

УДК 551.468

УСЛОВИЯ ТРАНСФОРМАЦИИ МЕЗОМАСШТАБНОГО ВИХРЯ В СУБМЕЗОМАСШТАБНУЮ ВИХРЕВУЮ НИТЬ ПРИ ВЫТЯГИВАНИИ ЕГО НЕОДНОРОДНЫМ БАРОТРОПНЫМ ТЕЧЕНИЕМ

© 2023 г. В. В. Жмур^{1, 2, 3, *}, Т. В. Белоненко³, Е. В. Новоселова³, Б. П. Суетин²¹Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Москва, Россия²Московский физико-технический институт (государственный университет), Москва, Россия³Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

*e-mail: zhmur-vladimir@mail.ru

Поступила в редакцию 26.07.2022 г.

После доработки 26.09.2022 г.

Принята к публикации 16.12.2022 г.

В работе изучаются эффекты сильного вытягивания в горизонтальной плоскости объемных мезомасштабных вихрей океана с позиций теории эллипсоидальных вихрей и применение этой теории к реальным условиям океана. Цель данной работы — теоретически определить физические условия неограниченного вытягивания вихрей, проверить выполнимость этих условий в реальном океане и на этой основе оценить долю мезомасштабных вихрей океана, которые вытягиваются в филаменты и тем самым перераспределяют энергию с мезомасштаба на субмезомасштаб.

Ключевые слова: мезомасштабный вихрь, вытягивание, вихревая нить, филамент, эллипсоидальный вихрь, течение

DOI: 10.31857/S0030157423020144, EDN: NWOVQL

ВВЕДЕНИЕ

Один из вариантов “перекачки” энергии от мезомасштабных процессов на субмезомасштабные связан с удлинением вихрей при воздействии растягивающих неоднородных горизонтальных течений на эти вихри. При этом в некотором направлении, продольном, вихрь сильно вытягивается, а в поперечном — значительно уменьшается в размерах. В горизонтальном плане такой вихрь становится похожим на вихревую нить. Иногда такое образование называют филаментом. В дальнейшем мы будем отождествлять эти два понятия. Таким образом, будем называть вихревой нитью, или филаментом, вихревое образование, продольный горизонтальный размер которого существенно превосходит поперечный горизонтальный размер. При значительном удлинении вихря его энергия перераспределяется с исходного горизонтального размера (например, с его диаметра) на поперечный размер вихревой нити. Цель данной работы — теоретически определить физические условия неограниченного вытягивания вихрей и дать описание параметрам, определяющим этот процесс.

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Предположим, что для рассматриваемых явлений выполняется квазигеострофическое приближение. В такой постановке математически задача сводится к решению нелинейного нестационарного уравнения для давления или функции тока. Ниже исходное уравнение записано для функции тока $\psi(x, y, z, t)$ в размерном виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\Delta_h \psi + \frac{\partial}{\partial z} \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + J_h \left(\psi, \Delta_h \psi + \frac{\partial}{\partial z} \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = 0, \quad (1)$$

(x, y, z) — декартова правая система координат, ось x направлена на восток, ось y на север, t — время, N — частота Вайселя-Брента. Другие гидродинамические характеристики движения, например, поле скорости (u, v, w) , определяются через функцию тока:

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad w = -\frac{f_0}{N^2} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial z} + J_h \left(\psi, \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right]. \quad (2)$$

Уравнение (1) имеет важный физический смысл – сохранение потенциальной завихренности σ (в трактовке Россби, см. [3]):

$$\sigma = \Delta_h \psi + \frac{\partial}{\partial z} \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (3)$$

Это означает, что вдоль траектории движения у частицы сохраняется величина σ , являющаяся лагранжевым инвариантом, причем, $\text{rot}_z \vec{u} = \Delta_h \psi$.

Уравнение (1) получено в предположении справедливости геострофического баланса сил в гидростатическом приближении. Оба условия выполняются при малых числах Россби

$$\text{Ro} = \frac{U}{fL} \ll 1 \quad (4)$$

при дополнительном ограничении на геометрический параметр δ :

$$\delta = \frac{h}{L} \leq 1. \quad (5)$$

Здесь h – характерный вертикальный размер, L – характерный горизонтальный размер, U – характерная скорость, $f = 2\omega \sin \varphi$ – параметр Кориолиса, ω – угловая скорость вращения Земли, φ – широта. В безразмерном виде уравнение (1) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\Delta_h \psi + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{B^2 N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \\ & + J_h \left(\psi, \Delta_h \psi + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{B^2 N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\sigma = \Delta_h \psi + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{B^2 N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (7)$$

