

УДК 551.465

О ВЛИЯНИИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ГЕОСТРОФИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ

© 2025 г. Н. П. Кузьмина^{а, *}, С. Л. Скороходов^{б, **}, Н. В. Журбас^а, Д. А. Лыжков^а

^аИнститут океанологии им. П.П. Ширинова РАН, Нахимовский проспект, 36, Москва, 117997 Россия

^бФИЦ «Информатика и Управление» РАН, ул. Вавилова, 44, Москва, 119333 Россия

*e-mail: kuzmina@ocean.ru

**e-mail: sskorokhodov@gmail.com

Поступила в редакцию 02.08.2024 г.

После доработки 21.09.2024 г.

Принята к публикации 15.11.2024 г.

Проведен анализ влияния граничных условий на неустойчивость геострофического зонального течения конечного поперечного масштаба с вертикальным параболическим профилем скорости общего вида в ограниченном по вертикали слое. Модель основана на уравнении потенциального вихря в квазигеострофическом приближении с учетом вертикальной диффузии массы и импульса. Уравнение и граничные условия сводились к спектральной задаче на собственные значения типа Орра–Зоммерфельда. Для расчета собственных функций и собственных значений использовался высокоточный аналитико-численный метод. Рассматривались два вида условий на горизонтальных границах слоя: равенство нулю возмущений вертикальной скорости и потоков плавучести (задача I); равенство нулю возмущений вертикальной скорости и возмущений горизонтальных скоростей (задача II). Получено, что граничные условия задачи II, которые включают условия прилипания, способствуют стабилизации длинноволновых неустойчивых возмущений и сужают диапазон неустойчивых коротковолновых возмущений. Отмечается, однако, что все типы неустойчивости течения, полученные при решении задачи I, такие как бароклинная неустойчивость, неустойчивость критического слоя, а также новая неустойчивость, характеризующаяся фазовой скоростью, превышающей максимальную скорость течения, возникают и при использовании граничных условий прилипания, но в более узком диапазоне изменения физических параметров исходного уравнения.

Ключевые слова: неустойчивость океанских геострофических течений, диффузия импульса и массы, задача на собственные значения

DOI: 10.31857/S0002351525020014, EDN: GKPOLH

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование влияния граничных условий на динамику возмущений в моделях описания неустойчивости океанских геострофических течений является актуальным, прежде всего, для обоснования применимости полученных результатов к реальным ситуациям.

С целью такого исследования мы будем анализировать неустойчивость океанского геострофического течения с параболическим вертикальным профилем скорости общего вида [Скороходов и Кузьмина, 2022; Кузьмина и др., 2023]. Это позволит при определенных пара-

метрах модели рассмотреть и частный случай течения с линейным вертикальным профилем скорости, которое является типичным для изучения неустойчивости, возникающей из-за вертикального сдвига (см., например, [Eady, 1949; Miles, 1965; Stern, 1975; Педлоки, 1984; Калашник, 2001; Шакина, 2013]).

Для описания неустойчивости зонального течения конечного поперечного масштаба в ограниченном по вертикали слое будем опираться на модель, основанную на уравнении потенциального вихря в квазигеострофическом приближении с учетом вертикальной диффузии импульса и массы. Модельное уравнение,

вывод которого подробно представлен в работах [Kuzmina, 2016; Кузьмина и др., 2018, 2019], сводится к спектральному уравнению четвертого порядка (аналог уравнения Орра–Зоммерфельда). Принципиально важным является то, что четвертый порядок уравнения при классической параметризации диссипации обусловлен учетом в модели вертикальной диффузии массы, а не вертикальной диффузии импульса. Именно это является аргументом для выбора условий на горизонтальных границах слоя: кроме равенства нулю вертикальной скорости возмущений, дополнительно полагается равенство нулю потоков плавучести. Можно предположить, что эти, физически обоснованные граничные условия, занижают влияние трения на неустойчивые возмущения. Поэтому представляет интерес рассмотреть данную задачу с условиями равенства нулю возмущений горизонтальной скорости (условия прилипания) вместо условия равенства нулю потоков плавучести. Так, в работах [Скороходов и Кузьмина, 2018; Кузьмина и др., 2019], в которых анализировалась неустойчивость течения с параболическим профилем скорости (максимум скорости течения был в центре слоя) подробно обсуждались два вида граничных условий. В статьях [Скороходов и Кузьмина, 2018, 2019] представлены и некоторые результаты расчетов неустойчивых возмущений для течения большого поперечного масштаба с учетом условий прилипания, показывающие, что условия прилипания стабилизируют возмущения с малыми волновыми числами. Учитывая, что в данных работах изучались только конкретные виды течений, целесообразно провести более общий анализ влияния условий прилипания на неустойчивость геострофических течений. В связи с этим в настоящей работе будет проведено сравнение влияния на растущие возмущения геострофического течения более общего вида двух типов граничных условий. Будет также представлено обсуждение параметризации трения в задачах описания квазигеострофических движений в океане.

2. МОДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Для удобства изложения статьи кратко повторим постановку задачи [Кузьмина и др., 2023]. Уравнение потенциального вихря в безразмерном виде для зонального течения с пара-

болическим вертикальным профилем с максимумом в центре слоя было выведено и подробно анализировалось в [Кузьмина и др., 2018, 2019]. Для скорости основного потока с вертикальным параболическим профилем общего вида оно выводится аналогично, и без учета бета-эффекта имеет вид:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U(z) \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \text{Bu} \cdot \Delta p \right) - U''_{zz} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^4 p}{\partial z^4} + \text{Pr} \cdot \text{Bu} \cdot \frac{\partial^2 \Delta p}{\partial z^2} \right), \quad (1)$$

где p – возмущение давления, $U(z) = 1 - az^2 + bz$, $a = \frac{s_1 H_0^2}{U_0}$, $b = \frac{s_2 H_0}{U_0}$, s_1, s_2 – положительные константы, характеризующие величины вертикальных линейного и постоянного сдвигов скорости, U_0 – скорость течения в середине слоя, $2H_0$ – вертикальный масштаб слоя, $R = U_0 H_0^2 / (KL) = \text{Re} H_0 / L$, $\text{Re} = U_0 H_0 / K$ – число Пекле (аналог числа Рейнольдса), K – коэффициент вертикальной диффузии плавучести, $\text{Bu} = H_0^2 N_0^2 / (f^2 L^2)$ – число Бургера (см., например, [Cushman–Roisin, 1994]), N_0 – частота плавучести в фоновом состоянии, L – горизонтальный поперечный масштаб зонального геострофического течения, f – параметр Кориолиса, $\text{Pr} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}$. Ось x направлена на восток (зональная координата); ось y – на север (меридиональная координата), ось z – вверх. Скорость зонального течения направлена вдоль координаты x . Диапазон изменения переменной y в рассматриваемой области: $y \in [0, 1]$. Диапазон изменения переменной z : $z \in [-1, 1]$. Для определенности положим, что скорость течения на нижней границе слоя, $z = -1$, равна нулю, то есть $U_0 = s_1 H_0^2 + s_2 H_0$, и, следовательно, $a + b = 1$.

Первый член в скобках, в правой части уравнения (1), описывает влияние диффузии массы, второй член в скобках описывает влияние трения (диффузии импульса).

Безразмерные переменные и искомая функция вводились по формулам: $x^* = x/L$, $y^* = y/L$, $z^* = z/H_0$, $t^* = tU_0/L$, $p^* = p/p_0$,

p_0 — размерная константа, $[p_0] = m^2 c^{-2}$ (давление нормировано на отсчетную плотность). Звездочки, которыми отмечены безразмерные переменные и искомая функция, в (1) опущены.

Условия равенства нулю вертикальной скорости на горизонтальных границах слоя и условия равенства нулю возмущений скоростей на боковых границах течения сводятся к следующим уравнениям:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (1 - az^2 + bz) \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial p}{\partial z} - (-2az + b) \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{R} \frac{\partial^3 p}{\partial z^3}, \quad z = \pm 1, \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad y = 0, \quad y = 1. \quad (3)$$

Дополнительное условие равенства нулю потоков плавучести на границах слоя имеет вид:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0, \quad z = -1, \quad z = 1. \quad (4)$$

И, наконец, альтернативное к условию (4), граничное условие прилипания имеет вид:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad z = -1, \quad z = 1. \quad (5)$$

Мы будем рассматривать две следующие задачи: уравнение (1) с граничными условиями (2)–(4) (задача I) и уравнение (1) с граничными условиями (2), (3), (5) (задача II).

Следуя стандартному подходу исследования неустойчивости течений (см., например, [Eady, 1949; Lin, 1955]) подставим в (1)–(5) выражение для возмущения давления в виде: $p = F(z) e^{ik(x-ct)} \sin(\pi ny)$. Здесь мы ограничимся случаем $n = 1$: масштаб возмущения в меридиональном направлении равен масштабу фронта или течения (максимально растущая мода). После подстановки получим соответствующее уравнение и граничные условия в спектральном виде:

$$(1 - az^2 + bz - c) \left(\frac{d^2 F}{dz^2} - \text{Bu} \cdot (k^2 + \pi^2) F \right) + 2aF = \frac{1}{ikR} \left(\frac{d^4 F}{dz^4} - \text{Bu} \cdot \text{Pr} \cdot (k^2 + \pi^2) \frac{d^2 F}{dz^2} \right), \quad (6)$$

$$(1 - a + b - c) \frac{dF}{dz} - F \cdot (-2a + b) = \frac{1}{ikR} \frac{d^3 F}{dz^3}, \quad z = 1, \quad (7)$$

$$-c \frac{dF}{dz} - F \cdot (2a + b) = \frac{1}{ikR} \frac{d^3 F}{dz^3}, \quad z = -1, \quad (8)$$

$$\frac{d^2 F}{dz^2} = 0, \quad z = -1, \quad z = 1, \quad (9)$$

$$F = 0, \quad z = -1, \quad z = 1, \quad (10)$$

где k — безразмерное волновое число вдоль координаты x , $c = c_1 + i \cdot c_2$ — комплексная фазовая скорость, i — мнимая единица. Возмущения растут со временем, то есть являются неустойчивыми, если $c_2 > 0$. Задача I: уравнение (6) и граничные условия (7)–(9). Задача II: уравнение (6) и граничные условия (7), (8), (10).

