ИЗВЕСТИЯ РАН. ФИЗИКА АТМОСФЕРЫ И ОКЕАНА, 2025, том 61, № 1, с. 9–13

УДК 551.551

СЛУЧАЙНЫЕ ФАКТОРЫ И ПОКАЗАТЕЛИ С ТРЕТЯМИ В СТАТИСТИКЕ НЕКОТОРЫХ ПРИРОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Е. Б. Гледзер*, Г. С. Голицын**

Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН, Пыжевский пер., 3, стр. 1, Москва, 119017 Россия

**e-mail: lgg@ifaran.ru*

***e-mail: gsg@ifaran.ru*

Поступила в редакцию 11.10.2024 г.
После доработки 30.10.2024 г.
Принята к публикации 15.11.2024 г.

Рассмотрена кинематика ряда природных процессов со случайными параметрами. В статистике наклонов рельефа, размеров облаков и литосферных плит, скоростей в пористой среде степенные зависимости, содержащие в ряде случаев дроби с третьими долями, использованы некоррелированные во времени или пространству величины — ускорения, углы наклонов, размеры и скорости. Указаны ссылки для сопоставления с эмпирическими данными.

Ключевые слова: природные процессы, случайные ускорения, рельеф, облакообразование, землетрясения, литосферные плиты, пористая среда

DOI: 10.31857/S0002351525010012, **EDN:** HGDEIX

1. ВВЕДЕНИЕ

В статьях [Голицын, 2024; Kolmogoroff, 1934] были в компактной форме приведены формулы для статистических характеристик ряда природных феноменов. Частью эти результаты ранее рассматривались в книгах [Голицын, 2022; Голицын, 2012]. В качестве инструмента для получения закономерностей предложено уравнение Колмогорова как основа для описания природных процессов при случайном внешнем воздействии в процессах.

В [Голицын, 2024] приведены формулы для структуры облаков, распределений литосферных плит и землетрясений, рельефа поверхности небесных тел, разливов рек, спектра энергии космических лучей и др. (см. также [Голицын и др., 2023; Гледзер и Голицын, 2019; Gledzer and Golitsyn, 2019; Kaula, 1966; Turcotte, 1997; Lovejoy, 1982; Kasahara, 1981]).

Ниже приводятся некоторые простые модели кинематики с упомянутыми случайными воздействиями, которые могут имитировать динамику ряда явлений с появлением показателей с третями в формулах для их статистических характеристик. Модели могут отнесены к виду так называемых игрушечных — термин (“toy-models”) появился в зарубежных изданиях для каскадных (shell) моделей, предложенных А.М. Обуховым в 1970 г. для имитации процессов обмена энергией между возмущениями различных масштабов в турбулентности на основе систем гидродинамического типа.

Простейшая динамика со случайными внешними силами описывается уравнениями Ланжевена

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t), \frac{dv(t)}{dt} = a(t), \tag{1}$$

где случайные ускорения $a(t)$ имеют достаточно малый масштаб корреляции: корреляционная функция представима в виде П-образной ступеньки, $<a(t_1)a(t_2)> = A^2$ при $|t_1 - t_2| < \delta$, $<a(t_1)a(t_2)> = 0$ при $|t_1 - t_2| > \delta$. В этих уравнениях x — смещение, ν — скорость.

Вторые моменты скорости

$$< v(t)^2 >= \int_0^t dt_1 \int_0^t < a(t_1)a(t_2) > dt_2 =$$

$$= \int_0^t dt_1 A^2 \delta = \varepsilon t, \ \varepsilon = A^2 \delta,$$

и смещения

$$< x(t)^2 >= \int_0^t dt_1 \int_0^t < v(t_1)v(t_2) > dt_2 =$$

$$= \int_0^t \int_0^t < \left(\frac{d(t-t_1)v(t_1)}{dt_1} - (t-t_1)\frac{dv(t_1)}{dt_1} \right) \times$$

$$\times \left(\frac{d(t-t_2)v(t_2)}{dt_2} - (t-t_2)\frac{dv(t_2)}{dt_2} \right) > dt_1 dt_2 .$$

