ИЗВЕСТИЯ РАН. ФИЗИКА АТМОСФЕРЫ И ОКЕАНА, 2024, том 60, № 5 , с. 567–581

УДК 532.59 : 534.143

ВНУТРЕННИЕ ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ, ВОЗБУЖДАЕМЫЕ НЕСТАЦИОНАРНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ ВОЗМУЩЕНИЙ В СТРАТИФИЦИРОВАННОМ ОКЕАНЕ С ФОНОВЫМИ СДВИГОВЫМИ ТЕЧЕНИЯМИ

© 2024 г. В. В. Булатов[a,*], И. Ю. Владимиров[b]

[a]Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, просп. Вернадского, 101–1, Москва, 119526, Россия
[b]Институт океанологии им.П.П. Ширшова РАН, Нахимовский просп., 36, Москва, 117997, Россия

*e-mail: internalwave@mail.ru

Поступила в редакцию 03.04.2024 г.
После доработки 07.06.2024 г.
Принята к публикации 10.07.2024 г.

Рассмотрена задача о построении решений, описывающих генерацию внутренних гравитационных волн локализованным осциллирующим источником возмущений в слое стратифицированной среды конечной глубины с фоновыми сдвиговыми течениями. Для построения аналитических решений в линейном приближении использованы модельные представления частоты плавучести и распределения сдвигового течения по глубине. В предположении Майлса-Ховарда получено интегральное представление решения в виде сумм волновых мод и с помощью метода стационарной фазы построено асимптотическое представление решения для каждой моды. Приведены результаты расчетов дисперсионных зависимостей и фазовых структур волновых полей для различных режимов волновой генерации. Изучена пространственная трансформация фазовых структур волновых полей в зависимости от частоты осцилляций источника возмущений и основных характеристике сдвиговых течений.

Ключевые слова: внутренние гравитационные волны, стратифицированная среда, фоновые сдвиговые течения, пульсирующий источник, асимптотики

DOI: 10.31857/S0002351524050012 **EDN:** HYUEEQ

1. ВВЕДЕНИЕ

Геофизическая гидродинамика предлагает большой ряд актуальных задач распространения волн в морской среде, анизотропия которой связана в том числе с эффектами стратификации среды и неоднородностью фоновых сдвиговых течений [Лайтхилл, 1981; Миропольский, 1981; Pedlosky, 2010; Sutherland, 2010]. Одной из таких важных для геофизических приложений задач является изучение процессов генерации и распространения внутренних гравитационных волн (ВГВ) в стратифицированном океане при наличии фоновых сдвиговых течений [Velarde et al., 2018; Fabrikant et al., 1998]. В этих задачах корректное применение асимптотических методов дает возможность исследовать ряд физически интересных эффектов, определяемых свойствами природных гидрофизических сред [Young et al., 1982; Basovich et al., 1984; Свиркунов и др., 2014; Булатов и др., 2015]. В частности, нестационарные или осциллирующие источники возмущений являются одним из механизмов генерации достаточно интенсивных внутренних гравитационных волн в природных (океан, атмосфера Земли) и искусственных стратифицированных средах. Такие источники возбуждения ВГВ могут иметь как природный (схлопывание области турбулентного перемешивания, быстрая подвижка океанического дна, распространение интенсивных атмосферных возмущений), так и антропогенный (подводные и надземные взрывы) характеры [Сидняев, 2013; Morozov, 2018; Morozov et al., 2021]. Для моделирования генерации ВГВ точечным источником в реальном океане можно считать крутой склон поперечного хребта в проливах, и в качестве возможного механизма возбуждения ВГВ рассматривать, например, генерацию волн периодическим течением на склонах поперечных хребтов в проливах [Morozov et al., 2003; Morozov et al., 2018; Morozov et al., 2021].

В реальных природных стратифицированных средах вертикальная и горизонтальная динамика фоновых сдвиговых течений в значительной степени связана с внутренними гравитационными волнами [Frey et al., 2017; Morozov et al., 2021]. В океане такие течения могут проявляться, например, в области сезонного термоклина и оказывать заметное влияние на динамику ВГВ. Обычно предполагается, что фоновые течения с вертикальным сдвигом скорости слабо зависят от времени и горизонтальных координат, поэтому если масштаб изменения течений по горизонтали много больше длин ВГВ, а масштаб временной изменчивости много больше периодов ВГВ, то такие течения обычно рассматриваются как стационарные и горизонтально однородные. В общей постановке описание динамики ВГВ в стратифицированной среде с фоновыми полями сдвиговых течений является весьма сложной задачей уже в линейном приближении [Миропольский 1981; Pedlosky, 2010; Sutherland, 2010; Булатов и др., 2015; Gavrileva et al., 2019]. В этом случае задача сводится к анализу системы уравнений в частных производных, и при одновременном учете вертикальной и горизонтальной неоднородности эта система уравнений не допускает разделение переменных. Для исследования волн в потоке с непрерывным профилем сдвиговой скорости можно использовать прямое численное моделирование или приближенные асимптотические методы: метод ВКБ, метод эталонных уравнений, метод сращивания асимптотических разложений [Bouruet-Aubertot et al., 1999; Vlasenko et al., 2005; Broutman et al., 2005; Broutman et al., 2021]. В некоторых случаях может быть также полезна плазменно-гидродинамическая аналогия, дающая инструмент физического понимания волновых, в том числе резонансных процессов [Fabrikant et al., 1998].

Для исследования динамики ВГВ в средах с течениями фундаментальную роль играет число Ричардсона, так как, например, при некоторых значениях этого числа в окрестности критического слоя волновой пакет бесконечно долго приближается к некоторой пространственной точке, и его амплитуда неограниченно растет [Basovich et al., 1984; Bretherton, 1966; Carpenter et al., 2010]. В общем виде получить общий критерий усиления амплитуды ВГВ в окрестности критического уровня, то есть выразить его непосредственно через параметры потока, не представляется возможным, однако для некоторых модельных течений возможно получить аналитическое представление такого критерия, выделить, детально исследовать и классифицировать основные модели взаимодействия сдвиговых течений и волн [Churilov, 2018; Fraternale et al., 2018; Slepyshev et al., 2019; Howland et al., 2021]. Очевидно, также, что эффект заметного увеличения амплитуды ВГВ стратифицированным потоком определяется глобальными условиями, то есть зависит не только от деталей профиля потока в некоторой окрестности критической точки, но и от свойств волнового поля, поведение которого определяется всем течением. Поэтому существенного прояснения роли критического уровня в динамике внутренних гравитационных волн с учетом реальной гидрологии океана можно ожидать только при построении нелинейной теории взаимодействия течений и волн [Миропольский. 1981; Young et al., 1999; Fabrikant et al., 1998; Alias et al., 2014; Слепышев и др., 2019].

В линейной постановке метод Фурье является одним из основных методов решения задач волновой динамики ВГВ в стратифицированной среде с фоновыми сдвиговыми течениями [Лайтхилл, 1981; Миропольский, 1981; Булатов и др., 2015; Свиркунов и др., 2014; Gnevyshev et al., 2020]. Полученные с помощью этого метода интегральные представления решений, требуют как численного, так и асимптотического анализа. Для исследования механизма взаимовлияния течений и ВГВ также можно рассматривать различные модельные представления стратификации и сдвиговых течений [Булатов и др., 2020; Bulatov et al., 2020(a); Bulatov et al., 2020(b)]. Синтез численных, аналитических и асимптотических результатов может дать первоначальное качественное и количественные представления о волновых процессах с учетом фоновых сдвиговых течений. Методы прямого численного моделирования не всегда эффективны для исследования генерации ВГВ произвольными источниками возмущений, особенно с учетом изменчивости основных гидрологических параметров, и требуют верификации и сравнения с решениями модельных задач. Поэтому при анализе динамики ВГВ в реальном океане необходимо использовать комбинацию численных, асимптотических и аналитических методов [Bouruet-Aubertot et al., 1999; Vlasenko et al., 2005; Булатов и др., 2015; Булатов и др., 2020; Слепышев и др., 2019; Meunier et al., 2018; Gnevyshev et al., 2020; Shugan et al., 2021].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается вертикально стратифицированная среда конечной глубины. Исходной является линеаризованная относительно некоторого невозмущенного состояния система уравнений гидродинамики [Миропольский, 1981; Булатов и др., 2015; Булатов и др., 2020, Булатов и др., 2021]

$$\frac{DU_1}{Dt} + \frac{dU(z)}{dz}W = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{(z)\partial x}$$

$$\frac{DU_2}{Dt} + \frac{dV(z)}{dz}W = -\frac{1}{\rho_0(z)}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{DW}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0(z)}\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\rho g}{\rho_0(z)} \tag{1}$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = q$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \frac{d\rho_0(z)}{dz}W = 0,$$

где $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U(z)\frac{\partial}{\partial x} + V(z)\frac{\partial}{\partial y}$ — субстанциональная производная, $(U(z), V(z), 0)$ — компоненты скорости фонового сдвигового течения на горизонте z, (U_1, U_2, W) — компоненты малых возмущений скорости частиц жидкости, $\rho_0(z)$ — невозмущенная плотность стратифицированной среды, p — возмущение давления, ρ — возмущение плотности, $q = q(x, y, z, t)$ — плотность распределения источников массы. Задача рассматривается в конечном по вертикали $-H < z < 0$ и неограниченном по горизонтали $-\infty < x, y < +\infty$ слое. На дне $z = -H$ вертикальная компонента скорости W равна нулю, на поверхности $z = 0$ используется приближение «твердой крышки»: $W = 0$, отфильтровывающее поверхностные волны, и мало влияющее на основные характеристики внутренних волн. Оценки границ применимости данного приближения для условий реального океана обсуждены в [Миропольский, 1981; Булатов и др., 2015].