При $a = 1$, $b = 0$ задача I сводится к задаче, рассмотренной в работах [Скороходов и Кузьмина, 2018; Кузьмина и др., 2019], при $a = 0$, $b = 1$ она сводится к задаче [Кузьмина и др., 2020], которая подробно рассматривалась для слоя от $z = 0$ до $z = 1$.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ МОДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ I И II

Для поиска собственных функций (СФ) и собственных значений (СЗ) модельных задач I и II использовался новый высокоточный аналитико-численный метод решения уравнения 4-го порядка с малым параметром при старшей производной [Skorokhodov and Kuzmina, 2024], более эффективный, чем разработанные ранее методы для решения аналогичных задач (см., например, [Скороходов, Кузьмина, 2018, 2021]). Основное отличие данного метода от предыдущих заключается в том, что на отрезке интегрирования $z \in [-1, 1]$ вводится система трех, а не двух, окрестностей, в каждой из которых решение строится в виде степенных разложений, причем гладкая сшивка разложений позволяет вычислять СФ и СЗ с высокой точностью. Для эффективности решения настоящих задач в широком диапазоне изменения волнового числа при проведении расчетов использовались построенные асимптотические разложения (аналитические решения) при $k \rightarrow 0$. Это позволило уменьшать время численного счета и получать собственные значения при произвольно малом изменении волнового числа.

Учитывая, что нас интересует, прежде всего, неустойчивость течения, мы будем представлять в системе координат c_1 и c_2 только такие

распределения СЗ при непрерывном изменении волнового числа k (так называемые, траектории СЗ), на которых наблюдаются собственные значения с положительной мнимой частью, $c_2 > 0$ (подробнее о траекториях СЗ см., например, [Orszag, 1971; Reddy et al., 1993; Trefethen, 1997; Shkalikov, 2004; Скороходов, 2007 а, б]).

На первом этапе для построения траекторий оценивались на основе анализа асимптотических разложений СФ и СЗ при $k \rightarrow 0$. Отметим, что спектры СЗ задач, подобных задачам I и II, являются счетными и дискретными для любого k и значений параметров задачи (см., например, [Shkalikov, 2004]). На втором этапе, с целью анализа, в первую очередь, неустойчивости течения, из множества СЗ выбирались СЗ с максимальными величинами c_2 . Прежде всего, выбирались СЗ с $c_2 \geq 0$ и те СЗ с $c_2 < 0$, модули которых имели минимальные значения. Как правило, выбирались десять СЗ. Эти СЗ упорядочивались в соответствии с уменьшением величины c_2 , а именно: первое СЗ имело максимальное значение c_2 , второе СЗ имело следующее по величине значение c_2 , и так далее. Наконец, численно рассчитывались с большой точностью траектории выбранных СЗ при почти непрерывном увеличении волнового числа до значения $k = 2500$. Обозначение траекторий принималось в соответствии с упорядоченным набором СЗ: первая траектория – это траектория первого СЗ, вторая траектория – это траектория второго СЗ, и так далее. Для любого случая анализа задач I и II рассчитывались не менее десяти траекторий. Методы построения траекторий и спектров соб-

ственных значений для задач I и II подробно изложены в работах [Скороходов и Кузьмина, 2018, 2021; Skorokhodov and Kuzmina, 2024].

На рис. 1 представлены две первые траектории СЗ задачи I при $Bu = 0.0001$ (широкое течение), $R = 10$, $Pr = 1$ и различных значениях параметра a . Результаты свидетельствуют о том, что существуют неустойчивые возмущения с большими длинами волн (малыми волновыми числами, $k \ll 1$).

При $a = 1$ (рис. 1а), когда максимум скорости среднего течения расположен в центре слоя, фазовая скорость неустойчивых возмущений на двух траекториях может превышать максимальную скорость течения ($U_{max} = 1$). Такую неустойчивость необходимо отличать от бароклинической неустойчивости и неустойчивости критического слоя (подробнее см. [Кузьмина и др., 2019]). При $a = 0.5$ (рис. 1б) неустойчивые возмущения с фазовой скоростью, превышающей максимальную скорость потока ($U_{max} = 1.125$), наблюдаются также на двух траекториях, причем на второй траектории такие возмущения наблюдаются на больших волновых числах от $k = 9.5$ до $k = 115$. При $a = 0.2$ безразмерная максимальная скорость потока равна $U_{max} = 1.6$, и согласно рис. 1в неустойчивых возмущений с фазовой скоростью, превышающей максимальную скорость потока, нет. Подробное описание указанных возмущений в зависимости от отклонения максимума скорости потока от центра слоя дано в работе [Кузьмина и др., 2023].

Расчеты первых двух траекторий СЗ для задачи II при тех же значениях параметров, что

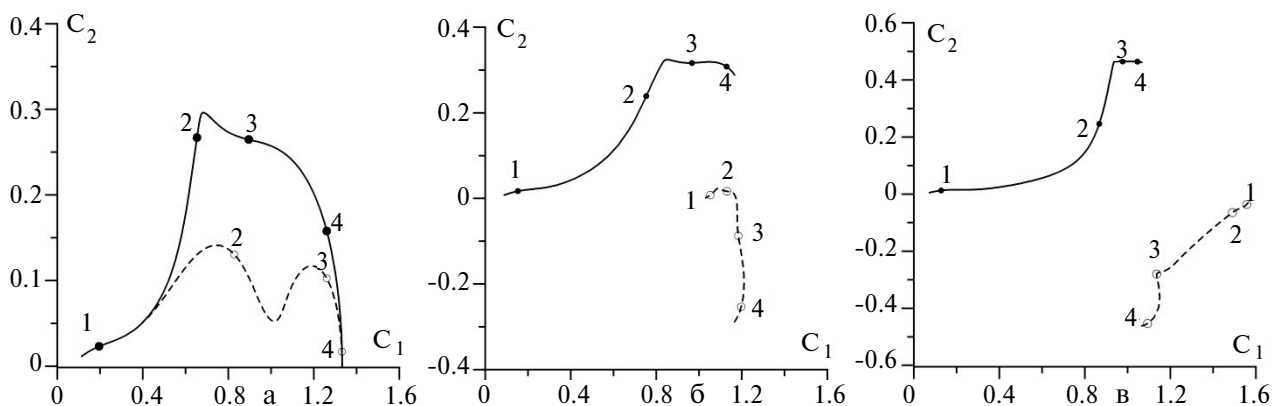


Рис. 1. Первые (сплошные линии) и вторые (штриховые линии) траектории СЗ для задачи I при $Bu = 0.0001$, $R = 10$, $Pr = 1$ и различных значениях параметра a : (а) $a = 1$; (б) $a = 0.5$; (в) $a = 0.2$. Точки на траекториях показывают значения СЗ при $k = 0.1$ (4), $k = 1$ (3), $k = 100$ (2), $k = 1000$ (1)