Единственное безразмерное число, вошедшее в уравнение (6), это число Бургера

$$\text{B} = \frac{Nh}{fL}, \quad (8)$$

которое можно переписать в виде

$$\text{B} = \frac{L_R^S}{L}, \quad L_R^S = \frac{Nh}{f}. \quad (9)$$

Здесь L_R^S – некоторый горизонтальный размер задачи, с которым удобно сравнивать характерный горизонтальный масштаб L . Если в качестве характерного вертикального размера h принять глубину бассейна H , то L_R^S совпадет с внутренним (бароклиным) радиусом деформации Россби

$$L_R = \frac{N}{f} H. \quad (10)$$

По своему физическому смыслу L_R^S и, как частный случай, также L_R означают, что на горизонтальных размерах $L = L_R^S$ гравитационные эффекты и вращение одинаково влияют на динамику рассматриваемых явлений для выбранного вертикального масштаба процессов. Поскольку физический смысл L_R^S и L_R одинаков, оба выражения будем называть радиусами деформации Россби, но отличать L_R от L_R^S будем по способу написания.

О МАСШТАБАХ

Отметим, что для морских условий масштабы L_R^S и L_R могут сильно отличаться. Так, при изучении верхнего деятельного слоя океана h и H отличаются на порядок, следовательно, сильно различны L_R^S и L_R . Мало того, обычно для $L \sim L_R$ явления относят к мезомасштабным процессам, а явления с $L \sim L_R^S$ при сильном отличии L_R^S и L_R уже будут относиться к субмезомасштабным процессам. Аналогично, при изучении внутритермоклинных линз порядка L_R^S и L_R тоже различны. Тем не менее, если в безразмерной записи (6) уравнения для двух разных явлений совпадают, то из этого следуют условия подобия квазигеострофических движений: два квазигеострофических движения подобны, если подобны профили частоты Вайселя-Брента и совпадают числа Бургера. Естественно, что ограничения (4) и (5) на число Россби Ro и геометрический параметр δ должны быть справедливы. В конечном соотношении (6) оба параметра Ro и δ отсутствуют, что следует трактовать как автомодельность явлений по этим параметрам [1]. Конечно, нужно помнить, что в нашей модели отсутствует вязкость, поэтому в уравнениях не возникает дополнительный безразмерный параметр Экмана, это означает лишь, что мы рассматриваем явления вдали от экмановских слоев.

Вывод по данной части работы следующий: все полученные далее результаты могут быть перенесены на процессы с другими горизонтальными размерами, но с теми же числами Бургера и при условии, что при этом сохраняется геострофический баланс сил.

ДИНАМИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВИХРЯ С ТЕЧЕНИЕМ

При выводе уравнения (6) традиционно число Бургера полагается порядка единицы. Однако при таком подходе используется разложение в асимптотический ряд по числу Россби, а число Бургера не затрагивается. Формально нет серьезных математических оснований накладывать дополнительные ограничения на число Бургера.

Тем не менее, в данной работе мы полагаем, что число Бургера лежит в диапазоне от нескольких десятых до нескольких единиц.

Из сказанного следует, что гидродинамическое подобие квазигеострофических явлений должно наблюдаться для широкого круга задач и значительного диапазона горизонтальных размеров L . В частности, при изучении бароклинной неустойчивости зональных потоков (так называемая задача Иди, см. [11]), где наиболее быстро-растущие возмущения имеют масштаб порядка радиуса деформации Россби, все полученные свойства могут быть интерпретированы в терминах субмезомасштабных процессов для деятельного слоя океана. В этом случае наиболее быстро-растущие волновые возмущения будут иметь характерный горизонтальный размер порядка L_R^S так же, как и образовавшиеся в результате неустойчивости субмезомасштабные вихри.

В работах [2, 5–7, 18–20] предложена теория мезомасштабных квазигеострофических вихрей с однородной потенциальной завихренностью ядра, которое имеет эллипсоидальную форму. В этих работах принимается, что океан безграничен по горизонтали во всех направлениях, частота Вайс-Брента N в покое постоянна, а ограничения на число Бургера не накладываются. В указанных статьях разработана теория эволюции эллипсоидальных вихрей под действием равновихренных, линейных по координатам течений. Для баротропных течений $\vec{u}_b = (u_b, v_b, 0)$ с наиболее общей линейной зависимостью скорости течения от горизонтальных координат

$$\vec{u}_b = (u_0 + ex - \gamma y; v_0 + \gamma x - ey; 0) \quad (11)$$

задача сводится к эволюции во времени двух горизонтальных полуосей эллипсоида $a(t)$ и $b(t)$ (для определенности пусть a – большая полуось, а b – малая полуось). Здесь u_0 и v_0 – составляющие скорости течений в центре вихря $x = 0, y = 0$; коэффициенты γ и e описывают пространственную изменчивость фонового течения. При этом $\gamma = \frac{1}{2} \text{rot}_z \vec{u}_b$ – угловая скорость вращения жидких частиц в фоновом течении, а e – коэффициент деформации фонового течения. При течении в виде (11) центр вихря перемещается как целое со скоростью внешнего потока (u_0, v_0) , приходящего на центр эллипсоида. Вертикальная полуось c постоянна, а горизонтальные оси меняются так, что произведение $a(t) \times b(t)$, т.е. площадь сечения эллипсоида, сохраняется на любом горизонте.