С учетом граничного условия $v(0) = 0$ это соотношение приводится к виду при $\delta \to 0$ (дельта-коррелированность):

$$\int_0^t \int_0^t (t-t_1)(t-t_2) < a(t_1)a(t_2) > dt_1 dt_2 =$$

$$= \int_0^t (t-t_1)^2 \, dt_1 \varepsilon = \varepsilon t^3 / 3.$$

Вместе с формулой для структурной функции скорости $D_v(\tau) = <(v(t + \tau) - v(t))^2>$ (τ – разница во времени измерения скоростей), получаемой как и для момента скорости, имеем основные зависимости, которые использовались в [Голицын, 2024; Голицын, 2022; Гледзер и Голицын, 2019]:

$$<v(t)^2> = \varepsilon t,\ D_v(\tau) = \varepsilon\tau,\ <x(t)^2> = \varepsilon t^3/3. \quad (2)$$

Связь между вторыми моментами и их спектральными представлениями, когда они имеют степенной вид, осуществляется формулами

$$D_v(\tau) \propto \tau^\gamma,\ E(\omega) \propto \omega^{-(\gamma+1)}.$$

Для описания плотности вероятности распределения по скоростям и координатам $P(x,u,t)$ из (1) получается упомянутое уравнение Колмогорова (для одномерного движения) с коэффициентом диффузии D в пространстве скоростей (по А.М. Обухову)

$$\frac{dP}{dt} + u\frac{dP}{dx} = D\frac{d^2P}{du^2},$$

из которого можно получить формулы для всех моментов скорости и координат. Это прямое уравнение Колмогорова для распределения вероятностей по скорости и координате. Оно получается в более общих, чем из (1), случаях, при марковском характере процессов. Пример этому – конечно-разностное представление этого уравнения для числа (вероятности) частиц размера d_n в момент t, $Q_n(t)$:

$$\frac{dQ_n(t)}{dt} = -(\alpha+\beta)Q_n(t) + \alpha Q_{n-1}(t) + \beta Q_{n+1}(t),$$

которое получено в [Chkhetiani et al., 2021] для функции распределения аэрозольных частиц по размерам (α, β – константы модели). Такого типа уравнения изучались Колмогоровым в связи с теориями очередей [Kolmogoroff, 1931] еще до работы [Kolmogoroff, 1934].

Появление первых степеней времени в моментах может иметь место не только для скоростей, как в (2), но и для рельефа планет.

Микроструктура рельефа

Когда альтиметры начали измерять структуру планетных поверхностей, выяснилось, что пространственный спектр рельефа обратно пропорционален квадрату волнового числа, $S(k) \propto k^{-2}$. Кроме того, было замечено, что спектр производной высоты поверхности по горизонтали постоянен. Это означает, что углы наклона рельефа Z' дельта-коррелированы по горизонтальной координате, $<Z'(y_1) Z'(y_2)> = <Z'^2>\delta(y_1 - y_2)$, что соответствует дельта-коррелированности сил, поскольку вдоль склонов действует сила тяжести – сыпется порода, течет вода и т.п. В терминах Колмогорова – это марковость, т.е. независимость воздействий на соседних участках местности (очевидно, не совсем близких).

Поэтому угол $\zeta(y)$ наклона рельефа $z(y)$, $\frac{dz(y)}{dy} = \zeta(y)$, будем считать случайной величиной с относительно малым масштабом корреляции (в сравнении с горизонтальным масштабом рельефа). Тогда величина z будет соответствовать скорости v в уравнении (1), ζ – ускорению a, y – времени t. Поэтому из (2) структурная функция рельефа $D_z(\delta y) = <(z(y + \delta y) - z(y))^2> \propto \delta y$ с соответствующим спектром ω^{-2}.

Понятно, что для больших дистанций δy, а значит малых частот ω, предположение декорреляции не верно (рельеф может прерываться). Поэтому эти формулы имеют место для микроструктуры рельефа. Подробное изложение этого подхода с рассмотрением на сфере изложено в [Gledzer and Golitsyn, 2019]. В частности, разложение по сферическим функциям дает спектр $S_j = 4\pi r^2 D_r/[j(j + 1)] = 4\pi D_r/[k(k + 1/r)]$,

r – радиус планеты, $k = j / r$ – волновое число. Сопоставление этой формулы с эмпирически измеренными высотами для Земли и Венеры показывают, что для компонент разложения, начиная с $j > 10$ для Земли величина $D_r = 0.5$ м, а для Венеры $D_r = 0.16$ м с точностью в 10%.

