

УДК 532.529:544.77

## ДВИЖЕНИЕ КАПЛИ ДОЖДЯ В АТМОСФЕРЕ, СОДЕРЖАЩЕЙ АЭРОЗОЛЬНЫЕ ЧАСТИЦЫ

© 2024 г. Т. Р. Аманбаев\*

Южно-Казахстанский университет им. М.О. Ауэзова,  
просп. Тауке хана, 5, Шымкент, 160012 Казахстан

\*e-mail: tulegen\_amanbaev@mail.ru

Поступила в редакцию 22.05.2023 г.

После доработки 28.10.2023 г.

Принята к публикации 15.11.2023 г.

Построена математическая модель динамики дождевой капли, движущейся в поле силы тяжести через атмосферу, содержащую мелкодисперсные частицы, с учетом процессов релаксации ее скорости и захвата мелких частиц. Установлено, что уравнение движения капли в поставленной задаче относится к классу сингулярно возмущенных уравнений, для интегрирования которых необходимо привлекать специальные алгоритмы. В предельных режимах движения капли получены аналитические решения задачи, описывающие зависимости скорости и координаты капли от времени. В полной постановке решения задачи получены численно при разных значениях определяющих параметров. Изучено влияние размера капли на параметры ее движения в концентрированной аэродисперсной смеси. Получены зависимости предельной объемной доли твердого компонента в составе капли и интенсивности выпадения частиц (вымываемых каплей) на поверхность земли от размера капли. Проведено сравнение расчетной, приближенно-аналитической и экспериментальной зависимостей установившейся скорости падения капли от ее размера, которое показало их хорошее согласие.

**Ключевые слова:** капля, аэрозольные частицы, число Рейнольдса, стоксовый режим, ньютоновский режим, установившаяся скорость, сдвиговое течение  
**DOI:** 10.31857/S0002351524010108

### ВВЕДЕНИЕ

Наибольшая опасность антропогенных загрязнений состоит в их возможных локально высоких концентрациях на ограниченных пространствах. Природные выбросы, например, вулканические, при общем большом количестве выбрасываемых компонентов рассеиваются обычно на больших площадях, поскольку высота, на которой оказываются компоненты, весьма значительна. При антропогенных выбросах вредных веществ, когда высоты выбросов невелики, такого масштабного рассеивания в атмосфере не происходит, и локальные концентрации могут на много порядков превосходить естественный фон [Тимашев, 1991]. Большое значение для перераспределения в атмосфере и попадания в гидросферу техногенных примесей, выбрасываемых на небольшую высоту, могут иметь атмосферные осадки в виде дождя [Воротынцев и Малышев, 1997]. Растворяясь в дождевых каплях, примеси могут переноситься с каплями в атмосфере, по-

падая в грунт и воду. В связи с этим представляет интерес изучение концентрирования дисперсных примесей в капле дождя, движущейся в аэродисперсной смеси. Таким образом, вопросы исследования динамики дождевых капель в аэродисперсных системах, распространяющихся в атмосферном воздухе, актуальны для решения задач, связанных с оценками загрязнения земли и водоемов аэрозольными частицами природного и техногенного происхождения, которые вымываются осадками из атмосферы. Исследования в этой области позволят усовершенствовать методы прогнозирования поведения аэродисперсных систем в атмосфере.

Динамика тяжелых аэрозольных частиц (капель) в атмосферных сдвиговых и вихревых течениях с учетом нелинейного гидродинамического сопротивления в установившемся режиме теоретически исследована в [Ингель, 2012; Ингель, 2021]. В [Sharigo, 2005] изучено влияние горизонтального потока различного типа (ступенчатого, непрерывного и т.п.), моделирующего боковой

ветер, на нестационарный обмен импульсом между воздухом и падающими каплями дождя. В [Edwards et al., 2001] исследована динамика падающих капель в дождевых облаках с учетом массообмена между каплями за счет их столкновений и получены приближенные аналитические решения задачи при упрощающих допущениях. Кинетика вымывания аэрозольных частиц из атмосферы дождевыми каплями рассмотрена в [Припачкин, Будыка, 2020], где подробно проанализировано влияние параметров частиц и дисперсионной среды на эффективность захвата частиц системой капель и коэффициент вымывания при различных интенсивностях осадков. В [Chang-Jin Ma, Gong-Unn Kang, 2019] путем сбора дождевых капель и последующего анализа их химического состава (наблюдения проводились в г. Фукуока, Япония) изучалась эффективность поглощения частиц каплями дождя. Обнаружены значительные концентрации частиц различных химических элементов (в том числе, свинца) в составе отдельной капли, и тем самым наглядно показана существенная роль дождя в вымывании вредных примесей из атмосферы.

Хотя движению тяжелых частиц (капель) в газообразных и жидких средах посвящена обширная литература (см., например, [Матвеев, 1984; Reist, 1984; Нигматулин, 1987; Волков, Емельянов, 2008; Губайдуллин, Осипов, 2020]), законы движения частицы (капли), как отмечено в [Ингель, 2012], даже в простейшем сдвиговом потоке в общем виде с учетом нелинейных эффектов исследованы недостаточно. Мало изучена задача о движении капель в атмосферном воздухе в полной постановке включая периода релаксации скорости (в основном, анализируется установившееся (стационарное) движение дисперсных включений). Также требует подробного изучения движение капли дождя в запыленной атмосфере, когда мельчайшие частички пыли (природного или антропогенного происхождения) осаждаются на каплях и тем самым влияют (в зависимости от концентрации частиц) на динамику дождевой капли и переносу дисперсных веществ в атмосфере и на земную поверхность.

Цель настоящей работы – построить математическую модель для описания движения капли дождя через аэрозольное облако с учетом бокового ветра и улавливания мелких частиц каплей, а также аналитически и численно проанализировать влияние указанных факторов на поведение

дождевой капли в атмосфере. При этом особое внимание необходимо обратить на закономерности накопления мелкодисперсной примеси в составе капли, поскольку в ряде случаев (например, при загрязнении атмосферы частицами радиоактивных или других опасных веществ [Budyka, Ogorodnikov, 1999; Chang-Jin Ma, Gong-Unn Kang, 2019]) даже малая доля вредной примеси имеет большое значение в вопросах переноса и распространения таких веществ дождевыми каплями.

## ОСНОВНЫЕ ДОПУЩЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим движение одиночной капли дождя в подоблачной аэродисперсной смеси (запыленном воздухе) под действием силы тяжести и бокового ветра. Примем следующие допущения: концентрация капель в воздухе незначительна (концентрация дождевых капель даже при интенсивном дожде не превышает  $10^3 \text{ м}^{-3}$ , причем основную долю их составляют капли диаметром меньше 1000 мкм [Marshall and Palmer, 1948]), так что соседние капли не оказывают влияния на поле течения воздуха вблизи капли при ее движении; аэрозольные частицы достаточно мелкие (обычно их размеры на 3–4 порядка меньше характерного размера капель [Припачкин, Будыка, 2020]), что позволяет пренебречь инерционными эффектами и седиментацией частиц в дисперсной смеси и считать, что скорости газа и частиц совпадают (односкоростное приближение, такие среды обычно называют эффективным газом, а его составляющие – компонентами [Нигматулин, 1987]); капли дождя и аэрозольные частицы имеют сферическую форму, т.е. не деформируются и не дробятся (некоторое обоснование предположения об отсутствии деформации капли в пределах заданных интервалов значений определяющих параметров приведено ниже в разделе, где обсуждаются результаты расчетов); фазовые превращения (испарение, конденсация) отсутствуют, однако имеет место массообмен между каплей и окружающей средой, обусловленный захватом мелкодисперсной примеси каплей (в частности, мелкие частицы могут осаждаться на каплю за счет эффекта зацепления, связанного с конечными размерами частиц); нестационарными силами присоединенных масс и Бассе можно пренебречь (поскольку согласно оценкам, приведенным в [Ивандаев,

1985] при условии, когда плотность несущей среды намного меньше плотности капли, такое допущение вполне справедливо); изменениями давления, плотности и температуры воздуха по высоте пренебрегается, поскольку согласно таблице стандартной атмосферы в пределах высоты ~500 м, где в основном образуются дождевые капли, параметры воздуха меняются достаточно слабо; силой Архимеда пренебрегается, так как плотность воздуха намного меньше плотности капли. Возможны течения аэродисперсной смеси в подоблачном пространстве (например, в сдвиговом потоке, приближенно моделирующем боковой ветер). Распределение дисперсных примесей считается однородным, хотя могут возникать неоднородные распределения концентрации аэрозолей в атмосфере вокруг источников загрязнений [Turner, 1994].