Так как при наличии фоновых сдвиговых течений ВГВ могут взаимодействовать с этими течениями и обмениваться с ними энергией, то собственные волновые колебания могут быть экспоненциально нарастающими. Поэтому необходимо, чтобы вертикальный градиент фоновых сдвиговых течений был невелик по сравнению с частотой плавучести. Далее предполагается выполненным условие устойчивости Майлса-Ховарда для числа Ричардсона: $Ri(z) = N^2(z)/((\frac{dV}{dz})^2 + (\frac{dU}{dz})^2) > 1/4$ [Miles, 1961; Hirota et al., 2016; Churilov, 2018; Gavrileva et al., 2019; Howland et al., 2021]. Если выполнено условие Майлса-Ховарда, то соответствующая спектральная задача не имеет комплексных собственных значений. Характерные значения чисел Ричардсона в акваториях Мирового океана при отсутствии динамической неустойчивости фоновых сдвиговых течений могут находиться в интервалах от 2 до 20 [Morozov, 2018; Klimchenko et al., 2020; Morozov et al., 2021].

В приближении Буссинеска система уравнений (1) может быть сведена к одному уравнению для вертикальной компоненты W, имеющему вид

$$\frac{D^2}{Dt^2}\left(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)W - \frac{D}{Dt}\left(\frac{d^2U}{dz^2}\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{d^2V}{dz^2}\frac{\partial W}{\partial y}\right) + N^2(z)\Delta W = \frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{Dq}{Dt}\right)\right) \tag{2}$$

$$W = 0 \text{ при } z = 0, -H,$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $N^2(z) = -\frac{g}{\rho_0(z)}\frac{d\rho_0(z)}{dz}$ — квадрат частоты Брента-Вяйсяля (частоты плавучести). Далее сделаем следующие предположения. Функция $q(x, y, z, t)$ имеет вид $q(x, y, z, t) = q_0 \exp(i\omega t)\delta(x)\delta(y)\delta(z - z_0)$, то есть в качестве источника возмущений будет рассматриваться точечный осциллирующий источник массы, расположенный на глубине z_0. Частота плавучести предполагается постоянной $N(z) = N = const$. Фоновое сдвиговое течение — одномерное и линейное: $V(z) \equiv 0$, $U(z) = U_0 + \frac{U_0 - U_H}{H} z$, $U_0 = U(0)$, $U_H = U(-H)$. Для числа Ричардсона выполнено условие устойчивости Майлса-Ховарда:

$Ri = N^2 / \left(\frac{dU}{dz}\right)^2 = \frac{N^2H^2}{\left(U_0 - U_H\right)^2} > \frac{1}{4}$. В безразмерных переменных $x^* = \frac{\pi x}{H}$, $y^* = \frac{\pi y}{H}$, $z^* = \frac{\pi z}{H}$, $\omega^* = \frac{\omega}{N}$, $t^* = Nt$, $W^* = \frac{WH^2}{q_0\pi^2}$, $M\left(z^*\right) = \frac{\pi U\left(z^*\right)}{NH} = a + bz^*$, $a = \frac{\pi U_0}{NH}$, $b = \frac{U_0 - U_H}{NH}$ (индекс «*» далее опускается) уравнение (2) имеет вид

$$\frac{D^2}{Dt^2}\left(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)W + \Delta W = \frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{D}{Dt}\left(\exp(i\omega t)\delta(x)\delta(y)\delta(z - z_0)\right)\right)\right), \tag{3}$$

где $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + M(z)\frac{\partial}{\partial x}$. Параметр a определяет отношение скорости сдвигового течения у поверхности к максимальной групповой скорости ВГВ, равной $\frac{NH}{\pi}$, параметр b в данном случае равен $\frac{1}{\sqrt{Ri}}$.

Решение (3) будем искать в виде $W(x, y, z, t) = \exp(i\omega t)w(x, y, z)$, тогда для определения функции $w(x, y, z)$ получаем задачу

$$\frac{D^2}{Dt^2}\left(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)w + \Delta w = \frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{D}{Dt}\left(\delta(x)\delta(y)\delta(z - z_0)\right)\right)\right) \tag{4}$$

$$w = 0 \text{ при } z = 0, -\pi,$$

где $\frac{D}{Dt} = i\omega + M(z)\frac{\partial}{\partial x}$. В терминах Фурье-образа компоненты вертикальной скорости

$$\varphi(\omega, \mu, \nu, z) = \int_{-\infty}^{\infty}\exp(i\nu y)dy\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{w}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})\exp(i\mu x)dx$$

задача (4) формулируется следующим образом

$$\begin{gathered}\Pi\varphi(\omega, \mu, \nu, z) = \left(\omega - f(z)\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(\left(\omega - f(z)\right)\delta(z - z_0)\right),\\ \Pi \equiv \left(\omega - f(z)\right)^2\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\left(1 - \left(\omega - f(z)\right)^2\right),\\ \varphi(\omega, \mu, \nu, -\pi) = \varphi(\omega, \mu, \nu, 0) = 0,\\ k^2 = \mu^2 + \nu^2,\ f(z) = \mu M(z).\end{gathered} \tag{5}$$

3. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФОРМЫ РЕШЕНИЙ

Рассмотрим далее функцию Грина $G(\omega,\mu,\nu,z,z_0)$ задачи (5), то есть решение уравнения $\Pi G(\omega,\mu,\nu,z,z_0) = \delta(z - z_0)$ с нулевыми граничными условиями, которое может быть представлена в виде

$$\begin{gathered}G(\omega, \mu, \nu, z, z_0) = -\frac{\varphi_0(\omega, \mu, \nu, z)\varphi_H(\omega, \mu, \nu, z_0)}{B(\mu, \nu, \omega,)\left(\omega - f(z_0)\right)^2},\\ z_0 \le z \le 0\\ G(\omega, \mu, \nu, z, z_0) = -\frac{\varphi_0(\omega, \mu, \nu, z_0)\varphi_H(\omega, \mu, \nu, z)}{B(\mu, \nu, \omega)\left(\omega - f(z_0)\right)^2},\\ -H \le z \le z_0,\end{gathered} \tag{6}$$

где функции φ_0 и φ_H — решения уравнения $\varphi = 0$, обращающиеся в ноль при $z = 0$ и $z = -H$ соответственно, $B(\mu, \nu, \omega) = \varphi_0(\omega, \mu, \nu, -H) \times \frac{\partial\varphi_H(\omega, \mu, \nu, -H)}{\partial z}$ — вронскиан этих функций. В рассматриваемом случае линейного профиля скорости сдвигового течения и постоянства частоты плавучести функции φ_0 и φ_H могут быть выражены в явном аналитическом виде [Булатов и др., 2020, Bulatov at al., 2020(a); Bulatov at al., 2020(b)]

$$\varphi_0(\omega, \mu, \nu, z) = \Phi_+(\omega, \mu, \nu, z)\Phi_-(\omega, \mu, \nu, 0) - \Phi_-(\omega, \mu, \nu, z)\Phi_+(\omega, \mu, \nu, 0),$$

$$\Phi_H(\omega, \mu, \nu, z) = \Phi_+(\omega, \mu, \nu, z)\Phi_-(\omega, \mu, \nu, -H) - \Phi_-(\omega, \mu, \nu, z)\Phi_+(\omega, \mu, \nu, -H),$$

$$\Phi_\pm(\omega, \mu, \nu, z) = \sqrt{\beta\left(\omega - f(z)\right)}I_{\pm i\lambda}\left(\beta\left(\omega - f(z)\right)\right),$$

$$\beta = \frac{k}{b\mu}, \lambda = \sqrt{\beta^2 - \frac{1}{4}},$$

где $I_{\pm i\lambda}(\tau)$ — модифицированная функция Бесселя мнимого индекса λ. Так как условие Майлса-Ховарда для числа Ричардсона означает, что $b^2 < 4$, поэтому $\beta^2 > \frac{1}{4}$ и значения λ действительны. Функция $I_{\pm i\lambda}(\tau)$ при действительных значениях λ

и при $|\tau| < \lambda$ осциллирует. При мнимых значениях λ функция $I_{\pm i\lambda}(\tau)$ стремится к бесконечности при больших τ и нигде не осциллирует при $\tau > 0$. Поэтому, для того, чтобы значения λ было действительными для любых k,μ достаточно, чтобы $b^2 < 4$, что совпадает с условием Майлса–Ховарда для числа Ричардсона .