Заметим, что в этих формулах никаких показателей в виде дробей с третьими долями не возникало, поскольку использовалось только формула в (2) с линейной зависимостью от переменной. Все меняется, когда применяется формула с кубической зависимостью в (2). Это происходит в модели облакообразования.

Модель динамики облака

Периметр квадрата $P = 4a$, a – сторона квадрата, связан с его площадью $A = a^2$ зависимостью $P \propto A^{1/2}$. Также для круга. Однако, когда были измерены площади и периметры облаков над Индийским океаном с помощью спутниковых данных и дождевых облаков над США с использованием радаров [Lovejoy, 1982], то было обнаружено, что имеет место зависимость $P \propto A^{1/2}$ для $P \propto (\sqrt{A})^{\beta}$, $\beta = 1.35$ A в интервале порядка 10^6 км^2. В указанной работе значение β связывалось с фрактальной формой облаков, однако было отмечено, что показатель β = 1.35 близок к 4/3. Это указывало на возможную связь с колмогоровскими закономерностями и, соответственно, со случайными процессами.

Облако, как известно, клубится (не струится, в основном). Линейный (максимальный) размер L его по порядку величины пропорционален периметру P. Пусть часть облака выдвигается на расстояние dL, площадь A увеличится на $dA = dL \cdot S$, где S – поперечный размер клуба облака. При этом и сам поперечный размер S увеличится (или уменьшится) на $dS = dL \cdot a(L)$, где $a(L)$ – случайная величина. Можно эту конструкцию представить как шкаф с выдвижными ящиками, в котором выдвигающиеся на dL ящики по ширине тоже увеличиваются на dL: на большое расстояние выдвигаются широкие ящики, а на маленькое – узкие. Имеем уравнения

$$dA / dL = S, dS / dL = a(L).$$

Это соответствует движению частицы (1) в поле случайных ускорений, если площадь A соответствует координате X, линейный размер L соответствует времени t, поперечный размер S соответствует скорости v. С условием дельта-корреляции имеем, как и в вышеприведенных формулах

$$< A^2 > \propto L^3.$$

Если $L \propto P$, то $A \propto P^{3/2}$. Этот показатель 3/2 и фигурирует при обсуждении закономерностей динамики облака в [Голицын, 2024]. Обратная зависимость – периметр как функция площади, $P \propto A^{2/3} = (\sqrt{A})^{4/3}$. Это и дает показатель β = 4/3.

Близкая модель может иметь место для статистики литосферных плит.

Распределение литосферных плит

Для землетрясений и движения литосферных плит основным определяющим параметром является сейсмический момент M, который задает магнитуду m, входящую в формулу Гутенберга–Рихтера для кумулятивного распределения

$$\lg N(\geq m) = a - bm, \ a, b = const.$$

Момент M связан с m эмпирическим соотношением $m = 2\lg M / 3 - 6$ [Kasahara, 1981].

Изменение момента M сил, действующего на плиту с размером L и толщиной h при увеличении размера на dL пропорционален $dM \propto dL \cdot h$. Но и толщина h может меняться при увеличении размера на $dh \propto dL \cdot a(L)$, со случайной величиной $a(L)$. Отсюда

$$dM / dL = h \cdot C_1, dh / dL = a(L) \cdot C_2,$$

C_1, C_2 – размерные константы, зависящие от геологии и физических параметров. Отсюда при дельта-корреляции получим

$$< h^2 > \propto L, \ < M^2 > \propto L^3.$$

Тогда $h \propto L^{1/2}, M \propto L^{3/2}, L \propto M^{2/3}$.

Плита площадью L^2 и толщиной h при сохранении объема может разбиться на части

$$N \propto \frac{1}{L^2 h} \propto \frac{1}{L^2 \sqrt{L}} = L^{-5/2} = M^{-\frac{2}{3}\frac{5}{2}} = M^{-5/3}.$$

Это форма закона Гутенберга–Рихтера, обсуждаемая в [Голицын, 2024].

Спектр энергии космических лучей

Для космических частиц определяется их число, регистрируемое на единицу площади. Определяющей величиной является объемная плотность энергии как энергии на единицу объема w = 0.5 эВ/м³. В объеме $\propto R^3, R$ – линейный размер облака частиц, содержится $N_0 \propto R^3 w / E$ частиц. Поэтому площадь $S \propto (N_0 E / w)^{2/3}$, и размер $R \propto (N_0 E / w)^{1/3}$. Число N регистрируемых частиц с энергией $\geq E$, $N \propto 1/E$, а на единицу площади регистрируется $I(\geq E) = N / S \propto (1/E)(E/w)^{-2/3} \propto E^{-5/3}$ частиц. В дифференциальной форме $I \propto -dI(\geq E) / / dE \propto E^{-8/3}$.