Параметры эффективного газа обозначим нижним индексом 1, параметры компонентов эффективного газа, т.е. собственно газа и мелких частиц, — нижними индексами  $lg$  и  $lp$  соответственно, а параметры жидкого и твердого (появляющегося из-за захвата частиц каплей) составляющих капли — индексами  $l$ ,  $p$ . Параметры самой капли (масса, диаметр, скорость и т.п.) обозначены без индекса. В рамках принятых допущений уравнения массы и импульса капли в поле силы тяжести в аэродисперсном потоке с учетом осаждения частиц на поверхность капли, а также кинематическое соотношение, позволяющее вычислить радиус-вектор капли, можно записать в виде

$$\frac{dm}{dt} = j, \quad \frac{dm\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} + m\mathbf{g} + j\mathbf{v}_1, \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \quad (1)$$

$$\mathbf{f} = \frac{1}{8}\pi d^2 \rho_g^\circ C |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}| (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}),$$

$$m = m_l + m_p, \quad V = V_l + V_p, \quad d = \left(\frac{6}{\pi} V\right)^{1/3}, \quad (2)$$

$$V_u = m / \rho^\circ, \quad V_p = m_p / \rho_p^\circ,$$

$$(m_l, V_l, \rho_l^\circ, \rho_p^\circ, \rho_g^\circ) \quad (3)$$

Здесь  $m$ ,  $V$ ,  $d$  — масса, объем и диаметр капли,  $m_l$ ,  $m_p$ ,  $V_l$ ,  $V_p$  — массы и объемы жидкой и твердой составляющих капли,  $\rho_l^\circ$ ,  $\rho_p^\circ$ ,  $\rho_g^\circ$  — истинные плотности капли, частиц и газообразной среды (считаются постоянными),  $j$  — интенсивность осаждения частиц на поверхность капли (интенсивность пылеулавливания),  $\mathbf{f}$ ,  $C$  — сила и коэф-

фициент сопротивления капли при взаимодействии с несущей средой,  $\mathbf{g}$  — вектор ускорения силы тяжести,  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}$  — векторы скоростей газодисперсной среды и капли,  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор капли. Заметим, что в правой части уравнения количества движения капли в системе (1) слагаемое  $j\mathbf{v}_1$  отвечает переносу импульса из аэродисперсной смеси в каплю при массообмене. Последнее уравнение в (1) определяет положение (радиус-вектор) капли в выбранной системе координат.

В настоящей работе, следуя [Ингель, 2012], рассматривается случай, когда капля падает в горизонтальном потоке, скорость  $U_1(z)$  которого известна. При этом взаимодействуя с потоком, капля помимо вертикального вовлекается и в горизонтальное движение. В этом случае задача становится двумерной (ось  $z$  направим вертикально вверх против ускорения силы тяжести, а ось  $x$  — по направлению скорости горизонтального потока, начало координат совместим с земной поверхностью), так что имеем

$$\mathbf{f} = \{f_x, f_z\}, \quad \mathbf{g} = \{0, -g\}, \quad \mathbf{v}_1 = \{U_1(z), 0\},$$

$$\mathbf{v} = \{u, w\}, \quad \mathbf{r} = \{x, z\},$$

где  $f_x$ ,  $f_z$ ,  $u$ ,  $w$  — компоненты силы сопротивления и вектора скорости капли по осям,  $x$ ,  $z$  — координаты положения капли.

Таким образом, систему (1) можно переписать в проекциях на оси координат

$$\frac{dm}{dt} = j, \quad \frac{dm u}{dt} = f_x + j U_1, \quad \frac{dm w}{dt} = f_z - mg, \quad \frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dz}{dt} = w, \quad (4)$$

$$f_x = \frac{1}{8}\pi d^2 \rho_g^\circ C |U_1 - \mathbf{v}| (U_1 - u),$$

$$f_z = \frac{1}{8}\pi d^2 \rho_g^\circ C |U_1 - \mathbf{v}| (-w), \quad (5)$$

$$|U_1 - \mathbf{v}| = [(U_1 - u)^2 + (-w)^2]^{1/2}, \quad U_1 = U_1 \mathbf{i},$$

где  $\mathbf{i}$  — единичный базисный вектор оси  $x$ . Видно, что в рассматриваемом случае вертикальная и горизонтальная составляющие скорости влияют друг на друга (в частности, через модуль скорости  $|U_1 - \mathbf{v}|$ ). На это обстоятельство обращено внимание в [Ингель, 2012]. Отметим, что в про-

екцию уравнения импульса капли в вертикальное направление (третье уравнение системы (4)), в отличие от уравнения импульса вдоль горизонтальной оси (второе уравнение системы (4)), не входит слагаемое, ответственное за обмен импульсом из-за захвата частиц каплей. Сказанное относится только к данной форме записи уравнений импульсов, в других формах, приведенных ниже, в правую часть уравнения импульсов для вертикальной составляющей войдет также слагаемое, ответственное за перенос импульса из-за улавливания аэрозольных частиц.

Поставим начальные условия

$$t = 0, \quad x = 0, \quad z = H, \quad m = m_0, \quad u = u_0, \quad w = w_0, \quad (6)$$

где  $H$  – высота падения капли,  $m_0$ ,  $u_0$ ,  $w_0$  – масса и составляющие скорости капли при  $t = 0$ .

Система дифференциальных уравнений (4) с замыкающими соотношениями (2), (3), (5), начальными условиями (6) при заданных скорости ветра  $U_1(z)$ , выражениях для коэффициента сопротивления капли  $C$  и интенсивности захвата частиц каплей  $j$  представляет задачу Коши для описания движения капли дождя в аэродисперсном потоке.

Далее следует конкретизировать коэффициент сопротивления капли и интенсивность улавливания частиц каплей.

#### КОЭФФИЦИЕНТ СОПРОТИВЛЕНИЯ КАПЛИ И ИНТЕНСИВНОСТЬ МАССООБМЕНА

Обычно коэффициент сопротивления капля (или частиц) в несущей среде зависит от числа Рейнольдса относительного обтекания дисперсного включения. В частности, для недеформирующихся каплей можно использовать полуэмпирическую формулу [Ивандаев и др., 1981; Нигматулин, 1987], удовлетворяющую экспериментальным данным в широком диапазоне чисел Рейнольдса

$$C = 24 / \text{Re} + 4.4 / \text{Re}^{0.5} + 0.44,$$

$$\text{Re} = \rho_g^\circ d \left| \bigcup_1 - v \right| / \mu_g,$$

где  $\text{Re}$  – число Рейнольдса относительного движения капли,  $\mu_g$  – динамический коэффициент вязкости газа. Имеются также и другие формулы

для коэффициента сопротивления дисперсных включений в несущей среде, которые учитывают различные эффекты (деформация, дробление, вращение, стесненность капель и т.п.) [Ивандаев и др., 1981; Нигматулин, 1987; Келбалиев, 2011; Губайдуллин, Осипов, 2020]. В целом, анализу коэффициента сопротивления дисперсных включений в различных средах посвящены достаточно много работ (подробный обзор которых приведен в [Келбалиев, 2011]). Однако в рамках принятых в настоящей работе допущений вышеприведенная формула для  $C$  вполне приемлема, о чем свидетельствует хорошее согласие экспериментальной и расчетной скорости падения капли (см. ниже).

Для определения интенсивности пылеулавливания используем элементарную схему подсчета столкновений между каплей и мелкими частицами. При этом учтем, что некоторые частицы при подходе к капле могут под действием газового потока изменить свои траектории и не столкнуться с ней. Тогда для интенсивности захвата каплей мелких частиц получим соотношение

$$j = \eta S \rho_p \left| v_1 - v \right|, \quad \rho_p = \alpha_{1,p} \rho_p^\circ,$$

в котором  $\eta$  – поправочный коэффициент, характеризующий эффективность столкновений мелких частиц с каплей и зависящий от условий обтекания капли смесью газа с мелкими частицами,  $S$  – миделево сечение капли (поскольку по предположению капля сохраняет сферическую форму, то, очевидно,  $S = \pi d^2 / 4$ ),  $\alpha_{1,p}$ ,  $\rho_p$  – объемная доля и приведенная плотность твердого компонента аэродисперсной смеси. Для сдвигового потока  $|v_1 - v| = |U_1 - v|$ . Напомним, что по предположению (см. выше) скорости частиц и газа совпадают (модель эффективного газа).

Коэффициент захвата частиц  $\eta$  зависит от многих факторов, таких как инерция, диффузия частиц, зацепление частиц каплей и т. п. [Припачкин, Будыка, 2020]. Инерционный механизм характеризуется числом Стокса и обычно реализуется при значениях числа Стокса больше критического  $\text{Stk} = \rho_p^\circ d_p^2 |v_1 - v| / 18 \mu_g d > 1$  ( $d_p$  – диаметр частицы). Например, для капли диаметром  $d \sim 1000$  мкм, движущейся в облаке аэрозольных

частиц плотностью вещества  $\rho_p^\circ \sim 10^3 \text{ кг/м}^3$  и диаметром  $d_p < \sim 1 \text{ мкм}$ , при разности скоростей  $\sim 1 \text{ м/с}$  получим  $\text{Stk} < \sim 0.01 \ll 1$ , т. е. в этом случае инерционный механизм несущественен. Диффузионный механизм, как правило, имеет место для достаточно малых частиц, диаметр которых значительно меньше 1 мкм, в частности, в [Припачкин, Будыка, 2020] отмечено, что для частиц диаметром более 0.1 мкм диффузионным захватом можно пренебречь. Таким образом, в диапазоне от 0.1 до 1 мкм, соответствующем большинству атмосферных аэрозолей в континентальном воздухе [Кейдл, 1969], доминирует механизм зацепления частиц движущейся каплей [Greenfield, 1957]. Учитывая эти обстоятельства, ограничимся ситуацией, когда преобладающим механизмом захвата является зацепление частиц каплей.

В случае, когда силами инерции частиц можно пренебречь, для двух предельных ситуаций обтекания капли идеальной жидкостью (потенциальное обтекание) и безынерционной вязкой жидкостью (вязкое обтекание) получены соответствующие формулы, учитывающие эффект зацепления частиц [Chi Tien, Ramarao, 2007]

$$\eta = \frac{3\delta^2 \left(1 + \frac{2\delta}{3}\right)}{2(1+\delta)^3}, \quad \text{Re} \leq 1, \quad \eta = \frac{3\delta \left(1 + \delta + \frac{\delta^3}{3}\right)}{(1+\delta)^3},$$

$$\text{Re} \geq 80, \quad \delta = \frac{d_p}{d}.$$

Если  $\delta \ll 1$ , то отсюда можно получить приближенные выражения для эффективности захвата частиц каплей

$$\eta \cong 3\delta^2 / 2, \quad \text{Re} \leq 1, \quad \eta \cong 3\delta, \quad \text{Re} \geq 80.$$

Для переходной области  $1 < \text{Re} < 80$  в [Yoon, Luttrell, 1989] предложена следующая формула

$$\eta = \left( \frac{3}{2} + \frac{4}{15} \text{Re}^{0.72} \right) \delta^2.$$

Заметим, что приведенные выше формулы для эффективности захвата частиц каплей  $\eta$  справедливы при достаточно малых значениях параметра Стокса, когда силами инерции частиц можно пренебречь:  $\text{Stk} < \sim 0.1$  [Матвеев, 1984]. Если  $\text{Stk} > 0.1$ , то указанные формулы дают заниженные значения  $\eta$ , так как они не учитывают инерционные свойства частиц.