Решение задачи (2) может быть найдено путем свертки функции Грина $G(\omega,\mu,\nu,z,z_0)$ с правой частью задачи (5)

$$\varphi(\omega,\mu,\nu,z,z_0) = \int\limits_{-H}^{0} G(\omega,\mu,\nu,z,\xi)(\omega - f(\xi))\frac{\partial}{\partial z}\big((\omega - f(\xi))\delta(z - z_0)\big)d\xi =$$

$$= (\omega - f(z_0))^2 \frac{\partial G(\omega,\mu,\nu,z,z_0)}{\partial z_0} + \frac{df(z_0)}{dz_0}(\omega - f(z_0))G(\omega,\mu,\nu,z,z_0).$$

Тогда, учитывая (6), окончательно получаем

$$\varphi(\omega,\mu,\nu,z,z_0) = \frac{\varphi_0(\omega,\mu,\nu,z)}{B(\mu,\nu,\omega)}\left(\frac{df(z_0)}{dz_0}\frac{\varphi_H(\omega,\mu,\nu,z_0)}{\omega - f(z_0)} + \frac{\partial\varphi_H(\omega,\mu,\nu,z_0)}{\partial z_0}\right), z_0 \le z \le 0,$$

$$\varphi(\omega,\mu,\nu,z,z_0) = \frac{\varphi_H(\omega,\mu,\nu,z)}{B(\mu,\nu,\omega)}\left(\frac{df(z_0)}{dz_0}\frac{\varphi_0(\omega,\mu,\nu,z_0)}{\omega - f(z_0)} + \frac{\partial\varphi_0(\omega,\mu,\nu,z_0)}{\partial z_0}\right), -H \le z \le z_0.$$

Функция $B(\mu,\nu,\omega)$ такова, что уравнение $B(\mu,\nu,\omega) = 0$ является одной из возможных форм записи дисперсионного соотношения для уравнения ВГВ в слое стратифицированной среды с фоновым сдвиговым течением. При фиксированном значении ω множество решений этого уравнения образуют соответствующее семейство дисперсионных кривых $L_n : \mu_n = \mu_n(\nu,\omega), n = 1,2,\ldots$ Можно отметить, что функции $\mu_n(\nu,\omega)$ являются собственными числами однородной вертикальной спектральной задачи

$$\Pi\varphi(\omega,\mu,\nu,z) = 0$$
$$\varphi(\omega,\mu,\nu,-\pi) = \varphi(\omega,\mu,\nu,0) = 0. \tag{7}$$

Далее необходимо выполнить обратное преобразование Фурье. Интегрирование по переменной μ осуществляется с помощью теоремы о вычетах. В результате, учитывая вклад полюсов $\mu_n = \mu_n(\nu,\omega)$, решение можно представить в виде суммы волновых мод

$$W(x,y,z,z_0,t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x,y,z,z_0,t),$$

$$W_n(x,y,z,z_0,t) = \frac{-i\exp(i\omega t)}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} A_n(\nu,\omega,z,z_0)\exp(-i\Theta_n(\nu,\omega))d\nu, \tag{8}$$

$$\Theta_n(\nu,\omega) = \mu_n(\nu,\omega)x + \nu y, \quad A_n(\nu,\omega,z,z_0) = \frac{\varphi_n(\omega,\nu,z)}{d_n(\omega,\nu)}\left(\frac{df(z_0)}{dz_0}\frac{\varphi_n(\omega,\nu,z_0)}{\omega - f(z_0)} + \frac{\partial\varphi_n(\omega,\nu,z_0)}{\partial z_0}\right),$$

$$d_n(\omega,\nu) = \frac{\partial B(\mu_n(\nu,\omega),\nu,\omega)}{\partial\mu} = \frac{\partial\varphi_0(\omega,\mu_n(\nu,\omega),\nu,-H)}{\partial\mu}\frac{\partial\varphi_H(\omega,\mu_n(\nu,\omega),\nu,-H)}{\partial z},$$

где $\varphi_n(\omega,\nu,z) = \varphi_0(\omega,\mu_n(\nu,\omega),\nu,z) = \varphi_H(\omega,\mu_n(\nu,\omega),\nu,z)$ – собственные функции спектральной задачи (7). Пусть далее S_α – направление, составляющее некоторый угол α с положительным направлением оси Ox. Тогда для получения физически реализуемого поля возмущений вертикальной скорости W вдоль выбранного направления S_α, интегрирование в (8) необходимо выполнять вдоль той части $l_n^+(\alpha)$ дисперсионной кривой L_n, для которой выполнено условие $\dfrac{\partial\omega}{\partial S_\alpha} > 0$. В результате поле отдельной волновой моды имеет вид

$$W_n(x, y, z, z_0, t) = \frac{-i\exp(i\omega t)}{2\pi} \int_{l_n^+(\alpha)} A_n(\nu, \omega, z, z_0)\exp(-i\Theta_n(\nu, \omega))d\nu \tag{9}$$

На больших расстояниях от осциллирующего источника возмущений при $r = \sqrt{x^2 + y^2} \to \infty$ интегралы (9) вычисляется с помощью метода стационарной фазы [Булатов и др., 2015; Borovikov, 1994]

$$W_n(x, y, z, z_0, t) \sim \sum_{j=1}^{J(\alpha)} \frac{\exp\left(i\left(\omega t - \Theta_n\left(\nu_j^n, \omega\right) + \delta_j\right)\right) F_n\left(\nu_j^n, \omega, z, z_0\right)}{\sqrt{2\pi r \chi_n\left(\nu_j^n, \omega\right) \dfrac{\partial B\left(\mu_n\left(\nu_j^n\right), \nu_j^n, \omega\right)}{\partial S_\alpha}}},$$

$$F_n(\nu, \omega, z, z_0) = \varphi_n(\omega, \nu, z)\left(\frac{df(z_0)}{dz_0}\frac{\varphi_n(\omega, \nu, z_0)}{\omega - f(z_0)} + \frac{\partial\varphi_n(\omega, \nu, z_0)}{\partial z_0}\right),$$

$$\chi_n(\nu, \omega) = \left|\frac{\partial^2\mu_n(\nu, \omega)}{\partial\nu^2}\right|\left(1 + \left(\frac{\partial\mu_n(\nu, \omega)}{\partial\nu}\right)^2\right)^{-3/2},$$

где $\nu_j^n = \nu_j^n(\alpha), j = 1, 2, .., J(\alpha)$ — все такие действительные корни уравнения $\dfrac{\partial\mu_n(\nu, \omega)}{\partial\nu} = -\mathrm{tg}\alpha$, что соответствующие стационарные точки $(\nu_j^n, \mu_n\left(\nu_j^n, \omega\right)$ фазовой функции $\Theta_n\left(\nu_j^n, \omega\right)$ лежат на кривой $l_n^+(\alpha)$, $\chi_n(\nu, \omega)$ — кривизна этой кривой. Фазовый сдвиг δ_j равен $-\dfrac{\pi}{4}$ или $-\dfrac{3\pi}{4}$ в зависимости от того, обращена ли кривая $l_n^+(\alpha)$ в точке $\nu_j^n(\alpha)$ выпуклостью или вогнутостью к выбранному направлению S_α. Асимптотика стационарной фазы становится неприменимой вблизи соответствующих волновых фронтов (каустик), поскольку каждая каустика порождается некоторой точкой перегиба соответствующей дисперсионной кривой, то есть такой точкой, в которой кривизна этой кривой обращается в ноль [Арнольд, 2002; Borovikov, 1994].