Безразмерный параметр ε характеризует степень вытягивания вихря и определяется через отношение его горизонтальных масштабов $\varepsilon = \frac{a}{b} \geq 1$. При помощи c вводится безразмерный

параметр вертикальной сплюснутости ядра вихря:

$K = \frac{Nc}{f r_0}$, где $r_0 = \sqrt{ab}$ – эффективный радиус вихря, N – средняя по глубине в слое 0–1000 м частота Вайс-Брента. Ранее установлено, что при деформации вихря баротропным потоком вертикальная полуось, а также произведение полуосей a, b и, соответственно, r_0 не изменяются. Следовательно, и параметр вертикальной сплюснутости ядра K также сохраняется при деформации вихря баротропным потоком [4, 21].

Задачу эволюции формы вихря можно свести к системе двух дифференциальных уравнений для отношения полуосей $\varepsilon = \frac{a}{b}$ и угла ориентации θ , образуемого большей горизонтальной полуосью эллипсоида a с осью x :

$$\dot{\varepsilon} = 2\varepsilon e \cos 2\theta, \quad (12a)$$

$$\dot{\theta} = \Omega(\varepsilon, K) + \gamma - \frac{\varepsilon^2 + 1}{\varepsilon^2 - 1} e \sin 2\theta. \quad (12b)$$

Здесь

$$\Omega(\varepsilon, K) = \frac{1}{2} \sigma K \int_0^\infty \frac{\mu d\mu}{\sqrt{(\mu + \varepsilon)(\mu + \frac{1}{\varepsilon})(K^2 + \mu)}}. \quad (13)$$

В общем случае $\Omega(\varepsilon, K)$ – переменная собственная угловая скорость вращения формы ядра (не следует путать с угловой скоростью вращения частиц в ядре), зависящая от ε и σ , где σ – избыточная потенциальная завихренность вихревого ядра над потенциальной завихренностью 2γ фонового течения (11), μ – переменная интегрирования. Детали вывода соотношений (12a), (12b) и (13), а также простейшие свойства эволюции вихревого ядра можно найти в работах [2, 5]; дальнейшее развитие данного подхода представлено в работах [15–17]. Соотношения (12a), (12b) описывают эволюцию формы ядра, включая угловую скорость его вращения. Деформация формы ядра происходит благодаря коэффициенту деформации e в фоновом течении (11), а физически – из-за пространственной неоднородности фонового течения. При постоянных коэффициентах e и γ система решается в квадратурах

$$\sin 2\theta = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1} C + \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1} \int_1^\varepsilon \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2} \frac{\Omega(\mu, K) + \gamma}{e} d\mu, \quad (14)$$

где C – произвольная константа интегрирования. В результате любая интегральная кривая (14) в плоскости параметров $(\varepsilon; \sin 2\theta)$ описывает эволюцию конкретного вихря, зависящую от параметров e и γ фонового течения, параметра вертикальной сплюснутости вихревого ядра K и значения константы интегрирования C с естественным

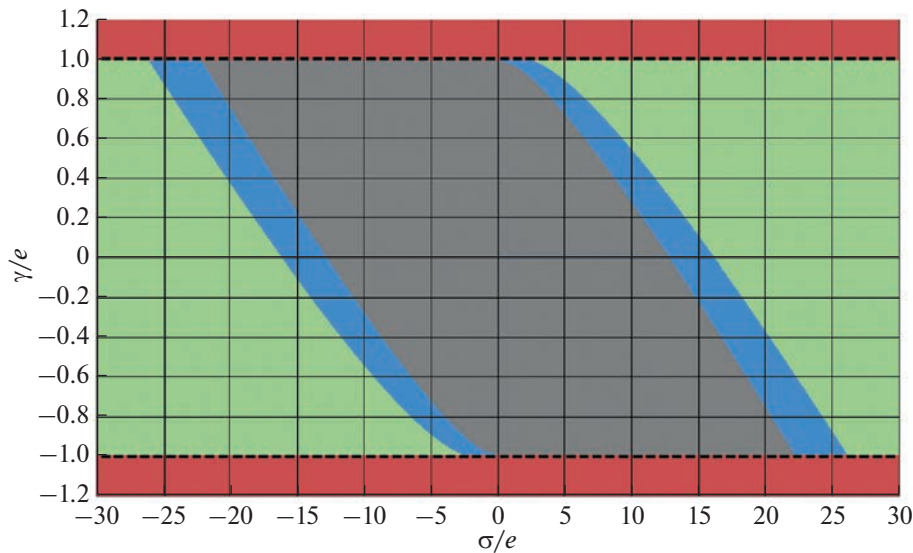


Рис. 1. Диаграмма зон различного поведения вихрей в случае $K = 1$ в плоскости параметров $(\sigma/e, \gamma/e)$. По оси ординат выделяются три области: для двух областей $|\gamma/e| > 1$ присутствуют только колебательный и вращательный режимы (красный цвет, область простирается до бесконечности); в области $|\gamma/e| \leq 1$ разрешены все три режима, которые отделены друг от друга четырьмя кривыми, выходящими попарно из точек $(0; \pm 1)$ и $(\pm(\frac{\sigma}{e})_0, \pm 1)$. В результате полоса $|\gamma/e| \leq 1$ разбивается на симметричные относительно начала координат три зоны:

- внешняя (зеленая) — разрешены все режимы: вращательный, колебательный и вытягивания;
- промежуточная (синяя) — разрешены режимы: колебательный и неограниченного вытягивания;
- внутренняя (серая) — разрешен только режим неограниченного вытягивания ядра вихря.

ограничением $|\sin 2\theta| \leq 1$. Плоскость $(\epsilon; \sin 2\theta)$ является фазовой плоскостью, при этом существуют три варианта поведения формы эллипсоидальных вихрей в течении, описываемого формулой (11): два периодических режима (режим вращения и режим колебания формы ядра) и режим неограниченного вытягивания ядра в горизонтальном направлении [2, 5].

В данной работе исследуются условия для реализации режима неограниченного вытягивания вихревого ядра. На качественном уровне такое исследование уже проводилось [2, 5], но без изучения всего комплекса проблем, при этом в качестве важных условий вытягивания вихря в нить указывалось необходимое требование $|\frac{\gamma}{e}| \leq 1$, а также два независимых качественных критерия — слабая интенсивность вихря и значительная начальная вытянутость вихря в горизонтальном направлении. Рассмотрение количественных критериев ранее относилось только к случаю $|\frac{\gamma}{e}| = 1$. В данной работе мы предлагаем дальнейшее развитие этой задачи.

С точки зрения теории размерностей поведение интегральной кривой на фазовой плоскости $(\epsilon; \sin 2\theta)$ зависит от трех безразмерных характе-

ристик, входящих в соотношение (14). Наиболее удобные из них — γ/e , σ/e и K . Это не единственный набор безразмерных параметров, с помощью которых можно описать все многообразие возможных режимов, однако важно иметь в виду, чтобы все размерные характеристики присутствовали в безразмерных числах, а полученные безразмерные числа должны быть достаточно простыми и независимыми с общим количеством 3. Удобство безразмерного набора чисел γ/e , σ/e и K состоит в следующем: γ/e относится исключительно к характеристике фоновое течение, σ/e показывает относительную интенсивность вихря, а K , геометрический параметр, характеризует сплюснутость по вертикали вихревого ядра. Малые значения $K < 1$ соответствуют тонким вихрям, большие $K > 1$ — толстым. При воздействии баротропного течения (11) на вихрь параметр K остается неизменным, несмотря на деформацию ядра вихря. Постоянство K для каждого вихря позволяет изучить наличие каждого из трех режимов поведения вихрей на плоскости параметров $(\gamma/e, \sigma/e)$. На рис. 1 для выбранного значения $K = 1$ показана структура зон с разным поведением фазовых траекторий на плоскости параметров $(\gamma/e, \sigma/e)$.

Далее для сокращения названий режим неограниченного вытягивания будет называться режимом вытягивания. Во всей полосе $|\gamma/e| \leq 1$ допускается режим вытягивания, однако в серой зоне присутствует исключительно режим вытягивания.

Границы зон являются линиями бифуркации, при пересечении которых появляется новый или исчезает уже существующий режим поведения вихря. В дальнейшем нас будет интересовать в основном серая зона на рис. 1. Наиболее важным свойством здесь является ограничение на интенсивность вихрей, т.е. параметр $|\sigma/e|$ ограничен. Этой зоне соответствуют относительно слабые вихри. Такие вихри не выживают в неоднородных течениях, они растягиваются в вихревые нити. Отметим, что к понятию “слабые вихри” следует относиться с некоторой долей осторожности, поскольку реальные значения параметра $|\sigma/e|$ в этой зоне для малых значений K оказываются весьма большими, однако они все равно меньше, чем в других зонах поведения вихрей при фиксированном параметре течения γ/e . Отметим также несимметричность поведения вихрей по отношению к знакам σ/e и γ/e . Лучше вытягиваются вихри при $\sigma/\gamma < 0$, а успешнее сопротивляются вытягиванию вихри с одинаковыми знаками избыточной потенциальной завихренности ядра σ и относительной завихренности фоновых потоков.