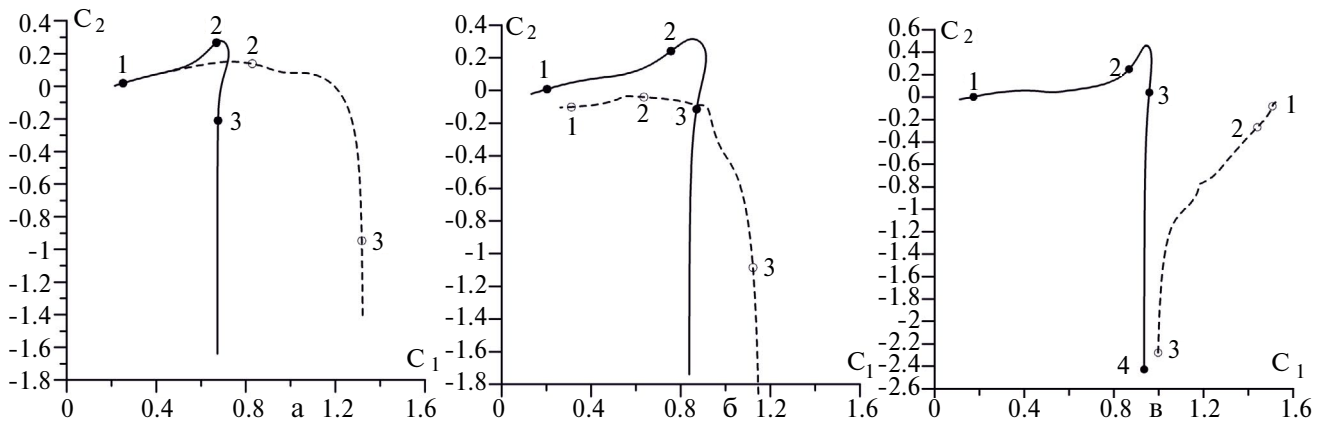


Рис. 2. То же, что и на рис. 1, но для задачи II

и ранее, показаны на рис. 2. На первой траектории (рис. 2а) нет неустойчивых собственных значений с фазовой скоростью, превышающей максимальную скорость потока, причем неустойчивые возмущения на этой траектории наблюдаются только при $k > 2.8$. На второй траектории неустойчивые возмущения наблюдаются при $k > 7.4$, причем в диапазоне $7.5 \leq k \leq 33$ неустойчивые возмущения имеют фазовую скорость больше максимальной скорости потока. При $a = 0.5$ (рис. 2б) на первой траектории неустойчивые СЗ возникают при $k > 1.5$. На второй траектории неустойчивых СЗ не наблюдается. При $a = 0.2$ неустойчивые возмущения есть только на первой траектории при $k > 0.9$. Таким образом, полученные результаты свидетельствуют о существенном сужении спектра неустойчивых возмущений, прежде всего за счет стабилизации длинноволновых возмущений (малые k).

Особый интерес представляет сравнение результатов расчетов задач I и II для течения с линейным вертикальным профилем скорости ($a = 0$): рис. 3 и 4.

Рассмотрим подробнее на рис. 3 изменение значения c_2 на первой траектории. При волновых числах k , лежащих в диапазоне изменения $0 < k \leq 4$, $c_2 \approx 0.557$. При $k > 4$ значение c_2 меняется медленно с ростом k : так при $k = 10$ величина $c_2 = 0.574$, и только при $k \approx 120$ уменьшается до значения 0.001. Далее наблюдается слабое увеличение и последующее уменьшение c_2 с ростом k . Максимальное значение $c_2 = 0.011$ при больших волновых числах (при $k > 120$) достигается при $k = 740$.

Описание неустойчивости течения с линейным вертикальным профилем скорости с уче-

том диффузии массы и импульса было подробно представлено в работе [Кузьмина и др., 2020], но для слоя от $z = 0$ до $z = 1$. Согласно этой работе область на первой траектории рис. 3 с постоянной фазовой скоростью ($c_1 = 1$) следует отнести к неустойчивым бароклинным возмущениям. Области на первой и второй траектории с положительными c_2 и фазовыми скоростями, отличными от единицы, следует отнести к неустойчивости критического слоя.