Для корректного построения асимптотик дальних волновых полей вблизи каустических поверхностей необходимо применение специального математического аппарата, учитывающего основные качественные особенности топологии дисперсионных зависимостей [Арнольд, 2002]. Особые точки фазовых функций могут сближаться с другими особыми точками или с какой-либо особенностью (полюсом, точкой ветвления) подынтегральной функции. При слиянии двух стационарных точек асимптотика интегралов (9) будет выражаться через функцию Эйри, при слиянии стационарных точек и полюса — через интеграл Эйри—Френеля. Случай слияния трех стационарных точек может описываться функцией Пирси, часто применяемой в теории особенностей и катастроф [Арнольд, 2002; Kravtsov et al., 1999]. Если две из трех сливающихся стационарных точек находятся строго симметрично относительно третьей, то асимптотика соответствующего интеграла может выражаться через функцию Ханкеля. Важно отметить, что наиболее интересными с практической точки зрения являются локальные экстремумы дисперсионных поверхностей $\mu_n(\nu, \omega)$. Численные расчеты демонстрируют физически интересные случаи пространственных конфигураций волновых структур, которые не описываются известными эталонными интегралами [Borovikov, 1994; Арнольд, 2002].

Линии равной фазы Φ отдельной волновой моды определяются из решения системы уравнений

$$\mu_n(\nu, \omega)x + \nu y = \omega t - \Phi, \tag{10}$$

$$\frac{\partial\mu_n(\nu, \omega)}{\partial\nu}x + y = 0, \tag{11}$$

где уравнение (10) означает условие постоянства фазы, а уравнение (11) — условие стационарности фазы. Решение системы (10)–(11) для каждой отдельной волновой моды определяет линии равной фазы Φ, заданные параметрически с параметром ν

$$x(\nu) = (\omega t - \Phi)\left(\mu_n(\nu,\omega) - \nu\frac{\partial\mu_n(\nu,\omega)}{\partial\nu}\right)^{-1},$$

$$y(\nu) = -\frac{\partial\mu_n(\nu,\omega)}{\partial\nu}(\omega t - \Phi)\left(\mu_n(\nu,\omega) - \nu\frac{\partial\mu_n(\nu,\omega)}{\partial\nu}\right)^{-1}.$$

4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для численных расчетов были использованы две модели линейных сдвиговых течений, характерных для условий Мирового океана: однонаправленное $U(z) = \frac{4\pi}{15} + 0.2z$ и разнонаправленное $U(z) = \frac{2\pi}{15} + 0.2z$. В первом случае сдвиговое течение не меняет направление своего распространения на всей глубине, во втором случае придонное и приповерхностное течения разнонаправлены. Все аналитические выражения и численные результаты приведены в безразмерных координатах. Численные расчеты были проведены с использованием вычислительной системы Mathematica. Число Ричардсона для данных моделей равно $Ri = 25$. Здесь и далее все расчеты приведены для первой волновой моды. На рис. 1, 2 приведены результаты расчетов дисперсионных кривых $\mu(\nu,\omega)$ при различных значениях частоты осцилляций источника. На рис. 1 линии 1–5 отвечают нижним ветвям, линии 6–9 — верхним ветвям дисперсионных соотношений: линия 1 — $\omega = 0$, линия 2 — $\omega = 0.125$, линия 3 — $\omega = 0.25$, линия 4 — $\omega = 0.6$, линия 5 — $\omega = 1.1$, линия 6 — $\omega = 0$, линия 7 — $\omega = 0.4$, линия 8 — $\omega = 0.8$, линия 9 — $\omega = 1.1$. На рис. 2 линия 1 — $\omega = 0.5$, линия 2 — $\omega = 0.85$, линия 3 — $\omega = 0.95$, линия 4 — $\omega = 1.0$, линия 5 — $\omega = 1.1$, линия 6 — $\omega = 1.3$.

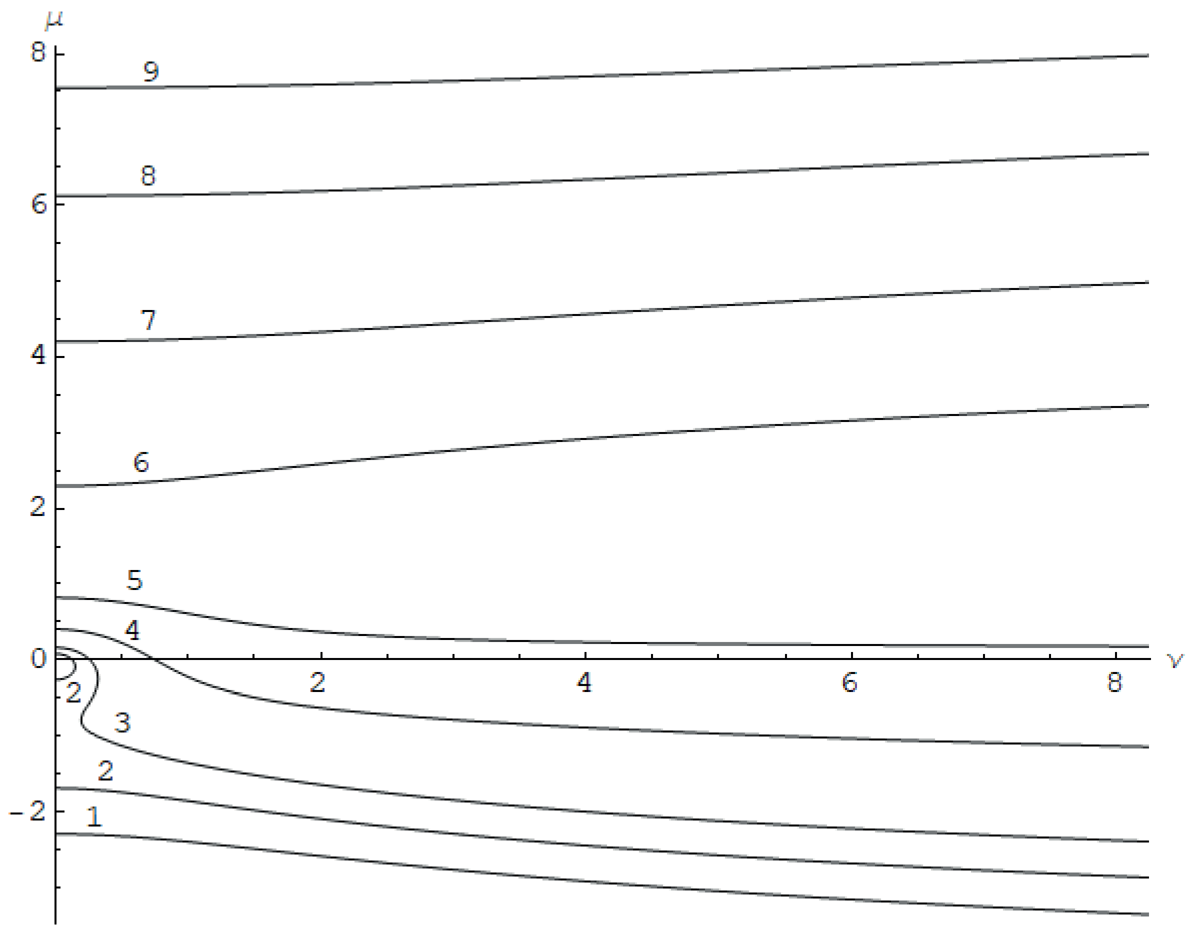

Рис. 1. Дисперсионные зависимости: однонаправленное течение.