На качественном уровне это можно объяснить следующим образом. Согласно уравнениям эволюции вихрей в течениях (12а) и (12б), форма вихря вращается самостоятельно, а также, согласно (12б), дополнительно подкручивается ротационной составляющей внешнего течения. Вытягивание вихря, в свою очередь, также связано с вращением. Если вращение формы прекращается (или почти прекращается), то в выражении $\cos 2\theta$ фиксируется знак. Если $\cos 2\theta > 0$, то это приводит к экспоненциальному вытягиванию вихря, согласно соотношению (12а). Следовательно, для монотонного вытягивания вихря требуется практически полное прекращение вращения его формы. Но такое возможно только в том случае, если знаки у σ и γ разные. Если же знаки одинаковые, то вихрь самостоятельно вращается и, как было отмечено выше, дополнительно подкручивается течением в одну и ту же сторону и, таким образом, отвечающая ему точка диаграммы оказывается в зоне вращения. Следовательно, достаточно интенсивные вихри не могут неограниченно вытягиваться. Таким образом, мы установили, что слабые вихри с разными знаками σ и γ преимущественно вытягиваются течением в вихревые нити. И, наоборот, во внешних деформационных течениях наиболее живучи вихри с одинаковыми знаками σ и γ . Это обстоятельство объясняет наличие

слабых мелких вихрей противоположного знака завихренности в окрестности крупных интенсивных вихрей [2, 8, 10, 12, 13]. Слабые мелкие вихри одного знака с крупным интенсивным вихрем, находясь вблизи него, вытягиваются в нити.

Серая зона (рис. 1), соответствующая вытягиванию вихрей, деформируется при изменении параметра вертикальной сплюснутости ядра K . Это приводит к необходимости рассмотреть картины положения всех рассматриваемых зон с различным поведением вихря для других значений K . Результаты рассмотрения представлены на рис. 2. Видно, что с увеличением значения K происходит следующее: граница серой зоны “подтягивается”

ближе к оси ординат $\frac{\gamma}{e}$. При этом разрешенный диапазон значений $\frac{\sigma}{e}$ уменьшается, что приводит к уменьшению размеров серой зоны.

На рис. 1 можно выделить два характерных значения $\frac{\sigma}{e}$, соответствующие координатам пересечения границы серой зоны с осью $\frac{\gamma}{e}$ (т.е. при $\frac{\gamma}{e} = 0$), и также точки пересечения границы серой зоны с линиями $\frac{\gamma}{e} = \pm 1$. В силу симметрии графика относительно начала координат будем рассматривать только правую полуплоскость для $\frac{\sigma}{e} > 0$. Обозначим полученные три значения при $\frac{\gamma}{e} = -1$ соответственно $\left(\frac{\sigma}{e}\right)_0$, $\left(\frac{\sigma}{e}\right)_1$ и $\left(\frac{\sigma}{e}\right)_2$. Для $K = 1$, согласно нашим расчетам, $\left(\frac{\sigma}{e}\right)_1 = 13$, а $\left(\frac{\sigma}{e}\right)_2 = 22.4$. Значение $\left(\frac{\sigma}{e}\right)_0$ – порядка единицы и далее нигде фигурировать уже не будет, в то время как $\left(\frac{\sigma}{e}\right)_1$ и $\left(\frac{\sigma}{e}\right)_2$ на порядок больше единицы.

На рис. 2 изображены границы областей различного поведения вихрей в зависимости от K : при $K = 0.1; 0.3; 1; 10$. Для каждого значения K границы показаны линиями одинакового цвета. Фактически рис. 2 – это аналог рис. 1, но только для разных K , где зоны разного цвета (и различного характера поведения вихрей) не выделены, так как они накладываются друг на друга. Как и на рис. 1, все границы на рис. 2 отделены друг от друга кривыми, выходящими попарно из точки $(0; \pm 1)$ и близкой к ней точки $\left(\left(\frac{\sigma}{e}\right)_0; \pm 1\right)$. В результате полоса $|\gamma/e| \leq 1$ для каждого значения K (ана-