### УСТАНОВИВШАЯСЯ СКОРОСТЬ КАПЛИ

В зависимости от числа Рейнольдса могут реализоваться разные режимы движения капли. При малых числах Рейнольдса  $\text{Re} \ll 1$  (когда  $C \cong 24 / \text{Re}$ ) сила сопротивления капли переходит в известную силу Стокса  $\mathbf{f} = 3\pi\mu_g d(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v})$ , в этом случае имеет место стоксовый режим обтекания капли (обычно стоксовый режим простирается до чисел Рейнольдса порядка 1). При больших значениях числа  $\text{Re} \gg 1$ , реализуется ньютоновский режим обтекания капли, когда  $C \cong 0.5$ . Далее верхние индексы  $S$  и  $N$  будем относить соответственно к стоксовому и ньютоновскому режимам движения капли.

Рассмотрим случай, когда отсутствуют мелкие частицы в составе аэродисперсной смеси ( $j = 0, d = \text{const}$ ). Тогда система уравнений несколько упрощается, и, например, в предельном стоксовом режиме уравнения импульсов примут вид

$$\frac{du}{dt} = \frac{U_1(z) - u}{\tau^S}, \quad \frac{dw}{dt} = -g - \frac{w}{\tau^S},$$

$$\tau^S = \frac{\rho_l^\circ d^2}{18\mu_g},$$

где  $\tau^S$  — характерное время вязкой релаксации скорости капли в стоксовом режиме [Матвеев, 1984; Нигматулин, 1987]. Приравнивая к нулю правую часть уравнения для  $w$ , можно найти установившуюся (или стационарную) скорость падения капли в стоксовом режиме  $W^S$ , к которой стремится с течением времени величина  $w$

$$W^S = -g\tau^S. \quad (7)$$

Заметим, что в предельном стоксовом режиме вертикальная составляющая скорости капли  $w$  не зависит от горизонтального потока газа, и уравнение для  $w$  можно рассмотреть отдельно от первого уравнения, в то время как в уравнение для  $u$  неявно (через координату капли  $z$ , которая зависит от  $w$ ) входит вертикальная составляющая скорости  $w$ . При однородном горизонтальном течении ( $U_1 = \text{const}$ ) составляющая скорости капли  $u$  стремится со временем к значению  $U^S = U_1$ .

В ньютоновом режиме движения капли уравнения импульсов имеют форму

$$\frac{du}{dt} = \frac{U_1(z) - u}{l^N} |\mathbf{U}_1 - \mathbf{v}|, \quad \frac{dw}{dt} = -g - \frac{w}{l^N} |\mathbf{U}_1 - \mathbf{v}|,$$

$$l^N = \frac{8 \rho_l^\circ d}{3 \rho_g^\circ},$$

где  $l^N$  — характерная длина выравнивания скоростей капли и несущей среды в ньютоновом режиме [Нигматулин, 1987]. Видно, что в отличие от стоксового режима в ньютоновом режиме составляющие скорости по координатам взаимосвязаны и влияют друг на друга (в частности, через  $|U_1 - v|$ ). В случае, когда горизонтальное течение однородное, то составляющие установившейся (стационарной) скорости капли в ньютоновом режиме запишутся как

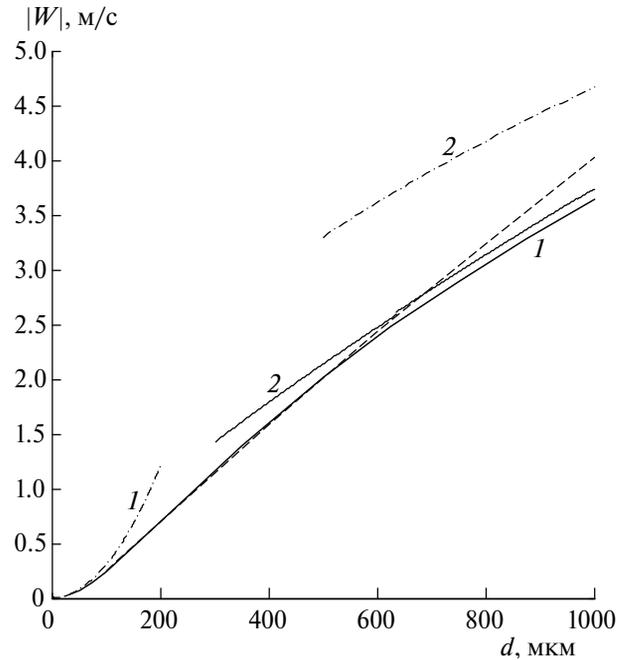
$$U^N = U_1, W^N = -(gl^N)^{1/2}. \quad (8)$$

При отсутствии горизонтального потока газа ( $U_1 = 0$ ) установившуюся скорость капли можно найти и в промежуточном режиме (когда числа Рейнольдса принимают не очень малые и не очень большие значения). Для этого заметим, что из условия равномерного движения капли  $f_z - mg = 0$  вытекает постоянство выражения  $Re^2 C(Re) = \text{const}$ , которое можно трактовать как уравнение для неизвестного числа  $Re$ . Таким образом, имеем уравнение

$$Re^2 C(Re) = \gamma d^3, \quad (9)$$

$$\gamma = \frac{4 \rho_g^\circ \rho_l^\circ g}{3 \mu_g^2}, \quad Re = \frac{\rho_g^\circ |W| d}{\mu_g},$$

которое легко решается относительно  $Re$  численными методами (например, методом половинного деления) при заданных значениях диаметра капли  $d$  и параметра  $\gamma$ . Затем из найденного значения  $Re$  определяется искомое значение установившейся скорости капли (по абсолютной величине)  $|W|$ . Задавая различные значения диаметра капли (при фиксированном  $\gamma$ ), из (9) можно получить зависимость  $|W|$  от  $d$ . График данной зависимости, полученный указанным путем для капли дождя в атмосферном воздухе при нормальных условиях, показан на рис. 1 (сплошная кривая 1). Штрихпунктирные кривые 1, 2 соответствуют стоксовому и ньютоновому предельным режимам обтекания капли, рассчитанные по формулам (7), (8). Для сравнения штриховой линией представлены экспериментальные результаты [Mason, 1971]. Видно, что стоксово приближение удовлетворительно описывает расчетную зависимость при  $d \leq 100$  мкм. Ньютоново приближение



**Рис. 1.** Зависимость установившейся скорости падения капли дождя в воздухе (при нормальных условиях) от ее диаметра. Сплошные кривые: 1 — расчет по уравнению (9), 2 — приближенно-аналитическая формула [Ингель, 2012]. Штриховая линия — эксперимент [Mason, 1971]. Штрихпунктирные линии: 1 — стоксовый режим (формула (7)), 2 — ньютоновы режим (формула (8)).

в пределах  $d \leq 1000$  мкм дает завышенные значения скорости осаждения капли. Расчетные скорости капли хорошо согласуются с данными опытов для диаметров капли  $d \leq 600$  мкм, однако с ростом размера капли различие между ними увеличивается и достигает  $\sim 10\%$  при диаметре капли 1000 мкм. Согласие между экспериментальными и расчетными значениями скорости капли свидетельствует о правомерности используемой формулы для коэффициента сопротивления. На рис. 1 также построен график зависимости установившейся скорости осаждения капли по приближенно-аналитической формуле [Ингель, 2012], справедливой для больших чисел Рейнольдса (сплошная кривая 2). Видно, что расчетная и приближенно-аналитическая зависимости хорошо согласуются между собой (особенно для относительно крупных капель).

Необходимо иметь в виду, что скорость капли с течением времени должна стремиться к установившейся скорости, соответствующей данному размеру капли.

АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЯ КАПЛИ В ПРЕДЕЛЬНЫХ РЕЖИМАХ

Прежде чем рассматривать решение задачи в полной постановке, проанализируем более подробно упомянутые выше предельные случаи стокового и ньютонового режимов движения капли при отсутствии частиц и горизонтального потока в атмосфере ( $d = \text{const}$ ,  $U_1 = 0$ ). Уравнения для удобства анализа приведем к безразмерной форме.

В стоковом режиме уравнение движения капли приводится к простому виду

$$\bar{\tau}^S \frac{d\bar{w}}{d\bar{t}} = -1 - \bar{w}, \quad (10)$$

$$\bar{\tau}^S = \tau^S / \tau_H^S, \quad \tau_H^S = H / |W^S|, \quad \bar{t} = t / \tau_H^S, \quad \bar{w} = w / |W^S|.$$

Здесь  $H$  – расстояние, которое преодолевает капля до достижения земной поверхности. Вырожденное уравнение, соответствующее (10),  $F = -1 - \bar{w} = 0$  имеет единственное решение  $\bar{w} = -1$ . Производная  $\partial F / \partial \bar{w}$  отрицательна, что является достаточным [Ракитский и др., 1979] для устойчивости стационарного решения  $\bar{w} = -1$ .

