобия для вторых моментов соответствует случаю $p = 2$, $m + n = p$. Рассмотрим для определенности смешанный турбулентный момент, для которого $m = 1$, $n = 1$. Преобразование общего уравнения локального подобия с учетом базовых параметров, приводит к равенству

$$\frac{\overline{g\theta_b w}}{g\theta_D w_D} = \lambda_{\theta w}^o \left\{ 1 - 0.8 \left(\frac{z}{h} \right) \right\}, \quad (22)$$

где $\lambda_{\theta w}^o$ – постоянный числовой параметр. Коэффициент $\lambda_{\theta w}^o = 1$, так как, согласно определению параметров Дирдорфа, произведение $g\theta_D w_D$ представляет поток тепла на подстилающей поверхности.

На рис. 6 изображены данные измерений второго безразмерного момента плавучести, полученные в натурном эксперименте ARTIST-1999 и представленные в работе [Gryanik, Hartmann, 2002], а также их аппроксимация (22).

Результаты данного сопоставления показывают, что форма является верхней оценкой экспериментальных данных в конвективном слое $0 < z/h < 1$.

10. ПРОФИЛИ ТРЕТЬИХ МОМЕНТОВ ПУЛЬСАЦИЙ ВЕРТИКАЛЬНОЙ СКОРОСТИ И ПЛАВУЧЕСТИ

Аппроксимация локального подобия для третьих моментов соответствует случаю $p = 3$, $m + n = p$. Рассмотрим для определенности смешанный турбулентный момент, для которого $m = 3$, $n = 1$. Преобразование общего уравнения локального подобия (21) с учетом базовых параметров (16), (17) приводит к равенству

$$\frac{\overline{(g\theta_b)^2 w}}{(g\theta_D)^2 w_D} = \lambda_{\theta\theta w}^o \left(\frac{z}{h} \right)^{-1/3} \left\{ 1 - 0.8 \left(\frac{z}{h} \right) \right\}, \quad (23)$$

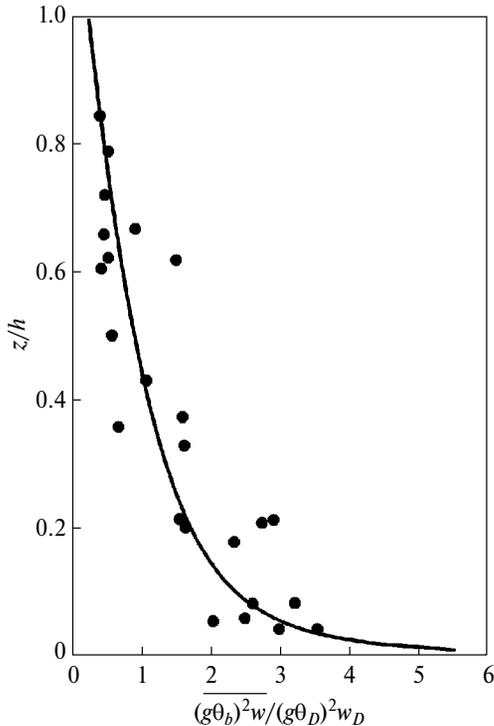


Рис. 7. Зависимость нормированного момента третьего порядка $(g\theta_b)^2 w / (g\theta_D)^2 w_D$ от нормированной высоты z/h и его аппроксимация аналитическим соотношением (23). Точки – экспериментальные данные ARTIST–1999 согласно [Gryanik, Hartmann, 2002]. Сплошная линия – аппроксимация с коэффициентом $\lambda_{\theta\theta w}^o = 1.2$.