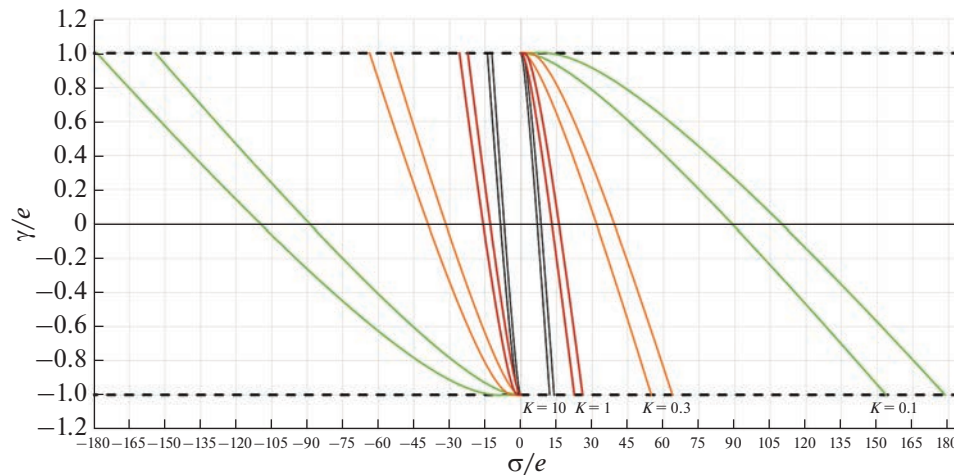


Рис. 2. Диаграмма распределения внешних границ зон с различным поведением вихрей для разных значений параметра K : $K = 0.1$ (зеленые линии), $K = 0.3$ (оранжевые линии), $K = 1$ (красные линии), $K = 10$ (черные линии). В каждой паре кривых линия, расположенная ближе к оси $\frac{\sigma}{e} = 0$, представляет границу серой области, а вторая линия — границу синей области.

В Приложении кратко описан способ получения диаграммы зон различного поведения вихрей — рис. 1 и 2.

логично рис. 1) снова разделена на три зоны, симметричные относительно точки $(0;0)$. Для нас представляют особый интерес характеристики центральной зоны, которую мы по-прежнему будем называть серой зоной и которая предсказывает неминуемое вытягивание вихрей. Для каждого значения K серая зона располагается между двумя ограничивающими линиями одного цвета, расположенными ближе к вертикальной оси симметрично относительно этой оси. На рис. 2 видно, что серая зона уменьшается по мере увеличения параметра K , при этом одновременно уменьшаются характерные значения $\left(\frac{\sigma}{e}\right)_1$ и $\left(\frac{\sigma}{e}\right)_2$. В табл. 1 представлены значения $\left(\frac{\sigma}{e}\right)_1$ и $\left(\frac{\sigma}{e}\right)_2$ для набора выбранных K . Отметим, что их численные значения при любых K на один-два порядка больше единицы. Чем тоньше вихрь (меньше K), тем больше эти значения. При этом ограничения сверху при $K \rightarrow 0$ на $\left(\frac{\sigma}{e}\right)_1$ и $\left(\frac{\sigma}{e}\right)_2$ отсутствуют. Толстым вихрям соответствуют малые значения $\left(\frac{\sigma}{e}\right)_1$ и $\left(\frac{\sigma}{e}\right)_2$, однако они в любом случае ограничены снизу числами $\left(\frac{\sigma}{e}\right)_1 \rightarrow 6.7$ и $\left(\frac{\sigma}{e}\right)_2 \rightarrow 11.7$ при $K \rightarrow \infty$. Другими словами, серая зона для вихрей не стягивается к нулю при $K \rightarrow \infty$, но возникает ее конечная внутренняя часть — сердцевина, для которой все вихри любой толщины при любых значениях K неминуемо вытянутся в нить, в том

числе и вихри бесконечно толстые. Напомним, что качественно динамика неограниченно толстых 3D-вихрей в течениях совпадает с динамикой плоских 2D-эллиптических вихрей Кирхгофа в тех же течениях: общие исследования поведения эллиптических вихрей Кирхгофа начались с работы Кида [14], однако еще раньше динамику эллиптических вихрей Кирхгофа в частном виде сдвиговых течений описывал С.А. Чаплыгин [9]. В наших исследованиях [2, 5–7, 18–20] мы фактически объединили задачи поведения 2D-эллиптических и 3D-эллипсоидальных вихрей в баротропных потоках.

Можно показать, что при дальнейшем увеличении $K > 10$ соответствующие линии границ серой, синей и зеленой зон практически совпадают, т.е., внутренняя часть серой зоны для больших значений K практически ограничена черными линиями $K = 10$, наиболее близкими к оси ординат. Графическая иллюстрация существования конечной внутренней части серой зоны (сердцевины) следует из графиков на рис. 3.

Обозначим буквой A абсциссы точек пересечения значений $\frac{\sigma}{e}$ с прямыми $\frac{\gamma}{e} = 0$ или $\frac{\gamma}{e} = -1$ при разных K и нанесем их на график (рис. 3). Рисунок показывает, что все кривые $A\left(\frac{\sigma}{e}\right)$ имеют ненулевые асимптоты. На рисунке 3 видно, что, во-первых, абсциссы границ областей, в которых вихри эволюционируют по-разному, очень чувствительны к вариациям параметра K в диапазоне $0 < K < 1$ (для тонких вихрей); во-вторых, при неограниченном росте K (для толстых вихрей) абс-

Таблица 1. Координаты $\frac{\sigma}{e}$ границ “серой зоны”, а также сопутствующих характеристик для $\frac{\gamma}{e} = 0$ и $\frac{\gamma}{e} = -1$ в зависимости от параметра K