При числах Рейнольдса  $Re > 1$  условия стокового режима нарушаются. В этом случае уравнение движения капли можно привести к форме

$$\bar{\tau}^N \frac{d\bar{w}}{d\bar{t}} = -1 + 2C\bar{w}^2, \quad (11)$$

$$\bar{\tau}^N = \tau^N / \tau_H^N, \quad \tau_H^N = l^N / |W^N|, \quad \tau_H^N = H / |W^N|, \\ \bar{t} = t / \tau_H^N, \quad \bar{w} = w / |W^N|,$$

где  $\tau^N$  – характерное время изменения скорости капли. Необходимо иметь в виду, что, когда числа Рейнольдса не очень большие, величины  $|W^N|$ ,  $l^N$  не отвечают “точно” ньютоновому режиму, в связи с этим в случае уравнения (11) их надо понимать как характерные величины, соответствующие переходному режиму. Заметим, что, приравняв нулю правую часть уравнения (11), получим точно такое же уравнение, как (9), только в безразмерном виде.

В предельном ньютоновом режиме (когда  $C \approx 0.5$ ) уравнение (11) переходит в следующее упрощенное (нелинейное в отличие от стокового движения капли) уравнение

$$\bar{\tau}^N \frac{d\bar{w}}{d\bar{t}} = -1 + \bar{w}^2. \quad (12)$$

Вырожденное уравнение, соответствующее (12),  $F = -1 + \bar{w}^2 = 0$  имеет единственное, удовлетворяющее условию  $\bar{w} < 0$ , решение  $\bar{w} = -1$ . Производная  $\partial F / \partial \bar{w}$  при этом отрицательна, что является достаточным [Ракитский и др., 1979] для устойчивости решения  $\bar{w} = -1$ .

Оценим коэффициенты  $\bar{\tau}^S$ ,  $\bar{\tau}^N$  при производных в (10)–(12). Заметим, что для приближенного выполнения условий стокового режима (обычно стоковый режим имеет место при характерных значениях числа Рейнольдса  $Re = \rho_g^0 d |W^S| / \mu_g \ll 1$ ) должно выполняться соотношение  $d < \sim (18 \mu_g^2 / \rho_g^0 \rho_l^0 g)^{1/3} \equiv d^S$ . Например, для капли воды в воздухе при нормальных условиях получим  $d^S \approx 60$  мкм. При этом в случае, когда, например, высота  $H \gg \sim 100$  м коэффициент  $\bar{\tau}^S \ll \sim 10^{-5}$ , т. е. коэффициент  $\bar{\tau}^S$  достаточно мал. Это означает, что уравнение (10) относится к типу так называемых сингулярно возмущенных (или жестких) уравнений [Ракитский и др., 1979].

Для того чтобы коэффициент  $\bar{\tau}^N$  был малым, должно выполняться хотя бы условие  $\bar{\tau}^N \ll \sim 0.1$  или  $d < \sim 3 \cdot 0.1 H \rho_g^0 / 8 \rho_l^0 \equiv d_*$ . Таким образом, уравнения (11), (12), отвечающие соответственно промежуточному и ньютоновому режимам, будут сингулярно возмущенными, как в стоковом режиме, если диаметр капли  $d < \sim d_*$ . В частности, для капли воды в воздухе при нормальных условиях и  $H \sim 100$  м критический размер  $d_* \sim 1000$  мкм.

С физической точки зрения сингулярно возмущенное свойство уравнений (10)–(12) обусловлено тем, что характерное время релаксации скорости капли намного меньше времени прохождения каплей расстояния  $H$ :  $\tau^S \ll \tau_H^S$ ,  $\tau^N \ll \tau_H^N$ . Заметим, что безразмерные параметры  $\bar{\tau}^S$ ,  $\bar{\tau}^N$  фактически представляют числа Фруда

$$\bar{\tau}^S = (W^S)^2 / gH \equiv Fr^S,$$

$$\bar{\tau}^N = (W^N)^2 / gH \equiv Fr^N,$$

рассчитанные по установившимся скоростям падения капли в гравитационном поле соответственно в стоковом и ньютоновом режимах.

Опираясь на общую теорию сингулярно возмущенных уравнений [Ракитский и др., 1979], остановимся на некоторых особенностях поведения решений уравнений (10)–(12). В рассматриваемой области изменения времени  $\bar{t}$  выделяются два

отрезка с существенно различным поведением решений, причем продолжительность первого значительно меньше второго. На первом отрезке скорость капли быстро стремится к стационарной скорости, а на втором отрезке она практически не меняется. При этом чем меньше величины  $\bar{\tau}^S$  и  $\bar{\tau}^N$ , тем быстрее сближаются интегральные кривые уравнений (10)–(12) к соответствующим значениям (в стоксовом и ньютоновом режимах к  $\bar{w}^S = -1$  и  $\bar{w}^N = -1$ , а в промежуточном режиме к значению, рассчитанному по (9) и отнесенному к  $W^N$ ). Различный характер поведения решений на обоих участках проявляется тем отчетливее, чем меньше параметры  $\bar{\tau}^S$ ,  $\bar{\tau}^N$ . Из уравнений (10)–(12) также следует, что ускорение капли в начальный момент времени в стоксовом режиме равно  $1/\bar{\tau}^S$ , а в промежуточном и ньютоновом режимах движения равно  $1/\bar{\tau}^N$ .

Аналитические решения уравнений (10), (12) при нулевой начальной скорости капли имеют вид

$$\bar{w} = -1 + \exp(-\bar{t} / \bar{\tau}^S), \quad \bar{w} = -\frac{1 - \exp(-2\bar{t} / \bar{\tau}^N)}{1 + \exp(-2\bar{t} / \bar{\tau}^N)}.$$

Для координаты капли при начальных условиях  $\bar{t} = 0$ ,  $\bar{z} = 1$  вытекают следующие зависимости

$$\begin{aligned} \bar{z} &= 1 - \bar{t} + \bar{\tau}^S [1 - \exp(-\bar{t} / \bar{\tau}^S)], \\ \bar{z} &= 1 - \bar{t} - \bar{\tau}^N \ln \left\{ \frac{1}{2} [1 + \exp(-2\bar{t} / \bar{\tau}^N)] \right\}, \\ \bar{z} &= z / H. \end{aligned}$$

В этих выражениях безразмерные время и скорость отнесены к своим характерным величинам, соответствующим стоксовому и ньютоновому режимам. Учитывая малость параметра  $\bar{\tau}^S$ , получим, что полное время падения капли с высоты  $\bar{z} = H$  до поверхности земли ( $\bar{z} = 0$ ) в стоксовом режиме  $\bar{t}_H^S \cong 1$  или  $t_H^S \cong \tau_H^S$ . Аналогично в рамках ньютонового приближения для капель с диаметром, удовлетворяющем условию  $\bar{\tau} \ll 1$ , имеем  $t_H^N \cong \tau_H^N$ . Также следует, что координата капли в предельных стоксовом и ньютоновом режимах меняется во времени приблизительно по линейному закону  $\bar{z} \cong 1 - \bar{t}$  (хотя уравнения движения капли в этих случаях сильно отличаются). Можно предположить, что в промежуточном режиме (когда числа Рейнольдса не очень малые и не очень большие) координата капли тоже подчиняется примерно линейной зависимости от времени

(расчеты подтверждают данное предположение, см. ниже).

Необходимо иметь в виду, что в малой окрестности стартовой точки с принятыми выше нулевыми начальными условиями (при отсутствии бокового ветра) на самом деле выполняются условия стоксового режима из-за малости скорости капли, и, соответственно, малых значений числа Рейнольдса. Так что уравнение (12), описывающее движение капли в ньютоновом режиме, имеет смысл при не очень малых скоростях капли, когда число Рейнольдса достаточно большое. Полученные аналитические решения можно использовать для проверки алгоритма численного интегрирования уравнений движения капли в общем случае.

Следует подчеркнуть, что в общей постановке с учетом эффекта захвата частиц каплей и наличия бокового течения среды свойство жесткости уравнения движения капли сохраняется (это подтверждается приведенными ниже численными результатами). При этом уравнение движения капли становится нелинейным и сложным, и найти аналитическое решение в явном виде, подобно предельным случаям движения капли, не удастся. Вопросы о возможности замены исходного уравнения вырожденным, а также о построении асимптотического разложения решения сингулярно возмущенного уравнения в виде ряда по степеням малого параметра, описывающего весь промежуток наблюдения, включая участок быстрого изменения искомой функции, достаточно подробно изложены в [Васильева, Бутузов, 1973]. Для численного интегрирования таких уравнений обычно требуется привлечь особые алгоритмы [Ракитский и др., 1979].

#### ДРУГИЕ ФОРМЫ ЗАПИСИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ КАПЛИ

Приведем другие формы записи уравнений движения капли, которые могут быть полезными при анализе и расчетах. Если вместо переменной  $u$  перейти к  $\Delta u = U_1 - u$  и учесть очевидное соотношение

$$\frac{du}{dt} = \left( \frac{dU_1}{dz} \right)_w - \frac{d\Delta u}{dt},$$

то проекцию уравнения движения капли на ось  $x$  (второе уравнение системы (4)) можно привести

к другой форме. В результате имеем замкнутую систему для трех неизвестных  $m$ ,  $\Delta u$  и  $w$

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} &= j, \quad m \frac{d\Delta u}{dt} = m \left( \frac{dU_1}{dz} \right) w - f_x - j\Delta u, \\ m \frac{dw}{dt} &= f_z - mg - jw, \\ j &= \frac{1}{4} \eta \pi d^2 \rho_p |U_1 - v|, \quad f_x = \frac{1}{8} \pi d^2 \rho_g^{\circ} C |U_1 - v| \Delta u, \\ f_z &= \frac{1}{8} \pi d^2 \rho_g^{\circ} C |U_1 - v| (-w), \\ C &= 24 / Re + 4.4 / Re^{0.5} + 0.44, \\ Re &= \rho_g^{\circ} d |U_1 - v| / \mu_g, \\ |U_1 - v| &= [(\Delta u)^2 + (-w)^2]^{1/2}. \end{aligned} \quad (13)$$

В эту систему входит производная скорости горизонтального потока по  $z$ , но не сама скорость  $U_1$  (величина  $|U_1 - v|$  выражается через  $\Delta u$  и  $w$ ). После нахождения из этой системы  $\Delta u$  и  $w$  можно при необходимости вычислить координаты капли интегрированием последних двух уравнений системы (4). Рассмотрим несколько частных случаев стационарного потока, приводящих к явному виду  $dU_1/dz$ . Например, в случае однородного горизонтального потока, когда  $U_1 = \text{const}$  и  $dU_1/dz = 0$  в систему (13) не будет входить слагаемое, связанное со скоростью потока. В другой ситуации, когда горизонтальный поток имеет постоянный вертикальный сдвиг  $U_1 = kz$  имеем  $dU_1/dz = k = \text{const}$ . Если  $dU_1/dz$  является функцией от  $z$ , то в систему (13) следует включить уравнение  $dz/dt = w$ , необходимое для вычисления вертикальной координаты капли  $z$ .