Расчеты задачи II при $a = 0$ показали, что неустойчивые СЗ могут наблюдаться на 4-х траекториях. Для удобства первая траектория и дополнительная к ней траектория представлены на двух первых фрагментах рис. 4. На последнем

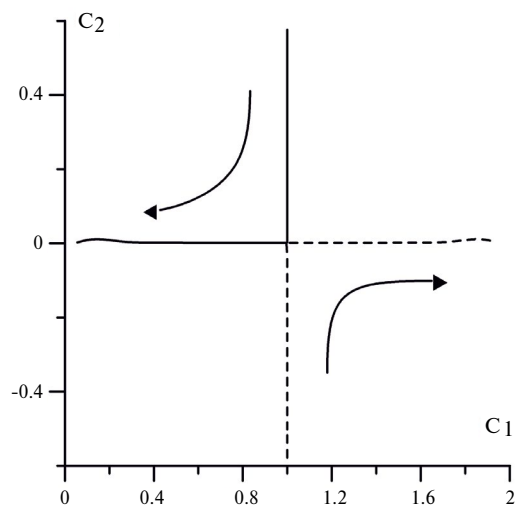


Рис. 3. Первая (сплошная линия) и вторая (штриховая линия) траектории СЗ для задачи I при $Bu = 0.0001$, $R = 10$, $Pr = 1$, $a = 0$. Стрелками показаны направления изменения СЗ при увеличении волнового числа k

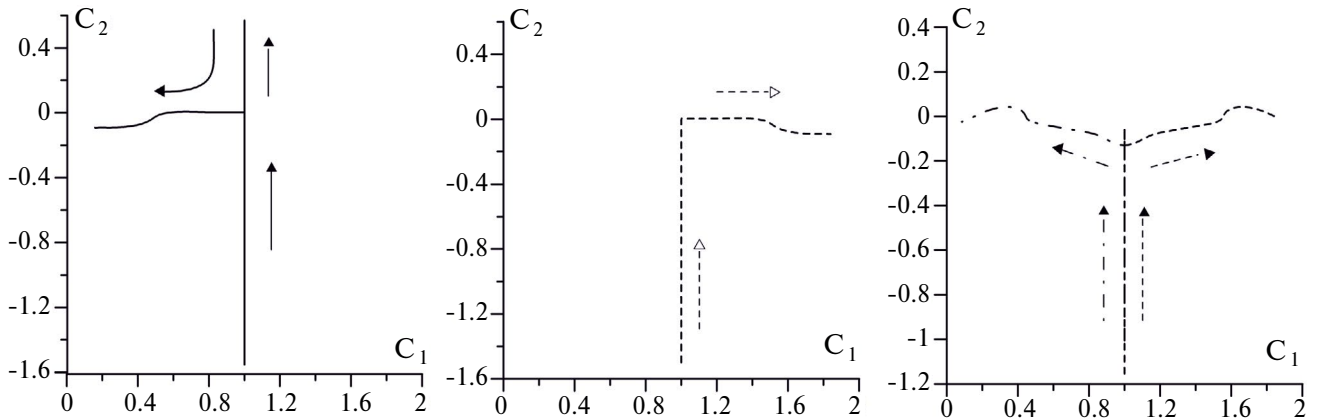


Рис. 4. Траектории СЗ для задачи II, на которых есть области СЗ с положительной мнимой частью ($Bu = 0.0001$, $R = 10$, $Pr = 1$, $a = 0$). Стрелками показаны направления изменения СЗ при увеличении волнового числа k

фрагменте рис. 4 представлены еще две траектории СЗ, на которых наблюдаются области СЗ с положительными значениями c_2 , свидетельствующие о неустойчивости критического слоя.

Опишем кратко изменение СЗ с ростом волнового числа k на левом фрагменте рис. 4, где представлена первая траектория. При малых k значение c_2 отрицательно, и при $k = 0.01$ равно $c_2 = -24.667$. С ростом волнового числа модуль c_2 уменьшается, и при k в диапазоне $0.72 \leq k \leq 0.74$ $c_2(k)$ переходит через ноль. Далее $c_2(k)$ растет с увеличением k вплоть до значения $c_2 = 0.5699$ (при $k = 12.7$), и затем с увеличением k значение

c_2 уменьшается до нуля (при $k \approx 179$), становясь отрицательным при $k > 179$. Таким образом, новое граничное условие подавляет неустойчивые возмущения на малых волновых числах. Однако и в данном случае существуют два типа неустойчивости течения: бароклинная неустойчивость и неустойчивость критического слоя. Это естественно следует и из других фрагментов рис. 4.

На рис. 5 представлены главные траектории для узкого фронта ($Bu = 0.1$) при $a = 0.5$ и прежних остальных параметрах. В данном случае расчеты результаты более наглядно, чем ранее, показывают, что в задаче II происходит стаби-