K	Координата $\left(\frac{\sigma}{e}\right)_1$ границы серой зоны для $\frac{\gamma}{e} = 0$	$\left(\frac{\text{rot}_z \vec{u}}{e}\right)_1$	Координата $\left(\frac{\sigma}{e}\right)_2$ границы серой зоны для $\frac{\gamma}{e} = -1$	$\left(\frac{\text{rot}_z \vec{u}}{e}\right)_2$	$\left(\frac{\text{rot}_z \vec{u}}{\text{rot}_z \vec{u}_b}\right)_2$
0.1	88.9	12.4	154	21.4	10.7
0.2	45.8	11.4	79.3	19.8	9.9
0.3	31.8	10.8	54.9	18.6	9.3
0.4	24.8	10.2	43	17.7	8.6
0.6	18.1	9.5	31.4	16.5	8.3
0.8	14.9	9.0	25.7	15.6	7.8
1	13	8.7	22.4	14.9	7.5
1.5	10.5	8.1	18.2	14.0	7.0
2	9.4	7.8	16.2	13.4	6.7
2.5	8.7	7.5	15.1	13.1	6.6
3	8.3	7.4	14.4	12.8	6.4
4	7.8	7.2	13.5	12.5	6.3
5	7.5	7.1	13	12.3	6.2
6	7.3	7.0	12.7	12.2	6.1
8	7.1	6.9	12.3	12.0	6.0
10	7	6.9	12.1	11.9	6.0
15	6.8	6.7	11.9	11.8	5.9
100	6.7	6.7	11.7	11.7	5.9

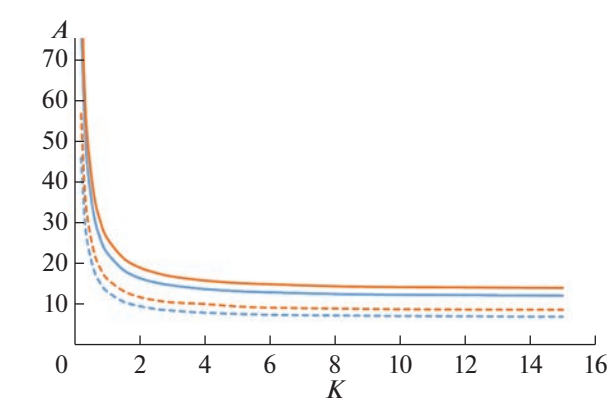


Рис. 3. Абсциссы (A) точек пересечения значений $\frac{\sigma}{e}$ с прямыми $\frac{\gamma}{e} = 0$ (сплошные линии) или $\frac{\gamma}{e} = -1$ (штриховые линии) в зависимости от K . Синие линии — абсциссы границы серой и синей зон на рис. 1. Оранжевые линии — абсциссы границы синей и зеленой зон на рис. 1.

циссы границ областей различного поведения вихрей имеют положительную асимптотику. Последнее свойство, в свою очередь, означает, что ни одна из зон различного поведения вихрей не превращается в линию, оставаясь по площади конечной при любых, в том числе бесконечных, значениях K . В частности, зона неограниченного вытягивания вихрей (серая зона на рисунке 1) останется конечной при любом значении параметра K . Этот факт еще раз подтверждает, что данная теория описывает поведение как 2D-эллиптических, так и 3D-эллипсоидальных вихрей в баротропных потоках.

Один из самых важных выводов работы состоит в том, что в баротропных течениях только вихри достаточной большой интенсивности остаются локализованными (не растягиваются в нить). Действительно, диапазон допустимых значений параметра $\frac{\sigma}{e}$ для “выживания” вихря в течении, как минимум, на один–два порядка превосходит

единицу. Для тонких вихрей это соотношение составляет величину в два порядка, поэтому тонкие вихри будут активнее вытягиваться в вихревые нити. Для геометрических параметров внутри серой зоны неминуемого вытягивания должно выполняться следующее условие:

$$-M_1(\gamma/e) < \frac{\sigma}{e} < M_2(\gamma/e). \quad (15)$$

Здесь положительные (в общем случае) различные M_1, M_2 — функции от $\frac{\gamma}{e}$, описывающие левую и правую ветви серой зоны. Неравенство (15) показывает, что для выживания вихря в течении необходимо, чтобы избыточная относительная завихренность σ ядра была бы достаточно большой по модулю и не попадала в интервал (15).