Уравнения системы (4) можно записать еще в следующем виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \frac{dm}{dt} &= \xi, \quad \frac{du}{dt} = \varphi_x + \xi(U_1 - u), \quad \frac{dw}{dt} = \varphi_z - g - \xi w, \\ \varphi_x &= \frac{f_x}{m} = \frac{3}{4} \left( \frac{\rho_g^{\circ}}{d \rho_p^{\circ}} \right) C |U_1 - v| (U_1 - u), \\ \varphi_z &= \frac{f_z}{m} = \frac{3}{4} \left( \frac{\rho_g^{\circ}}{d \rho_p^{\circ}} \right) C |U_1 - v| (-w), \\ \xi &= \frac{j}{m} = \frac{3}{2} \eta \frac{\rho_p}{d \rho_p^{\circ}} |U_1 - v| = \frac{3}{2} \eta \left( \frac{\rho_g^{\circ}}{d \rho_p^{\circ}} \right) \frac{\rho_p}{\rho_g^{\circ}} |U_1 - v|, \\ \rho_u &= \alpha_1 \rho^{\circ}. \end{aligned}$$

Перепишем полученные уравнения в форме

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \frac{dm}{dt} &= ac |U_1 - v|, \quad \frac{du}{dt} = ab |U_1 - v| (U_1 - u), \\ \frac{dw}{dt} &= ab |U_1 - v| (-w) - g, \\ a &= \frac{3}{2} \frac{\rho_g^{\circ}}{d \rho_p^{\circ}} = \frac{3}{2} \frac{\rho_g^{\circ}}{\rho_p^{\circ}} \left( \frac{6m}{\pi \rho_p^{\circ}} \right)^{-1/3}, \quad b = \frac{1}{2} C + c, \quad c = \eta \frac{\rho_p}{\rho_g^{\circ}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Видно, что сомножители  $a$ ,  $b$  с ростом диаметра капли, обусловленного захватом мелких частиц, уменьшаются. При этом горизонтальная составляющая скорости капли  $u$  снижается, а вертикальная составляющая  $w$ , наоборот, возрастает по абсолютной величине (данный вывод подтверждается численными результатами).

Заметим, что в большинстве случаев в выражении для  $b$  второе слагаемое, отвечающее за интенсивность улавливания аэрозольных частиц каплей, становится достаточно малым по сравнению с первым, который соответствует силовому взаимодействию между каплей и несущей средой. Например, в ньютоновом режиме (когда  $C \cong 0.5$ ) при не очень большой концентрации частиц и их малых размерах (когда  $\rho_p/\rho_g^{\circ} \ll 1$ ,  $\delta \ll 1$ ,  $\eta \cong 3\delta$ ) имеем

$$b = \frac{1}{2} C + \eta \frac{\rho_p}{\rho_g^{\circ}} \cong \frac{1}{4} + 3\delta \frac{\rho_p}{\rho_g^{\circ}} \cong \frac{1}{4}.$$

Сказанное справедливо не только для ньютонового режима обтекания капли, но и для общего случая, когда  $C > 0.5$ . Таким образом, в уравнениях движения капли эффект непосредственного переноса импульса из аэрозольной смеси в каплю за счет захвата частиц намного слабее (при не очень концентрированной смеси воздуха с достаточно мелкими по сравнению с каплей частицами) эффекта обмена импульсом, обусловленного силовым взаимодействием между каплей и несущей средой. В частности, при  $\delta \ll 10^{-3}$ ,  $\rho_p/\rho_g^{\circ} \ll 10^3$  для реализации, к примеру, условия  $3\delta \rho_p/\rho_g^{\circ} \ll 10^{-2}$  должно выполняться соотношение  $\alpha_{1p} = \rho_p/\rho_p^{\circ} \ll 10^{-3}$ . В рассматриваемом случае изменением размера капли за счет захвата частиц можно пренебречь ( $d = \text{const}$ ), тогда выражение для параметра  $a$  примет следующий компактный вид:  $a = 4/l^N$ .

**БЕЗРАЗМЕРНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ И ПАРАМЕТРЫ ПОДОБИЯ**

Введем безразмерные переменные

$$\bar{t} = t / (H / |W^N|), \quad \bar{x} = x / H, \quad \bar{z} = z / H, \quad \bar{m} = m / m_0,$$

$$\bar{u} = u / |W^N|, \quad \bar{w} = w / |W^N|.$$

В безразмерных переменных начальные условия (6) запишутся в виде

$$\bar{t} = 0, \quad \bar{x} = 0, \quad \bar{z} = 1, \quad \bar{m} = 1, \quad \bar{u} = \bar{u}_0, \quad \bar{w} = \bar{w}_0.$$

Диаметр капли вычисляется по формуле

$$\bar{d} = d / d_0 = [1 + (\bar{m} - 1) / R]^{1/3}, \quad R = \rho_p^\circ / \rho_l^\circ.$$

При этом объемная доля твердой примеси в составе капли выражается в виде

$$\alpha_p = V_p / V = (\bar{m} - 1) / (\bar{m} - 1 + R).$$

С помощью данной формулы можно следить за тем, чтобы объемная доля твердого компонента в составе капли не превышала некоторой критической величины  $\alpha_p < \alpha_p^*$ . В частном случае, когда  $R \equiv 1$  (или  $\rho_l^\circ \equiv \rho_p^\circ$ ), из предыдущих формул следует  $\bar{d} \equiv \bar{m}^{1/3}$ ,  $\alpha_p \equiv (\bar{m} - 1) / \bar{m}$ .

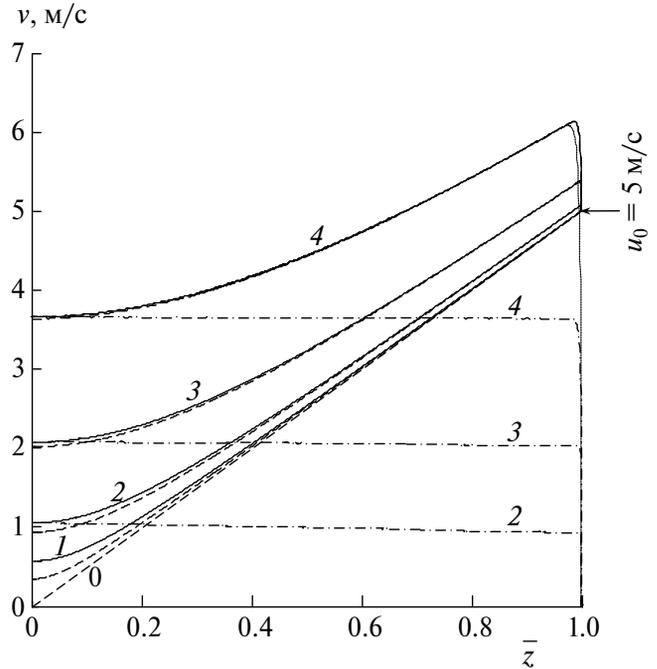
Основными параметрами подобия поставленной задачи будут

$$\Delta = \frac{d_p}{d_0}, \quad R = \frac{\rho_p^\circ}{\rho_l^\circ}, \quad Re_0 = \frac{d_0 \rho_g^\circ |W^N|}{\mu_g}, \quad P = \frac{H \rho_g^\circ}{d_0 \rho_l^\circ},$$

$$Q = \frac{H}{d_0} B, \quad B = R \alpha_{1p}.$$

Здесь параметры  $\Delta$  и  $R$  характеризуют интенсивность захвата частиц каплями и изменение при этом размера капли и объемной доли твердого в ней (обычно  $\Delta \ll 1$ ,  $R \sim 1$ ). Характерное значение числа Рейнольдса  $Re_0$  определяет величину коэффициента вязкого сопротивления капли. Параметр  $P$  отвечает за интенсивность обмена импульсом между каплей и газом из-за вязкого взаимодействия. Параметры  $Q$  и  $B$  определяют интенсивность обмена массой и импульсом между каплей и запыленным воздухом из-за захвата частиц каплей, причем параметр  $B \ll 1$  (из-за того, что обычно  $\alpha_{1p} \ll 1$ , а  $\rho_p^\circ / \rho_l^\circ \sim 1$ ).

В случае наличия горизонтального потока в число критериев подобия дополнительно войдут параметры, характеризующие скорость данного течения. Например, если имеет место ли-



**Рис. 2.** Зависимости модуля вектора скорости капли дождя от вертикальной координаты при разных начальных диаметрах капли: кривая 1 – 125, 2 – 250, 3 – 500, 4 – 1000 мкм. Штриховые линии – отсутствие захвата частиц (но наличие бокового течения), штрихпунктирные линии – отсутствие бокового течения (но наличие захвата частиц).