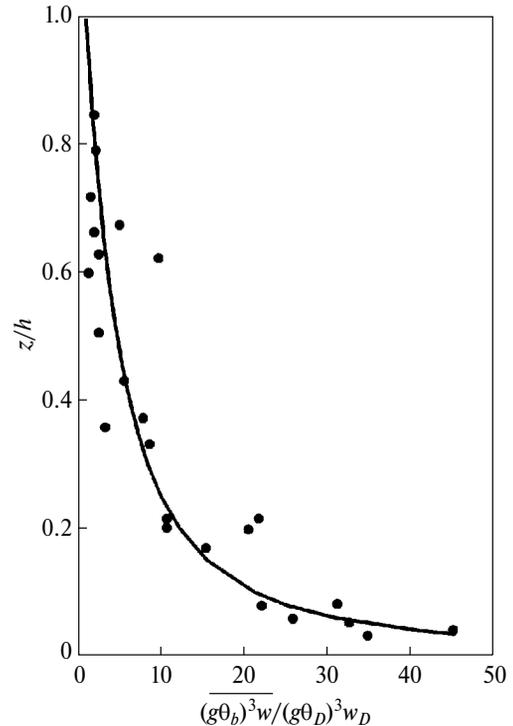


Рис. 8. Зависимость нормированного момента четвертого порядка $(g\theta_b)^3 w / (g\theta_D)^3 w_D$ от нормированной высоты z/h и его аппроксимация аналитическим соотношением (24). Точки – экспериментальные данные ARTIST–1999 согласно [Gryanik, Hartmann, 2002]. Сплошная линия – аппроксимация с коэффициентом $\lambda_{\theta\theta\theta w}^o = 5$.

где $\lambda_{\theta\theta w}^o$ — постоянный числовой параметр.

В приземном конвективном слое атмосферы $0 \leq z/h \leq 0.1$ соотношения редуцируются к форме (8).

Существенно, что величины этих постоянных могут быть определены экспериментально по измерениям в поверхностном слое. Значения подобных постоянных определены в рамках теории Мони́на—Обухова.

Так, например, $\lambda_{\theta\theta w}^o = 1.1$ согласно данным эксперимента Kanzass-1968, подробнее см. [Kaimal et al., 1976].

На рис. 7 приведены данные измерений третьего момента $(g\theta_b)^2 w$ в эксперименте ARTIST-1999 согласно [Gryanik, Hartmann, 2002]. На рис. 7 представлена также аппроксимация (23) с коэффициентом $\lambda_{\theta\theta w}^o = 1.2$, изображенная сплошной линией.

Натурные данные обо всех третьих моментах получены в эксперименте АМТЕХ-1974 и приведены в работе [Lenschow et al., 1980].

11. ПРОФИЛИ ЧЕТВЕРТЫХ МОМЕНТОВ ПУЛЬСАЦИЙ ВЕРТИКАЛЬНОЙ СКОРОСТИ И ПЛАВУЧЕСТИ

Аппроксимация локального подобия для четвертых моментов соответствует случаю $p = 4$, $m + n = p$. Рассмотрим для определенности смешанный турбулентный момент, для которого $m = 3$, $n = 1$. Преобразование общего уравнения локального подобия (21) с учетом базовых параметров (16), (17) приводит к равенству

$$\frac{\overline{(g\theta_b)^3 w}}{(g\theta_D)^3 w_D} = \lambda_{\theta\theta\theta w}^o \left(\frac{z}{h}\right)^{-2/3} \left\{1 - 0.8\left(\frac{z}{h}\right)\right\}. \quad (24)$$

Принципиально значение постоянной $\lambda_{\theta\theta\theta w}^o$ может быть определено экспериментально по измерениям в поверхностном слое. Однако уникальный характер эксперимента ARTIST не позволяет определить этот коэффициент по другим данным.

На рис. 8 приведено сопоставление данных эксперимента ARTIST-1999, согласно [Gryanik, Hartmann, 2002] и аппроксимации безразмерного четвертого момента при значении коэффициента $\lambda_{\theta\theta\theta w}^o = 5$.

Результаты, представленные на рис. 8, убедительно подтверждают справедливость предложенной теории локального подобия.

11. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рассмотренном варианте локальной теории подобия в качестве базовых параметров приняты два размерных параметра: путь перемешивания Прандтля и второй момент вертикальной скорости. Для пути перемешивания использовано конструктивное определение, основанное на спектральной теории.

Соображения размерности позволяют выразить статистические средние турбулентного конвективного слоя в форме обобщенных одночленов, зависящих от пути перемешивания и второго момента вертикальной скорости. В теории локального подобия такая комбинация базовых размерных параметров использована впервые.

Предложенная теория является серьезным дополнением к теории Прандтля, т.к. предлагает ряд более новых аппроксимаций турбулентных моментов вертикальной скорости и плавучести, зависящих от пути перемешивания и второго момента вертикальной скорости.

Аппроксимации новой теории локального подобия идентичны свободно конвективным пределам поверхностного слоя. Поэтому новая теория локального подобия обобщает теорию Мони́на—Обухова в режиме свободной конвекции и не требует использования дополнительных констант.