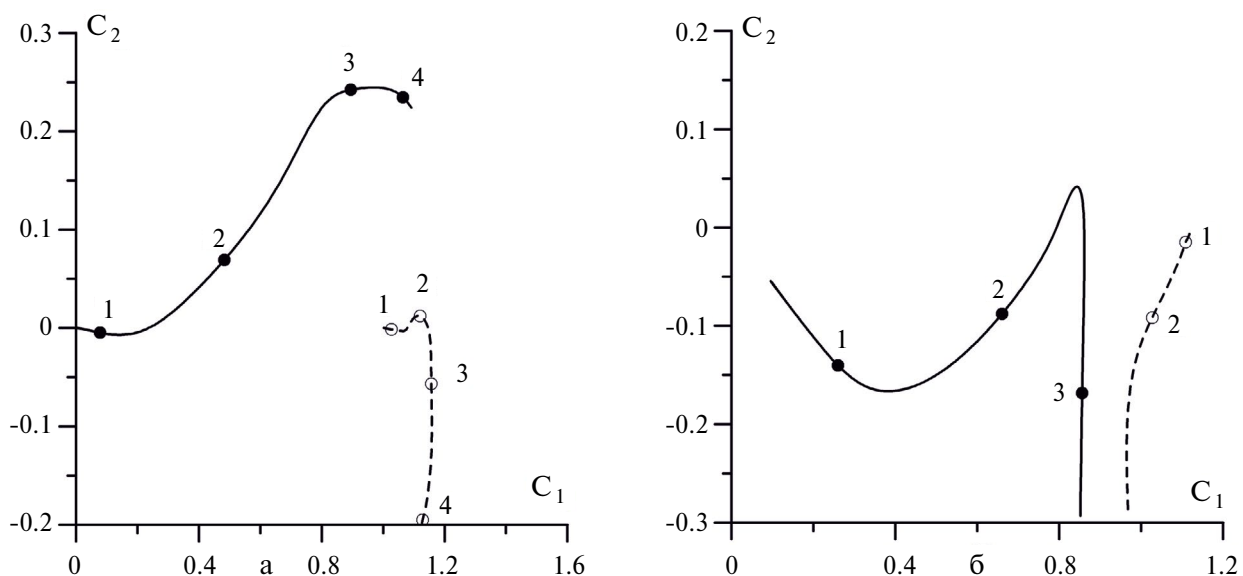


Рис. 5. Две первые траектории СЗ при $Bu = 0.1$, $R = 10$, $Pr = 1$, $a = 0.5$: а) задача I; б) задача II. Точки на траекториях показывают значения СЗ при $k = 0.1$ (4), $k = 1$ (3), $k = 10$ (2), $k = 100$ (1)

лизация неустойчивых возмущений не только при малых, но и при больших волновых числах.

Важным параметром неустойчивых возмущений в рамках данной работы является инкремент роста kc_2 максимально растущего возмущения при различных граничных условиях. На рис. 6 даны инкременты роста для случая широкого фронта при различных значениях параметра a , построенные на основе первых траекторий задач I и II.

На рис. 6а мы видим два ярких максимума на кривых зависимости инкремента роста от волнового числа, как для $a = 1$, так и для $a = 0.5$. Данные максимумы свидетельствуют о максимально растущих возмущениях вследствие бароклинической неустойчивости (первый максимум) и неустойчивости критического слоя (второй максимум). (Описание данных двух видов неустойчивости для аналогичных задач дано, например, в [Кузьмина и др., 2019].) При $a = 1$ значения kc_2 в максимумах равны: $kc_2 = 36.7$ при $k = 200$ и $kc_2 = 24.4$ при $k = 1450$. При $a = 0.5$ значения kc_2 в максимумах следующие: $kc_2 = 24.8$ при $k = 125$ и $kc_2 = 17.6$ при $k = 1325$.

Отметим также, что инкременты роста на двух кривых рис. 6а спадают с ростом k после второго максимума, но являются положительными даже при $k = 2500$. Ограничение по волновому числу $k = 2500$ определялось с

точки зрения целесообразности выполнения большого числа вычислений: хотя метод расчета практически применим при сколь угодно больших значениях волнового числа k , но для его реализации в таких случаях требуется высокая точность для представления десятичных чисел с очень большой мантисой и, следовательно, значительное реальное время для необходимого объема вычислений.

Во втором случае (рис. 6б) на кривой для $a = 1$ наблюдается только один, первый максимум при $k = 200$. Максимальное значение kc_2 в этом случае составляет 38.3. При $a = 0.5$ в точке первого максимума $kc_2 = 25.3$ ($k = 125$), в точке второго максимума значение $kc_2 = 25.3$ ($k = 405$).

Результаты расчетов, представленные на рис. 6, показывают, что граничные условия существенно влияют и на неустойчивость при высоких значениях волнового числа: в рамках задачи II наблюдается не только стабилизация коротковолновых неустойчивых возмущений, но и смещение максимально растущих возмущений, обусловленных неустойчивостью критического слоя, в область меньших волновых чисел.

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Здесь мы кратко представили результаты анализа влияния граничных условий на неустойчи-

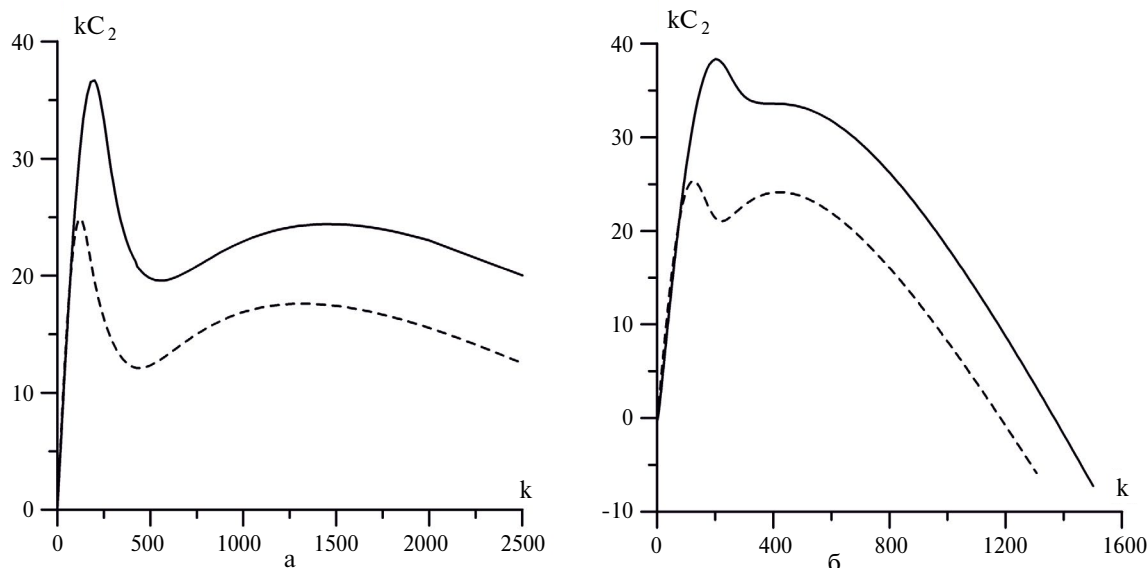


Рис. 6. Инкременты роста неустойчивых возмущений, построенные на основе первых траекторий, для различных граничных условий при $Bu = 0.0001$, $R = 10$, $Pr = 1$ и $a = 1$ (сплошные линии), $a = 0.5$ (штриховые линии): а) задача I; б) задача II