нейный сдвиговый поток, то таким параметром будет

$$\psi = |u_{1H} / |W^N|,$$

где  $U_{1H}$  – скорость горизонтального потока на высоте  $H$ .

В случае неравномерного распределения мелкодисперсной примеси в воздухе (например, по [Turner, 1994]) в число определяющих параметров могут войти также другие безразмерные величины.

**РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ**

В качестве примера рассмотрим процесс падения капли воды в запыленном воздухе с мелкодисперсными частицами твердого материала (аэрозольном облаке) при нормальных условиях (изменениями давления, плотности и температуры воздуха по высоте в соответствии с принятыми допущениями пренебрегается). Значения определяющих параметров следующие: объемная доля твердого компонента аэровзвеси  $\alpha_{1p} = 0.001$ , диаметр частиц  $d_p = 1$  мкм, высота падения капли  $H$

= 250 м, плотность вещества твердого компонента  $\rho_p^0 = 2650 \text{ кг/м}^3$  (соответствует, например, двуокиси кремния или силикатной пыли). Как следует из эмпирических распределений дождевых капель по размерам [Marshall, Palmer, 1948], основную долю обычно составляют капли диаметром менее 1000 мкм.

Следуя [Ингель, 2012], ограничимся случаем стационарного фонового течения с постоянным вертикальным сдвигом

$$\bar{U}_1(\bar{z}) = A\bar{z}, \quad \bar{U}_1 = U_{1H} / |W^N|, \quad A = U_{1H} / |W^N|.$$

Заметим, что для численного решения сформулированной выше сингулярно возмущенной задачи было достаточно использовать алгоритмы, предусмотренные в математических вычислительных пакетах (в частности, в MATLAB) для численного интегрирования жестких дифференциальных уравнений.

Оценки показали, что при заданных параметрах задачи согласно известным формулам условия деформации поверхности капли не наступают. Действительно, при разностях скоростей  $|U_1 - v|$ , не превышающих  $\sim 10 \text{ м/с}$ , диаметрах капель воды  $d < \sim 1000 \text{ мкм}$  критерий появления деформации  $WeRe^{0.85} > 165$  [Келбалиев, 2011] не реализуется ( $We = \rho_g^0 |U_1 - v|^2 d / \sigma$  – число Вебера,  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения капли).

В [Ингель, 2012] показано, что воздействие сдвигового потока на разность скоростей  $|U_1 - v|$  и, следовательно, на гидродинамическое сопротивление становится существенным при установившейся скорости падения капли, удовлетворяющей соотношению  $|W| > g / (dU_1/dz)$ . Правая часть данного соотношения в рассматриваемом здесь случае принимает довольно большие значения (так как высота образования капель  $H > \sim 100 \text{ м}$ , то при горизонтальных скоростях потока менее  $10 \text{ м/с}$  получим  $g / (dU_1/dz) = g / (U_{1H} / H) > \sim 100$ ), и выполнение вышеуказанного условия затруднительно, поэтому влияние сдвигового потока на вертикальную составляющую скорости капли достаточно слабое. Этот теоретический вывод подтверждается результатами расчетов (см. ниже). Заметим, что для выполнения вышеуказанного условия расстояние  $H$  должно быть значительно меньше, чем рассматриваемые здесь (соответствующий пример приведен в [Ингель, 2012]).

Особо следует отметить, что, вообще говоря, начальная скорость (скорость капли в начальный момент времени) заранее неизвестна. Однако если учесть, что горизонтальная составляющая скорости капли по предварительным расчетам достаточно быстро (по сравнению с общим временем падения капли) достигает скорости фонового течения, то нетрудно догадаться о маловажности начального значения горизонтальной составляющей  $u_0$  (лишь бы выполнялось физически правдоподобное условие  $0 \leq u_0 \leq U_{1H}$ ). То же самое касается начального значения вертикальной составляющей скорости капли, поскольку для вертикальной скорости процесс релаксации происходит также очень быстро (поскольку уравнение движения капли по вертикальной координате имеет сингулярно возмущенный характер, см. выше). Учитывая эти обстоятельства, для определенности в расчетах принималось  $u_0 = U_{1H}$ ,  $w_0 = 0$  (характерная скорость фонового течения  $U_{1H}$  бралась равной  $5 \text{ м/с}$ ).

Расчеты показали, что вертикальная составляющая скорости капли по абсолютной величине  $|w|$  после резкого увеличения остается постоянной в случае отсутствия захвата мелкодисперсной фракции и незначительно растет по линейному закону при его наличии. Причем с увеличением начального диаметра капли величина  $|w|$  также возрастает. Различие в поведении  $w$  с высотой при наличии и отсутствии захвата частиц наиболее ярко проявляется для малых капель, а с увеличением начального размера капель это различие заметно ослабевает. Сингулярно возмущенный характер поведения скорости  $w$ , обсуждаемое выше, как и утверждалось, сохраняется и при наличии захвата частиц. Расчеты подтвердили оценки о малом влиянии горизонтального потока на вертикальную составляющую скорости капли при данных параметрах задачи.

Горизонтальная скорость капли  $u$  меняется (от значения  $U_{1H}$  на высоте  $H$  до  $0$  на поверхности земли) в зависимости от  $\bar{x}$  по параболическому закону, а от  $\bar{z}$  – линейно. Последнее связано с тем, что горизонтальная составляющая скорости капли практически следует боковому течению, т. е.  $u(\bar{z}) \cong U_1(\bar{z}) = U_{1H} \bar{z}$ . Увеличение начального размера капель приводит к уменьшению величины  $u$

в зависимости от  $\bar{x}$ , а на зависимость  $u$  от  $\bar{z}$  почти не влияет. Заметим, что при наличии захвата частиц горизонтальная составляющая скорости капли, в отличие от вертикальной составляющей, наоборот, уменьшается (это обстоятельство подтверждает полученный выше теоретический вывод при анализе уравнений (14)).

На рис. 2 показана зависимость модуля вектора скорости капли  $|\mathbf{v}| = (u^2 + w^2)^{1/2} \equiv v$  от безразмерной вертикальной координаты  $\bar{z}$  (здесь и далее сплошные и штриховые кривые соответствуют наличию и отсутствию захвата частиц каплей). Видно немонотонное поведение изучаемой зависимости. Сначала вблизи точки старта капли ( $\bar{z} = 1$ ) она резко увеличивается. Это связано с тем, что вертикальная составляющая скорости  $w$  по абсолютной величине растет быстрее, чем горизонтальная составляющая  $u$  падает (вследствие падения  $U_1$  по  $z$ , а  $u$ , как отмечено выше, слабо отличается от  $U_1$ ). Затем после достижения максимального значения скорость капли по мере дальнейшего ее движения ( $\bar{z} < 1$ ) постепенно уменьшается до определенного минимального значения, достигаемого в точке падения на поверхность земли ( $\bar{z} = 0$ ) и зависящего от начального размера капли. Это объясняется тем, что после достижения установившегося значения вертикальная составляющая скорости по мере движения капли практически не меняется, а горизонтальная составляющая при этом уменьшается, так что результирующая скорость капли  $v$  в целом также уменьшается. Следует заметить, что с ростом размера капли ее максимальная скорость увеличивается, также увеличивается и минимальная скорость, достигаемая в точке падения на землю ( $\bar{z} = 0$ ). С уменьшением размера капли немонотонность поведения зависимости  $v(\bar{z})$  ослабевает (например, для диаметра капли  $d_0 < \sim 250$  мкм данное свойство на рис. 2 малозаметно). Наличие захвата частиц каплей приводит к повышению скорости капли, хотя этот эффект с ростом размера капель ослабевает, и при диаметре капли 1000 мкм он почти незаметен.

Для сравнения на рисунке показана также зависимость  $v(\bar{z})$  при начальной нулевой скорости капли в случае  $d_0 = 1000$  мкм (пунктирная линия). Видно, что задание разных значений начальной

горизонтальной составляющей скорости капли не играет особой роли (при  $d_0 < \sim 1000$  мкм влияние начальной скорости будет еще меньше). Это связано с тем, что капля, как отмечено выше, достаточно быстро приобретает скорость сдвигового течения. На рис. 2 штрихпунктирными линиями показаны скорость капли при отсутствии бокового течения (но при наличии захвата мелких частиц каплей). Заметим, что вблизи поверхности земли скорости капли при наличии и отсутствии бокового течения совпадают. Очевидно, штриховая линия 0, удовлетворяющая уравнению фонового сдвигового течения  $u_1 = U_{10}\bar{z} = 5\bar{z}$  м/с, является предельной при уменьшении размера капли.

Резюмируя вышесказанное, важно отметить, что даже небольшое горизонтальное течение (с характерной, как здесь, скоростью  $\sim 5$  м/с) приводит к существенному изменению поведения результирующей скорости капли от монотонного увеличения с последующим выходом на примерно постоянное значение при отсутствии горизонтального потока к немонотонному поведению в случае его присутствия. Проведенное выше обсуждение результатов расчетов показывает, что в целом боковое течение на горизонтальную составляющую скорости капли влияет сильно, а на вертикальную составляющую практически не влияет (объяснение последнему эффекту дано выше с помощью проверки условия влияния сдвигового течения на вертикальную скорость капли). Важно отметить, что значения, к которым с течением времени стремится вертикальная скорость капли при разных ее размерах, с большой точностью совпали со значениями установившейся скорости, полученными из решения трансцендентного уравнения (9) и представленными на рис. 1. Это обстоятельство подтверждает правильность работы алгоритма, использованного для численного интегрирования системы уравнений движения капли (4).