Другим способом, если ограничиться только частицами с энергией E, возвратимся к исходным формулам (2) при действии на поток космических частиц дельта-коррелированных ускорений: $< v^2 > \propto E \propto t$. Расстояние, которое пролетают эти частицы из (2) $X^2 = < x^2 > \propto t^3$ или $X \propto E^{3/2}$. Если у источника было N_0 частиц, то на расстоянии X на площадь ΔS их рассеялось $I \propto N_0 \Delta S / X^2 \propto N_0 \Delta S / E^3$ (в знаменателе – величина, пропорциональная площади сферы радиуса X). Но датчик регистрирует только частицы вдоль луча с линейными размерами $R \propto (E / w)^{1/3}$, поэтому $\Delta I \propto \Delta S (1/E^3)(E/w)^{1/3}$, и на единицу площади получаем $I = \Delta I / \Delta S \propto E^{-8/3}$.

Приведем пример применения формул для случая, который не рассматривался в работах [Голицын, 2024; Голицын, 2022; Голицын, 2012].

Динамика воздуха вблизи границы между пористой и воздушной средами

Движение воздуха в пористой среде песка осуществляется под действием течения над его поверхностью. В слое динамика воздуха описывается законом Дарси $\frac{1}{\rho}\nabla p_p = -\frac{\nu}{\kappa}\vec{u}_p$, где ν – вязкость, κ – коэффициент проницаемости пористой среды (размерность – площадь), $\vec{u}_p$ – скорость воздуха в слое песка, которую считаем случайной величиной, ρ и p_p – плотность и давление в слое. Оценки показывают, что $\kappa \propto \delta^2 / \beta$, $\beta \propto 10$, где δ – размер пор ([Бэтчелор, 1973; Гледзер и др., 2010]).

В тонком слое над пористой средой имеется уравнение вязкого течения $\frac{1}{\rho}\nabla p = \nu \Delta \vec{u}$, $\vec{u}$ – скорость над песком. Сверху и в слое давление одинаково, $\Delta \vec{u} = -\vec{u}_p / \kappa$. Заменяя призводные в Δ на d^2 / dl^2, где l микромасштаб возмущений, имеем для $u = |\vec{u}|$, $\frac{d^2 u}{dz^2} = -u_p / \kappa$, или

$$\frac{du}{dl} = b, \ \frac{db}{dl} = -\frac{u_p}{\kappa},$$

где b – вспомагательная величина (обратное время).

Пространственный масштаб корреляции для скорости u_p в песке с порами величиной δ равен δ, т.е. $< u_p(l_1) u_p(l_2) > = U_p^2$, при $|l_1 - l_2| < \delta$; $< u_p(l_1) u_p(l_2) > = 0$ при $|l_1 - l_2| > \delta$. Отсюда, как и для динамики ланжевеновской частицы, получаем

$$< b^2 > = \pi l, \ < u^2 > = \pi l^3 / 3,$$

где $\pi = U_p^2 \delta / \kappa^2$ (размерность $[\pi]$ = 1/(см·с²)). В формулу входят масштаб корреляции, коэффициент проницаемости и амплитуда возмущений скорости в среде.

С учетом формулы для κ зависимость амплитуды скорости U_p в слое песка от размера пор δ имеет вид

$$U_p = \delta^{3/2} \left(\frac{3 < u^2 >}{l^3 \beta^2} \right)^{1/2},$$

т. е. размер пор δ для скорости воздуха в слое песка U_p входит в степени 3/2. Здесь $< u^2 >^{1/2}$ – амплитуда скорости для возмущений микромасштаба l над пористым слоем.