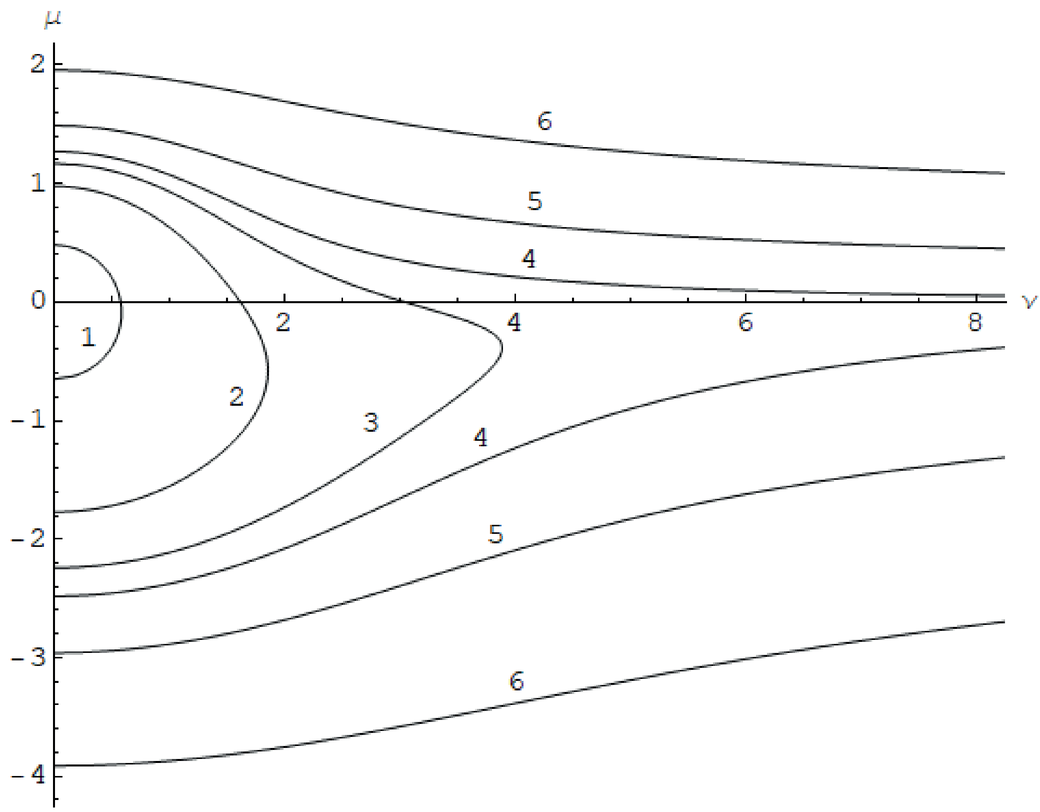

Рис. 2. Дисперсионные зависимости: разнонаправленное течение.

Результаты численных расчетов показывает сильную изменчивость качественного поведения дисперсионных картин в зависимости от значений ω. В частности, для разнонаправленного течения при относительно небольших значениях ω дисперсионная зависимость $\mu(\nu,\omega)$ определяется только одной замкнутой ветвью. В случае однонаправленного течения по мере увеличения частоты ω происходит качественная перестройка дисперсионных кривых, и дисперсионная кривая может распадаться на две ветви: нижнюю и среднюю. и при некотором значении ω эти ветви могут сливаться. При некоторых значениях частоты осцилляции источника может наблюдаться отчетливая омега-образная структура дисперсионных кривых, что означает многозначность функции $\mu(\nu,\omega)$ для определенных интервалов значений ν. Для разнонаправленного течения по мере увеличении значений ω происходит размыкание нижней ветви дисперсионных зависимостей на две разомкнутые кривые, и дисперсионные кривые становятся однозначными функциями переменной ν: эти две разомкнутые ветви дисперсионных зависимостей при увеличении ω все более и более расходятся друг от друга. В случае однонаправленного течения одна (верхняя) ветвь дисперсионной кривой может пересекать ось $\mu = 0$ и менять знак, а другая (нижняя) ветвь всегда имеет отрицательные значения.

На рис. 3–6 приведены результаты расчеты линий равной фазы Φ (сплошные линии) и волновых фронтов (штриховые линии) для однонаправленного сдвигового течения, на рис. 7–9 — для разнонаправленного течения. На рис. 3 значения параметров равны: $\omega = 0.125$, $t = 250$, $\Phi = 2k\pi$, $k = 1,2,3,4$; рис. 4 — $\omega = 0.125$, $t = 113$, значения фазы для кольцевых волн $\Phi = 2k\pi$, $k = 1,2,3,4$; значения фазы для продольных волн $\Phi = 2k\pi$, $k = 5,6,...14$; рис. 5 — $\omega = 0.6$, $t = 47$, значения фазы для кольцевых волн $\Phi = 2k\pi$, $k = 1,2,3,4$, значения фазы для продольных волн $\Phi = 2k\pi$, $k = 5,6,...10$; рис. 6 — $\omega = 1.1$, $t = 26$, $\Phi = 2k\pi$, $k = 1,2,3,4$; рис. 7 — $\omega = 0.85$, $t = 35$, $\Phi = 2k\pi$, $k = 1,2,3,4$; рис. 8 — $\omega = 0.95$, $t = 31$, $\Phi = 2k\pi$, $k = 1,2,3,4$; рис. 9 — $\omega = 1.1$, $t = 31$, $\Phi = 2k\pi$, $k = 1,2,3,4$.

Как показывают численные расчеты вариативность, неоднозначность и качественное разнообразие дисперсионных соотношений являются причиной генерации различных типов волн. В частности, замкнутые ветви дисперсионных кривых могут при определенных волновых числах приводить к возбуждению кольцевых (поперечных) волн. Разомкнутые ветви дисперсионных зависимостей определяют систему продольных (клиновидных) волн. Численные

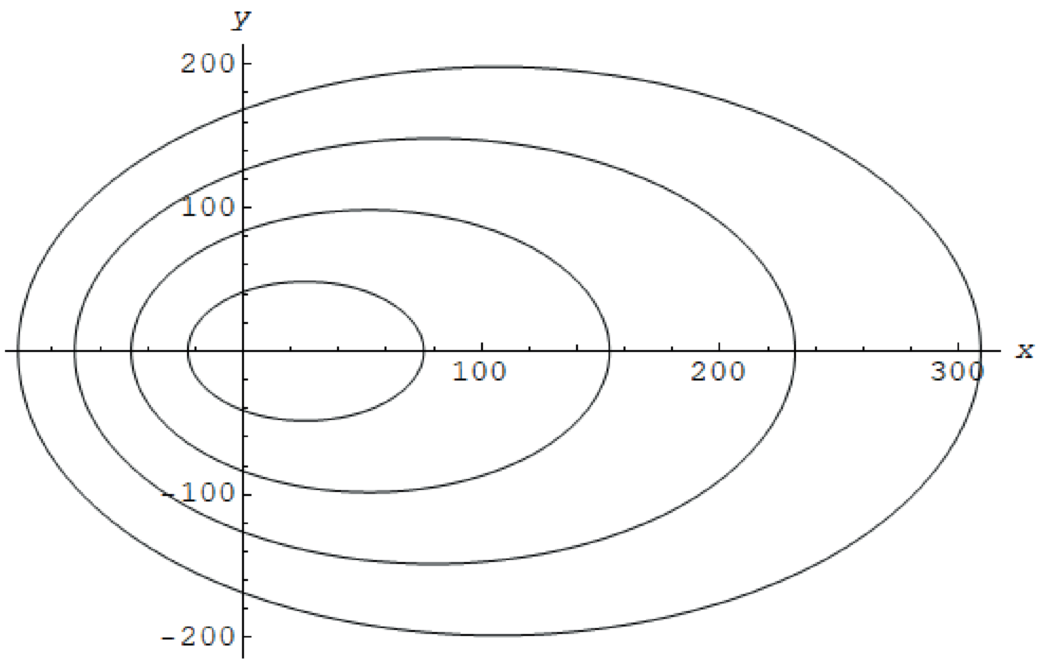

Рис. 3. Кольцевые волны ассиметрично распространяются во всех направлениях.

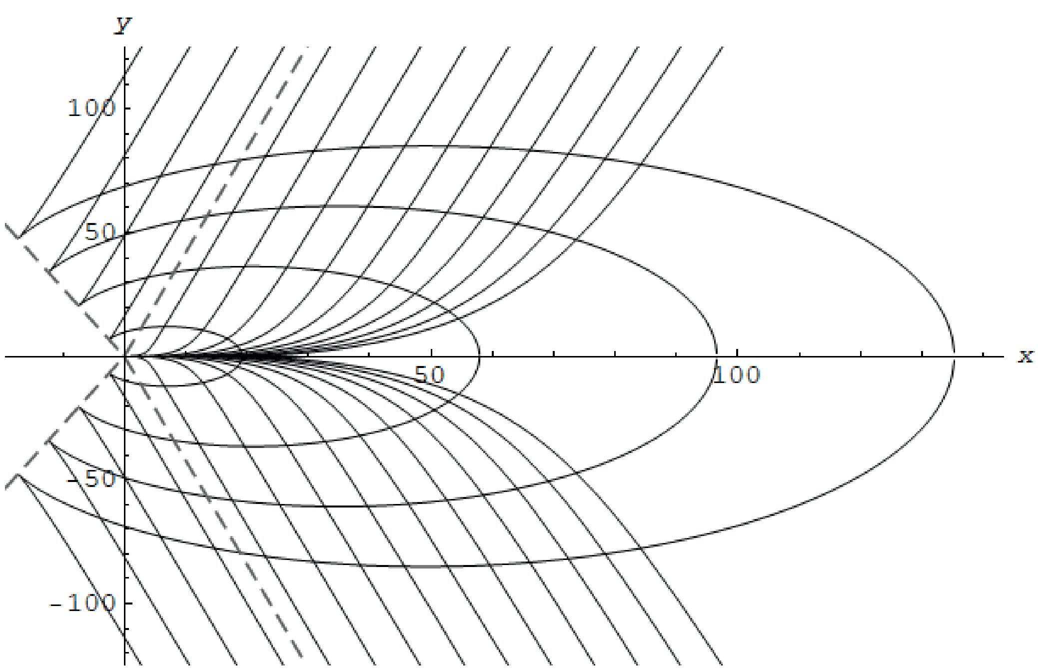

Рис. 4. Волновая система двух типов: кольцевые волны распространяются от источника, продольные — в отрицательном направлении оси Ox; два волновых фронта при $x > 0$, два волновых фронта при $x < 0$.