вость геострофического течения с параболическим вертикальным профилем общего вида. Результаты анализа свидетельствуют о том, что граничные условия прилипания (см. результаты расчетов задачи II) стабилизируют длинноволновые неустойчивые возмущения и сужают диапазон неустойчивых коротковолновых возмущений. Однако все типы неустойчивости течения, такие как бароклинная неустойчивость, неустойчивость критического слоя, а также новая неустойчивость, характеризующаяся фазовой скоростью, превышающей максимальную скорость течения (см. задачу I и подробное описание видов неустойчивости в работах [Кузьмина и др., 2019, 2023]), возникают и при граничных условиях прилипания, но в более узком диапазоне изменения параметров задачи. Этот факт является подтверждением того, что в рамках уравнения потенциального вихря с учетом вертикальной диффузии импульса и массы можно описывать при различных граничных условиях применительно к океану вихри, обусловленные неустойчивостью разного типа, и крупномасштабные интрузии океанского термоклина [Zhurbas, 2018; Кузьмина и др., 2018].

Отметим также, что вопрос о проблеме учета трения в задачах описания квазигеострофической динамики не является тривиальным. Действительно, если в уравнении (6) не учитывать диффузию массы, то это уравнение будет являться уравнением второго порядка. В таком случае на горизонтальных границах слоя следует принять, прежде всего, равенство нулю возмущения вертикальной скорости. Для дополнительного граничного условия с целью более эффективного учета влияния трения на возмущения необходимо в таком случае отказаться от классической параметризации трения. Так, в работе [McWilliams, 1989] влияние трения описывалось на основе четвертой, а не второй, производной возмущений скорости по вертикальной координате z . Такой подход усложняет и вид решения исходного уравнения, так как без учета диффузии массы исходное, классическое уравнение потенциального вихря второго порядка приводится к уравнению четвертого порядка. Насколько такой подход является обоснованным для описания реальных ситуаций в океане, требует отдельного исследования.