Результаты, представленные на рис. 6–8, указывают на соответствие новой теории локального подобия экспериментальным данным в слое $0 \leq z/h \leq 0.85$, высота которого представляет нижнюю границу слоя инверсии, см. рис. 1. Заметим, что известные теории локального подобия соответствуют полевым измерениям в менее глубоком слое $0 \leq z/h \leq 0.5$. Поэтому с практической точки зрения предложенная теория локального подобия является наиболее эффективной.

Работа выполнена в рамках темы № FMWZ-2022-0001 Государственного задания ИВП РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Вульфсон А.Н., Бородин О.О. Система конвективных термиком как обобщенный ансамбль броуновских частиц // Успехи физических наук. 2016. Т. 186.

- № 2. С. 113–124.
- Вульфсон А.* Уравнения глубокой конвекции в сухой атмосфере // Известия АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1981. Т. 17. № 8. С. 873–876.
- Вульфсон А., Володин И., Бородин О.* Локальная теория подобия и универсальные профили турбулентных характеристик конвективного пограничного слоя // Метеорология и гидрология. 2004. № 10. С. 5–15.
- Обухов А.М.* Турбулентность в температурно-неоднородной атмосфере // Тр. Ин-та теорет. геофизики АН СССР. 1946. Т. 1. С. 95–115.
- Abdella K., Mcfarlane N.* A new second-order turbulence closure scheme for the planetary boundary layer // J. Atmos. Sci. 1997. V. 54. № 14. P. 1850–1867.
- Ansmann A., Fruntke J., Engelmann R.* Updraft and down draft characterization with Doppler lidar: cloud-free versus cumuli-topped mixed layer // Atmos. Chem. Phys. 2010. P. 14.
- Barenblatt G.I.* Scaling, Self-similarity, and Intermediate Asymptotics. Cambridge University Press, 1996.
- Buckingham E.* On physically similar systems; Illustrations of the use of dimensional equations // Phys. Rev. 1914. V. 4. № 4. P. 345–376.
- Caughey S.J., Palmer S.G.* Some aspects of turbulence structure through the depth of the convective boundary layer // Quarterly J. Royal Meteorological Society. 1979. V. 105. № 446. P. 811–827.
- Deardorff J.W., Willis G.E.* Further results from a laboratory model of the convective planetary boundary layer // Boundary-Layer Meteorology. 1985. V. 32. № 3. P. 205–236.
- Degrazia G.A. et al.* Eddy diffusivities for the convective boundary layer derived from LES spectral data // Atmos. Pollut. Res. 2015. V. 6. № 4. P. 605–611.
- Fodor K., Mellado J.P.* New insights into wind shear effects on entrainment in convective boundary layers using conditional analysis // J. Atmos. Sci. 2020. V. 77. № 9. P. 3227–3248.
- Gryanik V.M., Hartmann J.A.* Turbulence closure for the convective boundary layer based on a two-scale mass-flux approach // J. Atmos. Sci. 2002. V. 59. № 18. P. 2729–2744.
- Hanna S.R.* A method of estimating vertical eddy transport in the planetary boundary layer using characteristics of the vertical velocity spectrum // J. Atmos. Sci. 1968. V. 25. № 6. P. 1026–1033.
- Hinze J.O.* Turbulence. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, NY, 1975. 790 с.
- Holtslag A.A.M., Moeng C.-H.* Eddy Diffusivity and countergradient transport in the convective atmospheric boundary layer // J. Atmos. Sci. 1991. V. 48. № 14. P. 1690–1698.
- Kader B.A., Yaglom A.M.* Mean fields and fluctuation moments in unstably stratified turbulent boundary layers // J. Fluid Mech. 1990. V. 212. № 151. P. 637–662.
- Kaimal J.C. et al.* Turbulence structure in the convective boundary layer. // J. Atmos. Sci. 1976. V. 33. № 11. P. 2152–2169.
- Kristensen L. et al.* A simple model for the vertical transport of reactive species in the convective atmospheric boundary layer // Boundary-Layer Meteorology. 2010. V. 134. № 2. P. 195–221.
- Lenschow D.H. et al.* A comparison of higher-order vertical velocity moments in the convective boundary layer from lidar with In situ measurements and large-eddy simulation // Boundary-Layer Meteorology. 2012. V. 143. № 1. P. 107–123.
- Lenschow D.H., Wyngaard J.C., Pennell W.T.* Mean-field and second-moment budgets in a baroclinic, convective boundary layer. // J. Atmos. Sci. 1980. V. 37. № 6. P. 1313–1326.
- Mahrt L.* On the shallow motion approximations // J. Atmos. Sci. 1986. V. 43. № 10. P. 1036–1044.
- Monin A.S., Yaglom A.M.* Mechanics of turbulence. Statistical Fluid Mechanics. Cambridge: MIT Press. 1975.
- Noh Y. et al.* Improvement of the K-profile model for the planetary boundary layer based on large eddy simulation data // Boundary-Layer Meteorology. 2003. V. 107. № 2. P. 401–427.
- Prandtl L.* 7. Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz // ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics // ZAMM. 1925. V. 5. № 2. P. 136–139.
- Prandtl L.* Meteorologische anwendung der stromungslehre // Beitr. Phys. fr. Atmosphäre. 1932. V. 19. № 3. P. 188–202.
- Schmidt H., Schumann U.* Coherent structure of the convective boundary layer derived from large-eddy simulations // J. Fluid Mech. 1989. V. 200. № D11. P. 511–562.
- Sorbjan Z.* Comments on “scaling the atmospheric boundary layer” // Boundary-Layer Meteorology. 1987. V. 38. № 4. P. 411–413.
- Sorbjan Z.* Evaluation of local similarity functions in the convective boundary layer // Journal of Applied Meteorology. 1991. V. 30. № 12. P. 1565–1583.
- Sorbjan Z.* Local similarity in the convective boundary layer (CBL) // Boundary-Layer Meteorology. 1988. V. 45. № 3. P. 237–250.
- Sorbjan Z.* On similarity in the atmospheric boundary layer // Boundary-Layer Meteorology. 1986. V. 34. № 4. P. 377–397.
- Sorbjan Z.* Similarity scales and universal profiles of statistical moments in the convective boundary layer // J. Appl. Meteorol. 1990. V. 29. № 8. P. 762–775.
- Spiegel E.A., Veronis G.* On the Boussinesq Approximation for a Compressible Fluid // ApJ. 1960. V. 131. P. 442.
- Vulfson A.N., Borodin O.O.* Brownian ensemble of random-radius buoyancy vortices and Maxwell velocity distribution in a turbulent convective mixed-layer // Phys. Fluids. 2018. V. 30. № 9. P. 095103.
- Vulfson A., Nikolaev P.* Local similarity theory of convective turbulent layer using “spectral” Prandtl mixing length and second moment of vertical velocity // J. Atmos. Sci. 2022. V. 79. № 1. P. 101–118.
- Wilson D.K.* An alternative function for the wind and temperature gradients in unstable surface layers // Boundary-Layer Meteorology. 2001. V. 99. № 1. P. 151–158.
- Wood C.R. et al.* Turbulent flow at 190 m height above Lon-