Анализ зависимостей вертикальной  $\bar{z}$  и горизонтальной  $\bar{x}$  координат капли от безразмерного времени  $\bar{t}$  показал, что при отсутствии захвата частиц координата капли  $\bar{z}$  меняется линейно (связано это с постоянством скорости падения капли), а при наличии захвата частиц зависимость  $\bar{z}(\bar{t})$  незначительно отклоняется от линейного закона. Обнаружено, что зависимость  $\bar{x}(\bar{t})$  с хо-

рошим приближением аппроксимируется параболическим законом (это обстоятельство согласуется с теоретическим выводом из [Ингель, 2012]), например, в случае  $d_0 = 250$  мкм такая приближенная зависимость имеет вид

$$\bar{x} \cong -0.524\bar{t}^2 + 2.204\bar{t} .$$

Рисунок 3 демонстрирует траектории дождевых капель с разными начальными диаметрами. Видно, что с уменьшением размера дальность пролета капли растет. Это понятно, поскольку мелкие капли быстрее увлекаются горизонтальным потоком, чем крупные. Наличие захвата мелких частиц приводит к уменьшению дальности пролета капли, что связано в основном с увеличением скорости ее падения. Причем с ростом начального размера капли этот эффект становится менее заметным. Следует отметить, что расчетные траектории капель, как предсказано теорией [Ингель, 2012], примерно представляют собой параболу.

Более подробные картины поведения зависимостей времени достижения земной поверхности  $\bar{t}_s$  и дальности пролета  $\bar{x}_s$  от начального размера капли дождя показаны на рис. 4 (нижний индекс  $s$  от “surface”). С ростом размера капли величины  $\bar{t}_s$  и  $\bar{x}_s$  существенно сокращаются. Это связано с тем, что скорость падения крупных капель боль-

ше, чем у мелких. Заметно, что в интервале небольших размеров капель характерные величины  $\bar{t}_s$  и  $\bar{x}_s$  уменьшаются довольно быстро, а в диапазоне относительно крупных капель они меняются достаточно плавно. Наличие захвата мелких частиц капель приводит к уменьшению времени падения и дальности пролета капли, причем такое уменьшение более заметно в случае относительно небольших капель с  $d_0 \sim 250$  мкм. С ростом диаметра капель влияние захвата частиц на время  $\bar{t}_s$  и дальность  $\bar{x}_s$  заметно ослабевает (в частности, при диаметре капли 1000 мкм оно почти не заметно). В целом, при рассматриваемой объемной концентрации дисперсных частиц в аэрозольном облаке наличие захвата частиц каплей достаточно слабо влияет на величины  $\bar{t}_s$  и  $\bar{x}_s$ .

Заметим, что в расчетах наличие горизонтального потока практически не повлияло на характерное время  $\bar{t}_s$ , устанавливаемое в основном вертикальной составляющей скорости капли (это согласуется с оценками, приведенными выше). Учитывая это обстоятельство, а также то, что при отсутствии частиц в воздухе полное время падения капли практически определяется установившейся скоростью капли,  $t_s \cong H / |W|$  можно записать упрощенно  $\bar{t}_s \cong |W^N| / |W|$ . Проверка показала, что полученная

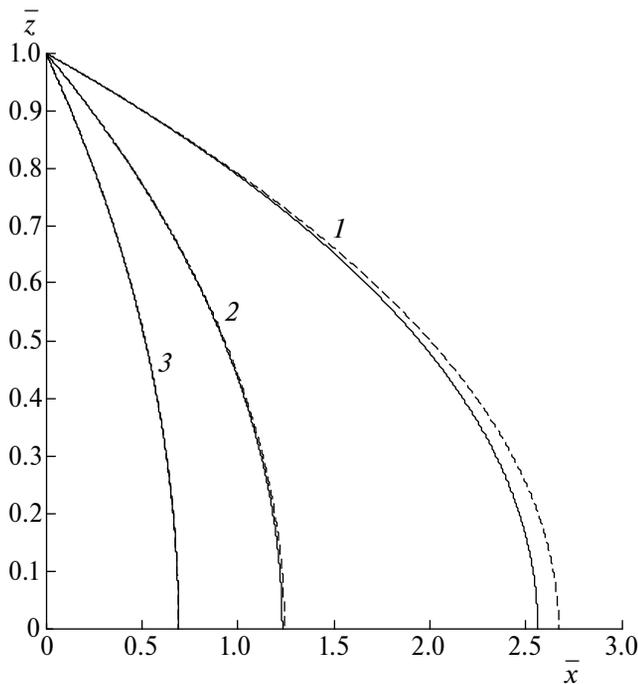


Рис. 3. Траектории капли при разных начальных диаметрах: кривая 1 – 250, 2 – 500, 3 – 1000 мкм.

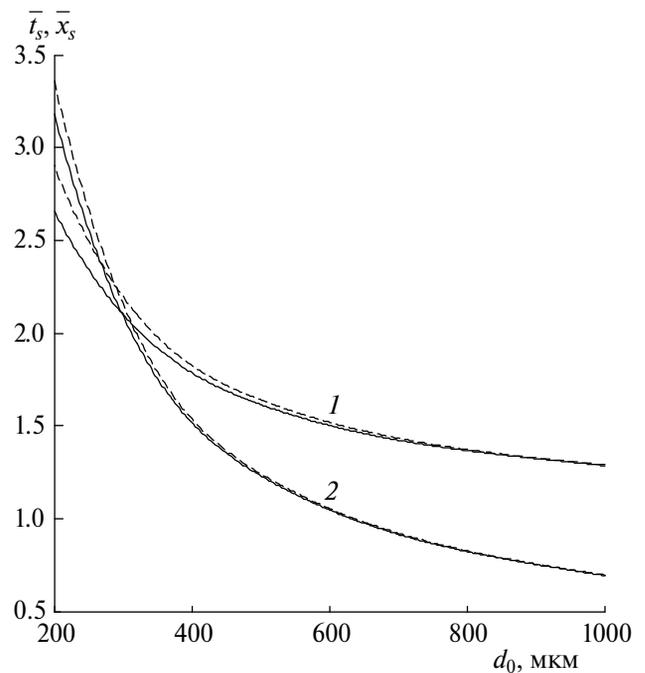


Рис. 4. Зависимости полного времени падения  $\bar{t}_s$  и дальности пролета  $\bar{x}_s$  капли от ее размера: 1 –  $\bar{t}_s$ , 2 –  $\bar{x}_s$ .

формула позволяет с хорошей точностью рассчитывать полное время (в безразмерном виде) падения капли. Например, для капли диаметром 1000 мкм на рис. 1 видно, что  $|W^N| \cong 4.67$  м/с,  $|W| \cong 3.64$  м/с, тогда имеем значение  $\bar{t}_s \cong 1.28$ , которое совпадает со значением из рис. 4, и этот факт дополнительно свидетельствует о корректности проведенных расчетов и достоверности полученных результатов. Очевидно, при увеличении размера капли ее движение приближается к предельному ньютоновому режиму, так что, полное время падения капли с ростом ее диаметра приближается к предельному значению  $\bar{t}_s \cong 1$ .

Расчеты показали, что объемная доля мелкодисперсной примеси в составе капли  $\alpha_p$  от вертикальной координаты зависит практически линейно, увеличиваясь от нуля в точке старта до некоторого максимального значения (зависящего от размера капли) на поверхности земли. Величина  $\alpha_p$  от времени зависит также линейно.

На рис. 5 представлена зависимость от размера капли интенсивности выпадения на поверхность земли дисперсного компонента, которая определяется как  $q_{ps} = \alpha_{ps} V_s w_s = V_{ps} w_s$ , где  $\alpha_{ps}$ ,  $V_{ps}$ ,  $V_s$ ,  $w_s$  – предельные объемная доля и сам объем твердого компонента в составе капли, а также объем и скорость капли в момент попадания на поверхность (которым отвечает нижний индекс  $s$ ). Очевидно, предельная объемная доля частиц в составе капли  $\alpha_{ps}$  может быть выражена также в виде  $\alpha_{ps} = q_{ps} / q_s$ , где  $q_s = V_s w_s$ . Заметим, что величина  $q_{ps}$  имеет размерность  $\text{м}^4/\text{с}$ , и умножение ее на концентрацию капель у поверхности земли дает общую объемную интенсивность выпадения (или объемный поток) мелкодисперсной примеси (которая имеет размерность  $\text{м}/\text{с}$  или  $\text{м}^3/(\text{м}^2 \text{с})$ ), вымываемых каплями, т.е. величина  $q_{ps}$  представляет собой объемный поток дисперсной примеси на поверхности, приходящийся на одну каплю. На рисунке также показаны зависимости  $\alpha_{ps}$  и  $V_{ps} = \alpha_{ps} V_s$  от  $d_0$ , которые свидетельствуют, что, несмотря на значительное снижение предельной объемной доли, сам объем дисперсной примеси в составе капли растет (приблизительно линейно) с увеличением начального размера капли. При этом величина  $q_{ps}$  также существенно возрастает. Это объясняется тем, что при увеличении размера

капли рост параметров  $V_s$  и  $w_s$  превалирует над уменьшением  $\alpha_{ps}$ . В частности, при увеличении диаметра капли от 200 до 1000 мкм параметр  $q_{ps}$  повышается более чем в 20 раз. Заметим, что объем частиц, захваченных каплей по отношению к объему самой капли (т.е. объемная доля частиц) для мелких капель больше, чем в случае крупных капель (это обстоятельство согласуется с результатами наблюдений [Chang-Jin Ma, Gong-Unn Kang, 2019]).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследована задача о движении капли дождя в атмосфере, содержащем аэрозольные частицы, с учетом периода релаксации скоростей и эффекта захвата частиц каплями, а также влияния сдвигового течения воздуха, моделирующего подоблачный ветер. Проанализированы предельные стоксовый и ньютоновский, а также промежуточный режимы движения капли. Показано, что задача о динамике капли дождя в атмосфере относится к классу сингулярно возмущенных задач, описываемых дифференциальными уравнениями с малым параметром при старшей производ-