5. ВЫВОДЫ

Проведен анализ влияния граничных условий на неустойчивость геострофического зонального течения конечного поперечного масштаба с вертикальным параболическим профилем скорости общего вида в ограниченном по вертикали слое. Модель основана на уравнении потенциального вихря в квазигеострофическом приближении с учетом вертикальной диффузии массы и импульса. Уравнение и граничные условия сводились к спектральной задаче на собственные значения типа Орра–Зоммерфельда. Рассматривались два вида условий на горизонтальных границах слоя: 1) равенство нулю возмущений вертикальной скорости и потоков плавучести (задача I); 2) равенство нулю возмущений вертикальной скорости и возмущений горизонтальных скоростей (задача II). Для одних и тех же значений физических параметров уравнения рассчитывались траектории собственных значений и инкременты роста неустойчивых возмущений для граничных условий «1» и «2». На основе сравнения результатов получено, что использование граничных условий «2», которые включают условия прилипания, способствует стабилизации длинноволновых неустойчивых возмущений и сужает диапазон неустойчивых коротковолновых возмущений. Отмечается, однако, что все типы неустойчивости течения, полученные при условиях «1», такие как бароклинная неустойчивость, неустойчивость критического слоя, а также новая неустойчивость, характеризующаяся фазовой скоростью, превышающей максимальную скорость течения, возникают и при использовании граничных условий прилипания, но в более узком диапазоне изменения физических параметров задачи. Представлено также краткое обсуждение вопроса о проблеме учета трения в задачах описания квазигеострофической динамики в океане.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы признательны анонимным рецензентам за полезные замечания.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа поддерживалась бюджетным финансированием Института океанологии им. П.П. Ширшова РАН (тема FMWE -2024-0015).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Калашиник М.В. К теории симметричной и несимметричной устойчивости зональных геострофических течений // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2001. Т. 37. № 3. С. 418–421.
- Кузьмина Н.П., Скороходов С.Л., Журбас Н.В., Лыжков Д.А. О неустойчивости геострофического течения с линейным вертикальным сдвигом скорости на масштабах интрузионного расслоения // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2018. Т. 54. № 1. С. 54–63.
- Кузьмина Н.П., Скороходов С.Л., Журбас Н.В., Лыжков Д.А. Описание возмущений океанских геострофических течений с линейным вертикальным сдвигом скорости с учетом трения и диффузии плавучести // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2019. Т. 55. № 2. С. 73–85.
- Кузьмина Н.П., Скороходов С.Л., Журбас Н.В., Лыжков Д.А. О влиянии трения и диффузии плавучести на динамику геострофических океанских течений с линейным вертикальным профилем скорости // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2020. Т. 56. № 6. С. 676–678.
- Кузьмина Н.П., Скороходов С.Л., Журбас Н.В., Лыжков Д.А. О видах неустойчивости геострофического течения с вертикальным параболическим профилем скорости // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2023. Т. 59. № 2. С. 230–241.
- Скороходов С.Л. Численный анализ спектра задачи Орра–Зоммерфельда // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007 а. Т. 47. № 10. С. 1672–1691.
- Скороходов С.Л. Точки ветвления собственных значений оператора Орра–Зоммерфельда // Докл. РАН. 2007 б. Т. 416. № 5. С. 600–605.
- Скороходов С.Л., Кузьмина Н.П. Аналитико-численный метод решения задачи типа Орра–Зоммерфельда для анализа неустойчивости течений в океане // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 6. С. 976–992.
- Скороходов С.Л., Кузьмина Н.П. Спектральный анализ модельных течений типа Куэтта применительно к океану // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 5. С. 106–127.
- Скороходов С.Л., Кузьмина Н.П. Спектральный анализ малых возмущений геострофических течений с параболическим вертикальным профилем скорости применительно к океану // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 12. С. 2010–2023.
- Скороходов С.Л., Кузьмина Н.П. Аналитико-численный метод для анализа малых возмущений океанских геострофических течений с параболическим вертикальным профилем скорости общего вида // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 12. С. 2043–2053.
- Педлоски Дж. Геофизическая гидродинамика / Под редакцией Каменковича В.М., Моница А.С. М.: Мир, 1984. 812 с.
- Шакина Н. П. Лекции по динамической метеорологии. М.: Триада ЛТД, 2013. 160 с.
- Cushman-Roisin B. Introduction to the Geophysical Fluid Dynamics. New Jersey 07632, Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1994. 320 p.
- Eady E.T. Long waves and cyclone waves // Tellus. 1949. V. 1. № 3. P. 33–52.
- Kuzmina N.P. Generation of large-scale intrusions at baroclinic fronts: an analytical consideration with a reference to the Arctic Ocean // Ocean Sci. 2016. V. 12. P. 1269–1277. doi: 10.5194/os-12-1269-2016.
- Lin C.C. The Theory of Hydrodynamic Stability. Cambridge University Press, 1955. 155 p.
- McWilliams James C. Statistical properties of decaying geostrophic turbulence // J. Fluid Mech. 1989. V. 198. P. 199–230.
- Miles J.W. Effect of Diffusion on Baroclinic Instability of the Zonal Wind // J. Atmos. Sci. 1965. V. 22. P. 146–151.
- Orszag S.A. Accurate solution of the Orr–Sommerfeld equation // J. Fluid Mech. 1971. V. 50. № 4. P. 689–703.
- Reddy S.C., Schmid P.J., Henningson D.S. Pseudospectra of the Orr–Sommerfeld Operator // SIAM J. Appl. Math. 1993. V. 53. № 1. P. 15–47.
- Shkalikov A.A. Spectral portraits of the Orr–Sommerfeld operator with large Reynolds numbers // J. Math. Sci. 2004. V. 124. № 6. P. 5417–5441.
- Skorokhodov S.L., Kuzmina N.P. 2024, Analytical-Numerical Method for Solving the Spectral Problem in a Model of Geostrophic Oceanic Currents // Comput. Math. Math. Phys. 2024. V. 64. № 6. P. 1240–1253.
- Stern M.E. Ocean circulation physics. Academic press, 1975. 246 p.
- Trefethen L.N. Pseudospectra of linear operators // SIAM Rev. 1997. V. 39. № 3. P. 383–406.
- Zhurbas N.V. On the eigenvalue spectra for a model problem describing formation of the large-scale intrusions in the Arctic basin // Fundament. Applied Hydrophys. 2018. V. 11. № 1. P. 40–45.

ON THE INFLUENCE OF BOUNDARY CONDITIONS ON THE INSTABILITY OF GEOSTROPHIC CURRENTS

© 2025 N. P. Kuzmina^{1,*}, S. L. Skorokhodov^{2,**}, N. V. Zhurbas¹, D. A. Lyzhkov¹

¹*Shirshov Institute of Oceanology of the RAS, Nakhimovsky Prosp., 36, Moscow, 117997 Russia*

²*Federal Research Center "Computer Science and Control" of the RAS,
str. Vavilov, 44, Moscow, 119333 Russia*

**e-mail: kuzmina@ocean.ru*

***e-mail: sskorokhodov@gmail.com*

An analysis of the influence of boundary conditions on the instability of a geostrophic zonal current of finite transverse scale with a vertical parabolic velocity profile of a general form in a vertically limited layer has been carried out. The model is based on the potential vortex equation in the quasi-geostrophic approximation, taking into account the vertical diffusion of mass and momentum. The equation and boundary conditions were reduced to a spectral eigenvalue problem of the Orr–Sommerfeld type. A high-precision analytical-numerical method was used to calculate eigenfunctions and eigenvalues. Two types of conditions at the horizontal boundaries of the layer were considered: the equality of vertical velocity disturbances and buoyancy fluxes to zero (problem I); equality of vertical velocity disturbances and horizontal velocity disturbances to zero (problem II). It is found that the boundary conditions of problem II, which include no-slip conditions, contribute to the stabilization of long-wave unstable disturbances and narrow the range of unstable short-wave disturbances. It is noted, however, that all types of current instability obtained by solving problem I, such as baroclinic instability, instability of the critical layer, as well as new instability, characterized by a phase velocity exceeding the maximum current velocity, also arise when using no-slip boundary conditions, but in a narrower range of changes in the physical parameters of the original equation.

Keywords: instability of ocean geostrophic currents, diffusion of momentum and mass, eigenvalue problem