don during 2006–2008: a climatology and the applicability of similarity theory // *Boundary-Layer Meteorology*. 2010. V. 137. № 1. P. 77–96.

Zeman O., Lumley J.L. Modeling buoyancy driven mixed layers // *J. Atmos. Sci.* 1976. T. 33. № 10. C. 1974–1988.

A Variant of the Local Similarity Theory and Approximations of Vertical Profiles of Turbulent Moments of the Atmospheric Convective Boundary Layer

A. N. Vulfson^{1, 2, *}, P. V. Nikolaev³

¹*Institute of Water Problems of the Russian Academy of Sciences, Gubkina str., 3, Moscow, 119333 Russia*

²*National Research University “Higher School of Economics”, Myasnitskaya str., 20, Moscow, 101000 Russia*

³*National University of Science and Technology MISIS, Leninsky Prosp., 4, p. 1, Moscow, 119049 Russia*

*e-mail: vulfson@iwp.ru

The approximation of the turbulent moments of the atmospheric convective layer is based on a variant of the local similarity theory using the concepts of the semi-empirical theory of Prandtl turbulence. In the proposed variant of the local similarity theory, the second moment of vertical velocity and the “spectral” Prandtl mixing length are used as basic parameters. This approach allows us to extend Prandtl’s theory to turbulent moments of vertical velocity and buoyancy and additionally offer more than ten new approximations. The comparison of the proposed approximation with other variants of the theory of local similarity is considered. It is shown that the selected basic parameters significantly improve the agreement between the local similarity approximations and experimental data. The approximations are consistent with observations in the turbulent convective layer of the atmosphere, the upper boundary of which nearly corresponds to the lower boundary of the temperature inversion. Analytical approximations of local similarity can find applications in the construction of high-order moment closures in the vortex of resolving numerical turbulence models, as well as in the construction of “mass-flux” parametrization.

Keywords: convective boundary layer, local similarity theory, Prandtl semi-empirical theory of turbulence