расчеты демонстрируют, что при относительно малых частотах осцилляций источника возбуждаются только кольцевые (поперечные) волны, причем в некоторых случаях одновременно может возбуждаться более двух волновых пакетов таких волн. Число одновременно возбуждаемых волновых пакетов определяется общим количеством отдельных ветвей дисперсионных кривых. При больших значениях частоты генерируются только продольные (клиновидные) волны двух типов, причем при увеличении значения частоты осцилляции угол полураствора волновых фронтов уменьшается. Можно также отметить, что существует такие значения частоты, при которых угол полураствора волнового фронта близок к девяносто градусам. Поэтому при этих значени-

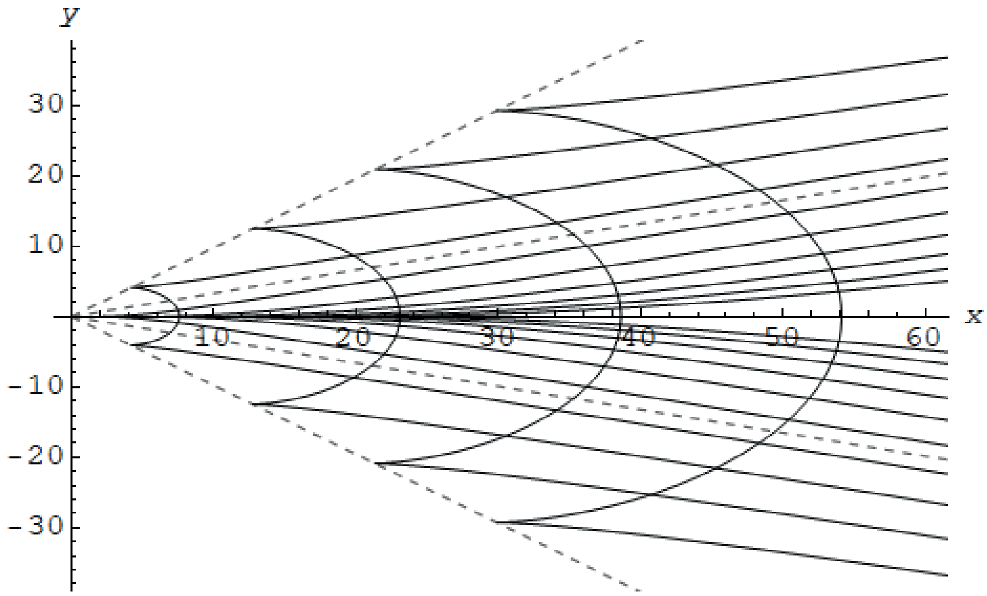

Рис. 5. Волновая система двух типов: кольцевые волны распространяются от источника, продольные — в обе стороны от оси Ox; четыре волновых фронта при $x > 0$.

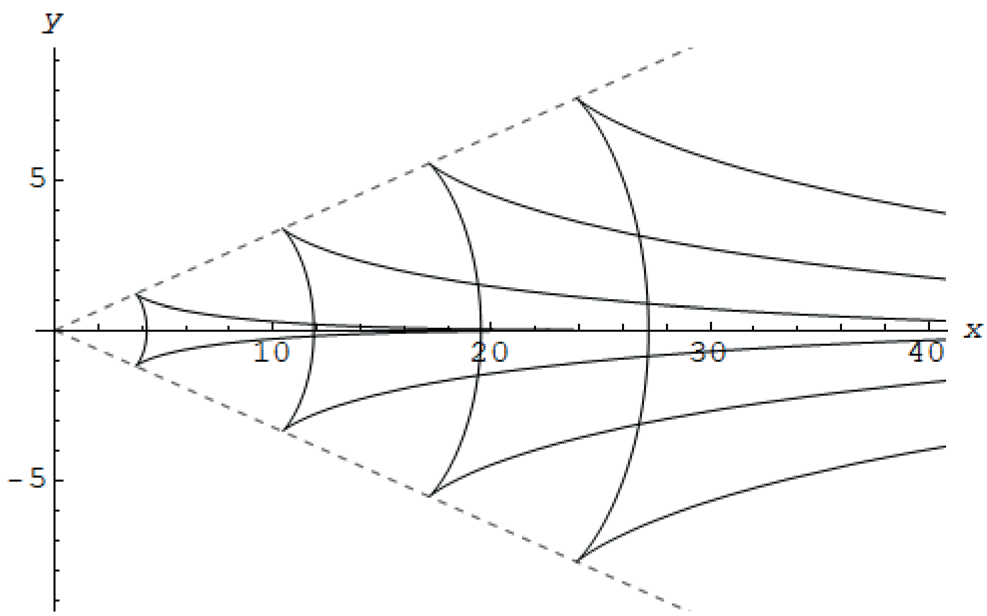

Рис. 6. Продольные волны в форме криволинейных треугольников движутся в положительном направлении оси Ox; два волновых фронта при $x > 0$.

ях частоты, в силу многозначности дисперсионных соотношений, волновая картина возбуждаемых полей представляет собой сложную волновую систему, обладающую одновременно как свойствами продольных, так и поперечных волн. Как показывают полученные результаты, гребни волновых пакетов могут распространяться как в положительном (при $\mu(\nu,\omega) > 0$), так и в отрицательном направлении оси Ox (при $\mu(\nu,\omega) < 0$). Поэтому для определенных типов волновых пакетов увеличение фазы ведет к приближению соответствующей линии равной фазы к началу координат

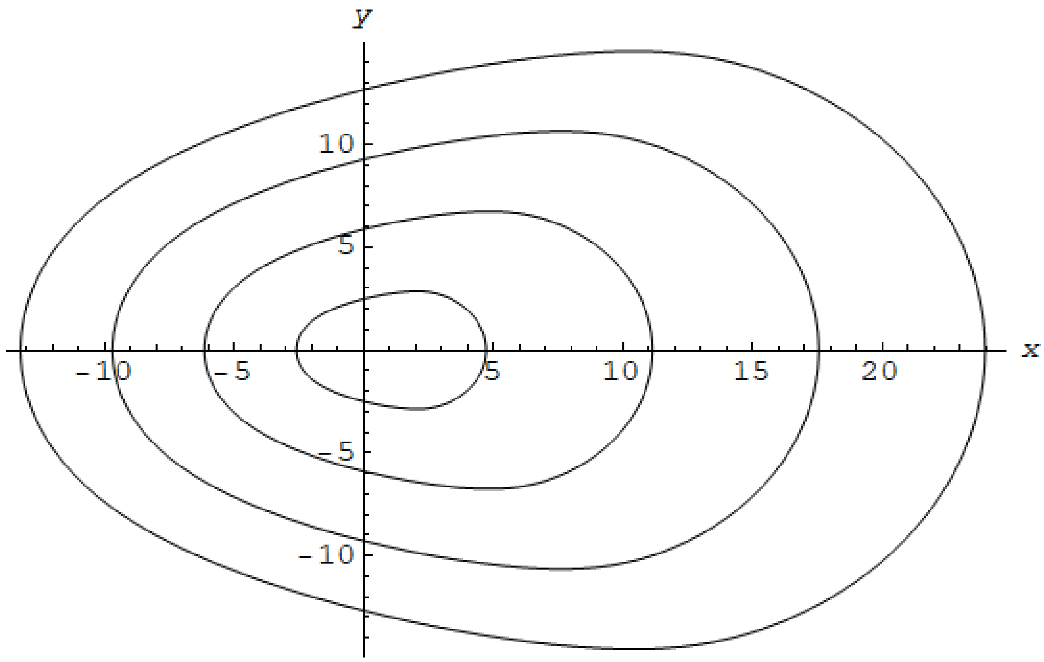

Рис. 7. Кольцевые волны ассиметрично распространяются во всех направлениях.