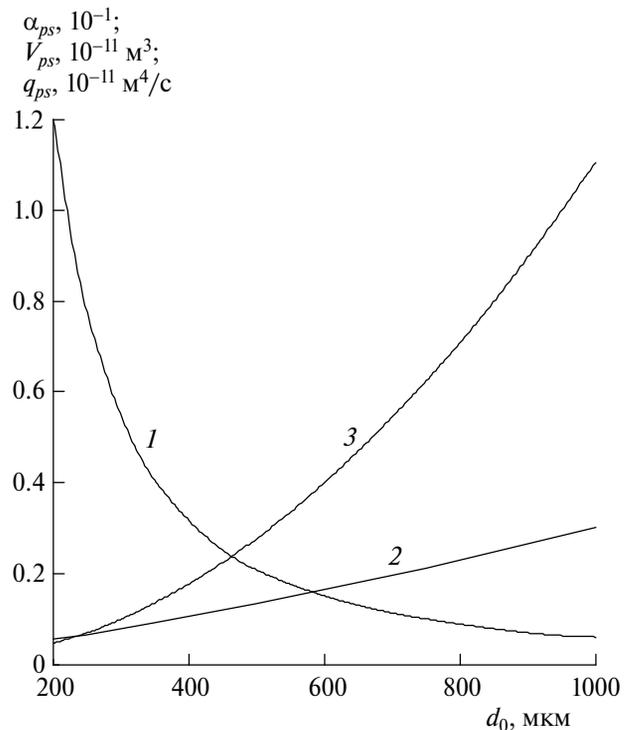


Рис. 5. Зависимости предельной объемной доли  $\alpha_{ps}$ , объема  $V_{ps}$  твердого компонента в составе капли и интенсивности выпадения частиц на поверхность земли  $q_{ps}$  от размера капли: 1 –  $\alpha_{ps}$ , 2 –  $V_{ps}$ , 3 –  $q_{ps}$ .

ной. Причем наличие захвата мелкодисперсных частиц каплями не меняет сингулярно возмущенный характер уравнений движения капли. Данный факт достаточно важен, поскольку, опираясь на общую теорию сингулярно возмущенных уравнений, которая достаточно хорошо развита, можно сделать существенные заключения, в частности, об устойчивости вырожденных решений, о характере поведения общего решения, о возможности разложения решения в асимптотический ряд по малому параметру, о привлечении для решения таких уравнений специальных алгоритмов и т.п.

Получена расчетная зависимость установившейся скорости падения капли от ее размера, которая хорошо согласуется с известными экспериментальными и приближенно-аналитическими зависимостями.

Установлено, что в случае наличия бокового течения модуль вектора скорости капли ведет себя немонотонно: сначала она резко увеличивается, затем по мере движения капли постепенно уменьшается до определенного значения, достигаемого на поверхности земли и зависящего от размера капли. Оценками и расчетами показано, что горизонтальный поток газа (с характерной скоростью  $\sim 5$  м/с) достаточно слабо влияет на вертикальную составляющую скорости капли.

Приведена зависимость времени достижения земной поверхности каплями дождя, а также дальности пролета капли от ее начального размера при наличии и отсутствии улавливания аэрозольных частиц. Указанные время и дальность пролета уменьшаются с ростом начального размера капель, причем наличие захвата частиц приводит к уменьшению этих параметров. Предложена упрощенная формула для приближенного расчета времени падения дождевой капли.

В целом, хотя влияние захвата частиц из аэрозольного облака каплями на ее движение незначительное (при концентрациях, рассматриваемых, в частности, в данной работе), однако в ряде случаев (например, в случае особо опасных примесей в аэрозольном облаке) не менее важным является изучение закономерностей изменения концентрации мелкодисперсной примеси в составе капли. В этой связи в работе проанализированы зависимости предельной (т.е. достигаемой у поверхности земли) объемной доли в капле и интенсивности выпадения дисперсной приме-

си на поверхность земли от начального размера капли. Показано, что с ростом размера капли предельная объемная доля частиц в составе капли уменьшается, однако при этом интенсивность выпадения вымываемого из аэрозольного облака дисперсного компонента, наоборот, существенно увеличивается.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
- Волков К.Н., Емельянов В.Н.* Течения газа с частицами. М.: Физматлит, 2008. 598 с.
- Воротынцева В.М., Малышев В.М.* Концентрирование техногенных примесей в капле дождя, движущейся в неоднородном концентрационном поле // Доклады РАН. Геофизика. 1997. Т. 354. № 3. С. 386–388.
- Губайдуллин Д.А., Осипов П.П.* Аэрогидродинамика дисперсной частицы. М.: Физматлит, 2020. 170 с.
- Ивандаев А.И.* О влиянии нестационарных эффектов на обмен импульсом и теплом между фазами газозвезы в ударных волнах // Теплофизика высоких температур. 1985. Т. 23. № 4. С. 721–725.
- Ивандаев А.И., Кутушев А.Г., Нигматулин Р.И.* Газовая динамика многофазных сред // Итоги науки и техники. Сер. Мех. жидкости и газа. Т. 16. М.: ВИНТИ, 1981. С. 209–290.
- Ингель Л.Х.* О динамике инерционных частиц в интенсивных атмосферных вихрях // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2021. Т. 57. № 6. С. 632–640.
- Ингель Л.Х.* Нелинейное взаимодействие двух составляющих движения при осаждении тяжелой частицы в сдвиговом течении // Журн. технической физики. 2012. Т. 82. № 11. С. 122–125.
- Кейدل Р.Д.* Твердые частицы в атмосфере и космосе. М.: Мир, 1969. 215 с.
- Келбалиев Г.И.* Коэффициенты сопротивления твердых частиц, капель и пузырей различной формы // Теоретические основы химической технологии. 2011. Т. 45. № 3. С. 264–283.
- Матвеев Л.Т.* Курс общей метеорологии. Физика атмосферы. Л.: Гидрометеиздат, 1984. 751 с.
- Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987. 464 с.
- Припачкин Д.А., Бudyка А.К.* Влияние параметров аэрозольных частиц на их вымывание из атмосферы дождевыми каплями // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2020. Т. 56. № 2. С. 203–209.
- Ракитский Ю.В., Устинов С.М., Черноуцкий И.Г.* Численные методы решения жестких систем. М.: Наука, 1979. 208 с.
- Тимашев С.Ф.* Роль химических факторов в эволюции природных систем (химия и экология) // Успехи химии. 1991. Т. 60. № 11. С. 2292–2331.
- Budyka A.K., Ogorodnikov B.I.* Radioactive aerosols generated by Chernobyl // Russian J. Physical Chemistry A. 1999. V. 73. № 2. P. 310–319.

- Chang-Jin Ma, Gong-Unn Kang.* The chemical nature of individual size-resolved raindrops and their residual particles collected during high atmospheric loading for PM<sub>2.5</sub> // From edited volume "Rainfall – Extremes, Distribution and Properties". Edited by J. Abbot and A. Hammond. 2019. 120 p.
- Chi Tien, Ramarao B.V.* Granular filtration of Aerosols and Hydrosols. 2-nd Edition. Elsevier, 2007. 491 p.
- Edwards B.F., Wilder J.W., Scime E.E.* Dynamics of falling. 2001. V. 22. P. 113–118.
- Greenfield S.* Rain scavenging of radioactive particulate matter from the atmosphere // *J. Meteorol.* 1957. V. 14. № 2. P. 115–125.
- Marshall J.S., Palmer W.M.* The distribution of raindrops with size // *J. Meteorol.* 1948. V. 5(2). P. 165–166.
- Mason B.J.* The Physics of Clouds. Clarendon press: Oxford University Press, 1971. 671 p.
- Reist P.* Introduction to Aerosol Science. N.Y.: A Division of Macmillan, 1984. 299 p.
- Shapiro A.* Drag-induced transfer of horizontal momentum between air and raindrops // *J. Atmos. Sci.* 2005. V. 62. P. 2205–2219.
- Turner D.B.* Workbook of atmospheric dispersion estimates: an introduction to dispersion modeling. Second edition, CRC Press, 1994. 194 p.
- Yoon R.H., Luttrell G.H.* The effect of bubble size on fine particle flotation // *Miner. Process. Extr. Metal. Rev.* 1989. № 5. P. 101–110.

## Rain Drop Motion in an Atmosphere Containing Aerosols Particles

T. R. Amanbaev\*

*Auezov South Kazakhstan University,  
Tauke khan avenue, 5, Shymkent, 160012 Kazakhstan  
\*e-mail: tulegen\_amanbaev@mail.ru*

A mathematical model is constructed for the dynamics of a raindrop moving in a gravity field through an atmosphere containing fine particles, taking into account the processes of relaxation of its velocity and the capture of fine particles. It has been established that the equation of motion of a drop in the problem posed belongs to the class of singularly perturbed equations, for the integration of which it is necessary to involve special algorithms. In the limiting modes of droplet motion, analytical solutions of the problem are obtained that describe the dependence of the droplet velocity and coordinate on time. In the complete formulation, the solutions of the problem are obtained numerically for different values of the defining parameters. The influence of the droplet size on the parameters of its motion in a concentrated aerodispersed mixture has been studied. The dependences of the limiting volume fraction of the solid component in the composition of the drop and the intensity of the precipitation of particles (washed out by the drop) on the earth's surface on the size of the drop are obtained. Comparison of the calculated, approximate-analytical and experimental dependences of the steady-state rate of fall of a drop on its size was carried out, which showed their good agreement.

**Keywords:** drop, aerosols particles, Reynolds number, Stokes regime, Newtonian regime, terminal velocity, shear flow