Формулы задают величину скорости в зависимости от масштаба l. Пусть вместо l задан поток энергии (по Колмогорову) $\varepsilon = < u^3 > / l$ в слое над пористой средой, и аналогичная величина в слое, определяемая пористостью δ: $\varepsilon_p = U_p^3 / \delta$. Тогда определяется масштаб возмущений над слоем песка l_e, если заданы ε, ε_p, $l_e = \delta \left(\varepsilon / \varepsilon_p \right)^{2/7}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенные модели можно отнести к наводящим соображениям в подходах к закономерностям рассмотренных природных процессов. К сожалению, нет систем уравнений, где описанные процессы отображались бы достаточно полно (в частности, в [Keilis-Borok, 1994] отмечено, что “seismology is still in pre-equation state”), поэтому пока не приходится ждать решения проблем путем численного моделирования. Также невозможен сейчас строгий анализ подобия и размерностей для перечисленных выше задач.

В рассмотренных простых моделях задается случайная величина, которая далее по кинематике или геометрии определяет весь процесс. В ланжевеновской модели и спектре энергии для космических лучей это случайное ускорение, в рельефе – случайный угол наклона, для облака и плиты разлома – случайный размер и толщина, в слое песка – случайная скорость из-за пористости. Их средний квадрат с условием дельта-корреляции далее задает определяющий размерный параметр задачи, который и контролирует динамику и кинематику процесса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости // М.: Мир, 1973. 780 с.

Гледзер Е.Б., Голицын Г.С. Скейлинг и конечные размеры ансамбля частиц в движении с притоком энергии // Докл. РАН. 2019. Т. 433(3). С. 466.

Гледзер Е.Б., Гранберг И.Г., Чхетиани О.Г. Динамика воздуха вблизи поверхности почвы и конвективный вынос аэрозоля // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2010. Т. 46. С. 35–47.

Голицын Г.С. Работа А.Н. Колмогорова 1934 г. – основа для объяснения статистики природных явлений микромира // Успехи физических наук. 2024. Т. 194. С. 86–96.

Голицын Г.С. Вероятностные структуры макромира: землетрясения, ураганы, наводнения. М.: Физматлит, 2022. 174 с.

Голицын Г.С. Статистика и динамика природных процессов и явлений. М.: URSS, 2012. 398 с.

Голицын Г.С., Чхетиани О.Г., Вазаева Н.В. Облака и теория турбулентности: самоподобие, показатель фрактала 4/3 и инварианты // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2023. Т. 59. С. 242–244.

Gledzer E.B., Golitsyn G.S. Kaula's rule as a consequence of probability laws by A.N.Kolmogorov and his school // Russ.J.Earth Sci. 2019. ESG00006.

Chkhetiani O.G., Gledzer E.B., Vazaeva N.V. Measurements and approximations for submicron-aerosol size distribution functions // Earth and Space Science. 2021. https://doi.org/10.1029/2020 EA001616

Kaula W.M. Theory of Satellite Geodesy; Applications of Satellites to Geodesy. Waltham, MA: Blaisdell Publ. Co., 1966.

Kasahara K. Mechanics of Earthquakes. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1981.

Keilis-Borok V.I. Symptoms of instability in a system of earthquake-prone faults // Physica D. 1994. V. 77. P. 193–199.

Kolmogoroff A. Sur la probleme d'attente // Mat.sb. 1931. V. 38(1-2). P. 101–106.

Kolmogoroff A. Zufallige Bewegungen (Zur Theorie der Brownshcen Bewegung) // The Annals of Mathematics. 1934. V. 35(1). P. 116. https://doi.org/10.2307/1968123

Lovejoy S. Area-perimeter relation for rain and cloud areas // Science. 1982. V. 216(4542). P. 185–187.

Turcotte D.L. Fractals and Chaos in Geology and Geophysics 2nd ed. // Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997.

RANDOM FACTORS AND INDICATORS WITH THIRDS IN STATISTICS SOME NATURAL PROCESSES

© 2025 E. B. Gledzer*, G. S. Golitsyn**

Obukhov Institute of Atmospheric Physics RAS, Pyzhevsky per., 3, bld. 1, Moscow, 119017 Russia

**e-mail: lgg@ifaran.ru*

***e-mail: gsg@ifaran.ru*

The kinematics of a number of natural processes with random parameters is considered. In the statistics of relief inclinations, sizes of clouds and lithospheric plates, velocities in a porous medium, power-law dependences, which in some cases contain fractions with thirds, use quantities uncorrelated in time or space – accelerations, inclination angles, sizes and velocities. Links are provided for comparison with empirical data.

Keywords: natural processes, random accelerations, relief, cloud formation, earthquakes, lithospheric plates, porous media