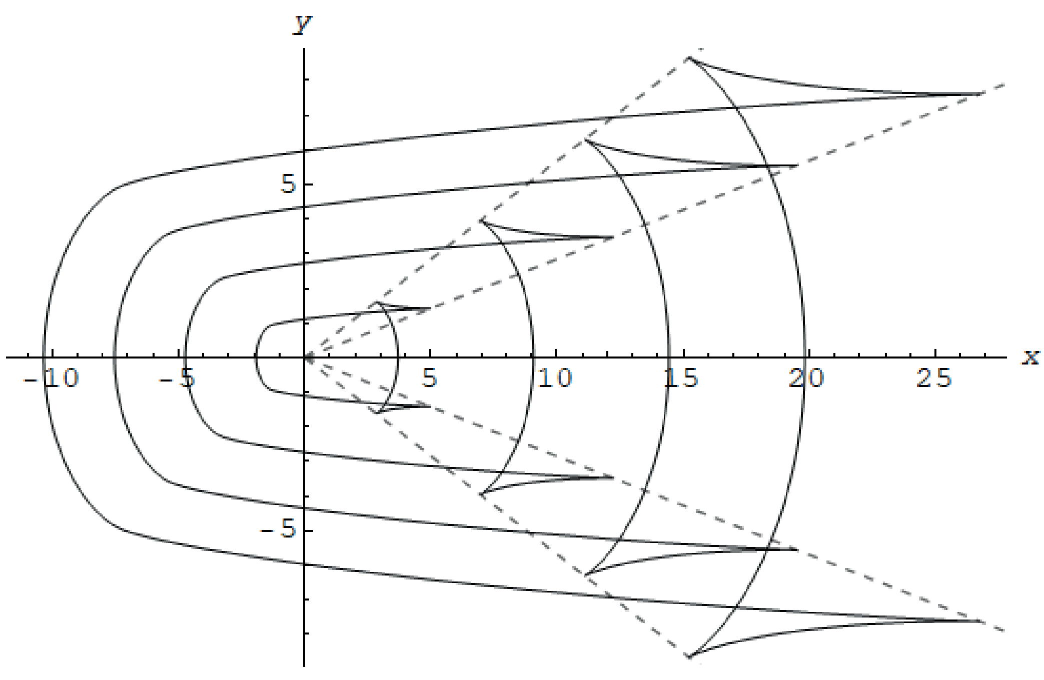

Рис. 8. Волновая система двух типов: кольцевые волны распространяются от источника во всех направлениях, продольные — в положительном направлении оси Ox; четыре волновых фронта при $x > 0$.

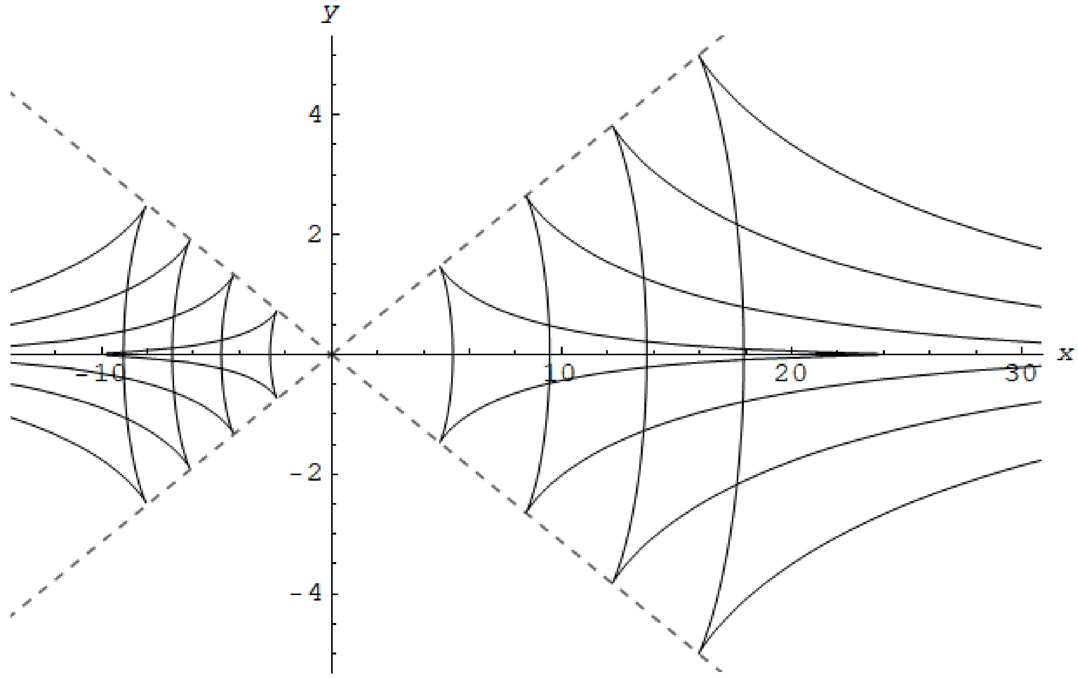

Рис. 9. Продольные волны во всех направлениях; два волновых фронта при $x > 0$, два волновых фронта при $x < 0$.

(положению источника возмущений), а для других типов волн — к удалению от него. Для разнонаправленного типа течений получена волновая картина в виде волнового креста, в этом случае все волновые колебания, распространяющиеся от источника возмущений, могут быть пространственно локализованы внутри волновых фронтов (каустик).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе для решения задачи были использованы модельные представления основных гидрологических параметров: постоянное распределение частоты плавучести и линейные зависимости скорости фонового сдвигового течения от глубины. Модельные представления гидрологических параметров качественно верно могут описать как характер, так и масштабы пространственной изменчивости сдвиговых океанических течений. Использование модельных представлений для основных гидрологических характеристик (частоты плавучести и фоновых сдвиговых течений) позволяют редуцировать основную спектральную задачу к более простой, а также исследовать эту упрощенную задачу аналитически. Действительно, при больших числах Ричардсона дебаевские асимптотики модифицированной функции Бесселя мнимого индекса позволяют получить явные аналитические представления основных дисперсионных соотношений, которые дают возможность эффективно рассчитывать амплитудно-фазовую структуру дальних волновых полей ВГВ, а также исследовать различные режимы волновой генерации для модельных представлений частоты плавучести и сдвиговых течений.

Для построения асимптотик полей ВГВ в стратифицированных средах с фоновыми сдвиговыми течениями необходимо исследовать соответствующие асимптотики отдельных волновых мод. В общем случае решение основной спектральной задачи и качественный анализ получаемых дисперсионных соотношений и амплитудных зависимостей собственных функций представляет значительную математическую трудность, так как эта спектральная задача для произвольных распределений функций $N(z), V(z), U(z)$ допускает только численное решение. Фазовая структура дальних полей ВГВ в стратифицированной среде с фоновыми сдвиговыми течениями определяется поведением стационарных точек фазовой функции.

Множество точек на горизонтальной плоскости может определять для каждой отдельной моды ВГВ пространственную зону, внутри которой волновое поле осциллирует, вне этой зоны при больших временах волновое поле экспоненциально мало, при этом поведение волнового поля на границах волновой зоны определяется аналитическими свойствами дисперсионных соотношений. Для реальных распределений частоты плавучести и фоновых сдвиговых течений волновая зона может быть ограничена двумя замкнутыми кривыми — передним и задним фронтом. Передний волновой фронт определяется асимптотикой поведения дисперсионных соотношений при малых волновых числах. Задний волновой фронт зависит от характера асимптотик дисперсионных соотношений при больших волновых числах. Отметим, что при отсутствии сдвиговых течений передний фронт представляет собой окружность с радиусом $C_n t$, где C_n — максимальная групповая скорость отдельной волновой моды ВГВ, а задний фронт стягивается в начало координат.

Аналитические оценки и численные результаты показывают, что асимптотические конструкции, использующие модельные представления частоты плавучести и фоновых сдвиговых скоростей качественно верно могут описывать амплитудно-фазовую структуру ВГВ. Учет реальных распределений основных гидрологических параметров океана дает возможность изучить все многообразие генерируемых в природных стратифицированных средах волн, и для описания амплитудных зависимостей ВГВ в природных средах (океане, атмосфере Земли) с произвольными фоновыми сдвиговыми течениями необходимо использовать численные методы. Поэтому для исследования ВГВ в реальных природных средах необходимо сочетание, как точных численных методов исследования волновых полей, так и различных асимптотических подходов, позволяющих исследовать основные качественные особенности возбуждаемых волн. Асимптотики дисперсионных соотношений позволяют в дальнейшем исследовать более реалистичную задачу изучения динамики ВГВ в океане медленноменяющимися и нестационарными параметрами, так как в этом случае решение можно представить в виде суммы волновых пакетов, фазовая структура которых определяется аналитическими свойствами соответствующих дисперсионных зависимостей и может быть асимптотически описана с помощью метода эталонных интегралов. Конкретный выбор фазовой функции (модельных интегралов) определяется аналитическими свойствами дисперсионных соотношений, зависящих от реальной гидрологии океана. Аналитические выражения дисперсионных кривых могут использоваться, в частности, для качественной интерпретации наблюдаемых волновых явлений в океане и для разработки дистанционных методов обнаружения ВГВ методами радиолокации.

Работа выполнена в рамках государственных заданий № FFGN-2024-0005 (В.В. Булатов), № FMWE-2024-0016 (И.Ю. Владимиров).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Арнольд В.И. Волновые фронты и топология кривых. М.: Фазис, 2002. 120 с.

Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Волны в стратифицированных средах. М.: Наука, 2015. 735 с.

Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Внутренние гравитационные волны в океане с разнонаправленными сдвиговыми течениями // Изв. РАН. ФАО. 2020. Т. 56. № 1. С. 104–111.

Булатов В.В., Владимиров Ю.В., Владимиров И.Ю. Внутренние гравитационные волны от осциллирующего источника возмущений в океане // Изв. РАН.ФАО. 2021.Т. 57. № 3. С. 362–373.

Лайтхил Дж. Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981. 598 с.

Миропольский Ю.З. Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Л.: Гидрометеоиздат, 1981. 302 с.

Свиркунов П.Н., Калашник М.В. Фазовые картины диспергирующих волн от движущихся локализованных источников // УФН. 2014. Т. 184. № 1. С. 89–100.

Сидняев Н.И. Теоретические исследования гидродинамики при подводном взрыве точечного источника // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. № 2. URL: https://engjournal.ru/catalog/appmath/hidden/614.html

Слепышев А.А., Лактионова Н.В. Вертикальный перенос импульса внутренними волнами в сдвиговом потоке // Изв. РАН. ФАО. 2019. Т. 55. № 6. С. 194–200.

Alias A., Grimshaw R.H.J., Khusnutdinova K.R. Coupled Ostrovsky equations for internal waves in a shear flow // Physics Fluids, 2014. V. 26, P. 126603.

Basovich A.Ya., Tsimring L.Sh. Internal waves in a horizontally inhomogeneous flow // J. Fluid Mech., 1984. V. 142 P. 233–249.

Borovikov V.A. Uniform stationary phase method. IEE electromagnetic waves. Series 40. London: Institution of Electrical Engineers, 1994. 233 p.

Bouruet-Aubertot P.I., Thorpe S.A. Numerical experiments of internal gravity waves an accelerating shear flow // Dyn. Atm. Oceans. 1999. V. 29. P. 41–63.

Bretherton F.P. The propagation of groups of internal gravity waves in a shear flow // Quart. J. Royal. Metereol. Soc. 1966. V. 92. P. 466–480.

Broutman D., Brandt L., Rottman J., Taylor C. A WKB derivation for internal waves generated by a horizontally moving body in a thermocline // Wave Motion, 2021. V. 105. P. 102759.

Broutman D., Rottman J. A simplified Fourier method for computing the internal wave field generated by an oscillating source in a horizontally moving depth-dependent background // Physics Fluids. 2004. V. 16. P. 3682.

Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Dynamics of internal gravity waves in the ocean with shear flows // Russian J. Earth Sciences. 2020. V. 20. ES4004.

Bulatov V., Vladimirov Yu. Analytical approximations of dispersion relations for internal gravity waves equation with shear flows // Symmetry. 2020. V. 12(11). P. 1865.

Carpenter J.R., Balmforth N. J., Lawrence G. A. Identifying unstable modes in stratified shear layers. // Phys. Fluids. 2010. 22. P. 054104.

Churilov S. On the stability analysis of sharply stratified shear flows // Ocean Dynamics. 2018. 68. P. 867–884.

Fabrikant A.L., Stepanyants Yu.A. Propagation of waves in shear flows. World Scientific Publishing, 1998. 304 p.

Fraternale F., Domenicale L, Staffilan G.,Tordella D. Internal waves in sheared flows: lower bound of the vorticity growth and propagation discontinuities in the parameter space // Phys. Rev. 2018. V 97. № 6. P. 063102

Frey D.I., Novigatsky A.N., Kravchishina M.D., Morozov E.G. Water structure and currents in the Bear Island Trough in July-August 2017 // Russian J. Earth Sciences. 2017. V. 17. ES3003.

Gavrileva A.A., Gubarev Yu.G., Lebedev M.P. The Miles theorem and the first boundary value problem for the Taylor–Goldstein equation // J. Applied and Industrial Mathematics. 2019. 13(3). P. 460–471.

Gnevyshev V., Badulin S. Wave patterns of gravity–capillary waves from moving localized sources // Fluids. 2020. V. 5. P. 219.

Hirota M., Morrison P.J. Stability boundaries and sufficient stability conditions for stably stratified, monotonic shear flows // Physics Letters A. 2016. 380(21). P. 1856–1860.

Howland C.J., Taylor J.R., Caulfield C.P. Shear-induces breaking of internal gravity waves // J. Fluid Mechanics, 2021. V. 921. A24.

Klimchenko E.E., Frey D.I., Morozov E.G. Tidal internal waves in the Bransfield Strait, Antarctica // Russ. J. Earth. Science. 2020. V. 20. ES2006.

Kravtsov Yu., Orlov Yu. Caustics, catastrophes and wave fields. Berlin: Springer. 1999. 210 p.

Miles J.W. On the stability of heterogeneous shear flow // J. Fluid Mech. 1961. V. 10(4). P. 495–509.

Meunier P., Dizus S., Redekopp L., Spedding G. Internal waves generated by a stratified wake: experiment and theory // J. Fluid Mech., 2018. V. 846. P. 752–788

Morozov E. G. Oceanic internal tides. Observations, analysis and modeling. Berlin: Springer, 2018. 317 p.

Morozov E.G., Parrilla-Barrera G., Velarde M.G., Scherbinin A.D. The Straits of Gibraltar and Kara Gates: a comparison of internal tides // Oceanologica Acta. 2003. V. 26(3). P. 231–241.

Morozov E.G., Tarakanov R.Yu., Frey D.I., Demidova T.A., Makarenko N.I. Bottom water flows in the tropical fractures of the Northern Mid-Atlantic Ridge // Journal of Oceanography. 2018. V. 74(2). P. 147–167.

Morozov E.G., Tarakanov R.Yu., Frey D.I. Bottom gravity currents and overflow in deep channels of the Atlantic ocean. Springer Nature Switzerland AG, 2021. 483 p.

Pedlosky J. Waves in the ocean and atmosphere: introduction to wave dynamics. Berlin-Heildelberg: Springer, 2010. 260 p.

Shugan I., Chen Y.-Y. Kinematics of the ship's wake in the presence of a shear flow // J. Mar. Sci. Eng. 2021. V. 9. P. 7.

Slepyshev A.A., Vorotnikov D.I. Generation of vertical fine structure by internal waves in a shear flows // Open J. Fluid Mechanics. 2019. V. 9. P. 140–157.

Sutherland B.R. Internal gravity waves. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. 394 p.

Vlasenko V., Stashchuk N., Hutter K. Baroclinic tides. N.Y.: Cambridge University Press, 2005. 372 p.

Velarde M.G., Tarakanov R.Yu., Marchenko A.V. (Eds.). The ocean in motion. Springer Oceanography. Springer International Publishing AG, 2018. 625 p.

Young W.R., Phines P., Garret C.J.R. Shear flows dispersion, internal waves and horizontal mixing // J. Phys. Oceanography. 1982. V. 12(6). P. 515–527.

INTERNAL GRAVITY WAVES EXCITED BY NON-STATIONARY DISTURBANCE SOURCES IN A STRATIFIED OCEAN WITH SHEAR FLOWS

V. V. Bulatov[1,*], I. Yu. Vladimirov[2]

[1]Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, pr. Vernadskogo 101–1, Moscow, 119526, Russia
[2]Shirshov Oceanology Institute RAS, Nahimovsky pr., 36, Moscow, 117997, Russia

**e-mail: internalwave@mail.ru*

The problem of constructing solutions that describe the generation of internal gravity waves by a localized oscillating source of disturbances in a finite layer of a stratified medium with background shear flows is considered. To construct analytical solutions in a linear approximation, model representations of the buoyancy frequency and the distribution of shear flow in depth were used. Under the Miles-Howard assumption, an integral representation of the solution in the form of sums of wave modes was obtained and, using the stationary phase method, an asymptotic representation of the solution for each mode was constructed. The results of calculations of dispersion dependences and phase structures of wave fields for various modes of wave generation are presented. The spatial transformation of the phase structures of wave fields has been studied depending on the frequency of oscillations of the source of disturbances and the main characteristics of shear flows.

Keywords: internal gravity waves, stratified medium, shear flows, pulsating source, asymptotics