Обратимся к табл. 1. Безразмерная интенсивность вихрей в форме $\frac{\sigma}{e}$ не очень удобна для практических оценок, и интенсивность вихрей удобнее рассматривать в виде относительной завихренности ядра $\text{rot}_z \vec{u}$, сравнивая ее с относительной завихренностью фоновое течение. Потенциальная завихренность круглого в горизонтальном плане ядра однозначно связана с относительной завихренностью $\text{rot}_z \vec{u}$ при выбранном K . Поэтому параметры $\left(\frac{\sigma}{e}\right)_1$ и $\left(\frac{\sigma}{e}\right)_2$ могут быть пересчитаны в терминах $\left(\frac{\text{rot}_z \vec{u}}{e}\right)_1$ и $\left(\frac{\text{rot}_z \vec{u}}{e}\right)_2$, значения которых также представлены в таблице. Отметим, что во всем диапазоне изменений K значения $\left(\frac{\text{rot}_z \vec{u}}{e}\right)_1$ и $\left(\frac{\text{rot}_z \vec{u}}{e}\right)_2$ изменяются примерно в два раза, в то время как $\left(\frac{\sigma}{e}\right)_1$ и $\left(\frac{\sigma}{e}\right)_2$ изменяются на порядок. Между собой величины $\left(\frac{\text{rot}_z \vec{u}}{e}\right)_1$ и $\left(\frac{\text{rot}_z \vec{u}}{e}\right)_2$ также отличаются примерно в два раза. Поэтому эти параметры более удобны для интерпретации результатов, чем $\left(\frac{\sigma}{e}\right)_1$ и $\left(\frac{\sigma}{e}\right)_2$. Однако, параметр деформации e редко используется в океанологии, что служит дополнительным источником проблем интерпретации. Для параметров $\left(\frac{\sigma}{e}\right)_2$ и $\left(\frac{\text{rot}_z \vec{u}}{e}\right)_2$ это неудобство легко исправляется, поскольку они рассчитаны для условия $|\gamma| = |e|$, поэтому фактически являются результатом сравнения относительных завихренностей ядра и фонового течения: $\left|\frac{\text{rot}_z \vec{u}}{\text{rot}_z \vec{u}_b}\right|$. Значения $\left|\frac{\text{rot}_z \vec{u}}{\text{rot}_z \vec{u}_b}\right|$ также

представлены в табл. 1 как функции параметра сплюснутости K , где параметр $\left|\frac{\text{rot}_z \vec{u}}{\text{rot}_z \vec{u}_b}\right|$ во всем диапазоне интересных для нас значений K меняется менее чем в два раза. На практике нас больше интересуют малые $K \sim 0.1-0.4$, поскольку практически все реальные вихри океана являются тонкими со значением $K < 1$. Для таких вихрей $\left|\frac{\text{rot}_z \vec{u}}{\text{rot}_z \vec{u}_b}\right| \approx 10$. Это означает, что в прямолинейном течении со сдвигом выживают очень интенсивные вихри с большим положительным значением параметра $\frac{\sigma}{e}$ или же, независимо от интенсивности, вихри противоположного знака $\frac{\sigma}{e} < 0$. Это является объяснением известного феномена различного поведения циклонов и антициклонов в одном и том же течении.

ОЦЕНКИ КОЛИЧЕСТВА ВИХРЕЙ МИРОВОГО ОКЕАНА С РАЗЛИЧНЫМ ХАРАКТЕРОМ ИХ ПОВЕДЕНИЯ, ОТНОСЯЩИХСЯ К РАЗЛИЧНЫМ ЗОНАМ

Оценим долю вихрей, попадающих в полосу $|\gamma/e| \leq 1$ (серая зона на рис. 1) и испытывающих неограниченное вытягивание. Начнем с линии $\frac{\gamma}{e} = -1$ на рисунках. Для выживания вихрей с условием $\frac{\sigma}{e} > 0$ требуется очень большая интенсивность $\left|\frac{\text{rot}_z \vec{u}}{\text{rot}_z \vec{u}_b}\right| > 10$, тогда все вихри этого знака окажутся в серой зоне. Вихри противоположного знака $\frac{\sigma}{e} < 0$ полностью попадают в синюю или зеленую зону и, следовательно, выживают в этом течении. Если считать, что количество циклонов и антициклонов одинаковое, то на линии $\frac{\gamma}{e} = -1$ половина вихрей обязательно вытянутся в нить, а оставшиеся вихри (вторая половина) останутся локализованными. Если говорить точнее, то часть вихрей с $\frac{\sigma}{e} < 0$, попавших в зеленую зону (рис. 1), также могут неограниченно вытянуться, если уже в начальный момент времени они были достаточно вытянуты. Однако их мы учитывать не будем. В результате получаем $\frac{1}{2}$ в качестве нижней оценки доли вихрей, неминуемо вытягивающихся до бесконечности на линии $\frac{\gamma}{e} = -1$. Эти же вихри в других течениях (при других параметрах $\frac{\gamma}{e}$)

могут как вытягиваться в нить, так и оставаться локализованными образованиями. На линии $\frac{\gamma}{e} = 0$ граница серой зоны симметрична, причем $M_1(0) = M_2(0) \approx \frac{1}{2} M_2(-1)$. Для тонких вихрей (практически все вихри океана в нашей классификации тонкие) с малыми значениями $K < 1$, $M_1(0) = M_2(0) \approx 5$, и в границы $-5 < \frac{\sigma}{e} < 5$ попадают практически все вихри океана для $\frac{\gamma}{e} = 0$. Т.е.

на линии $\frac{\gamma}{e} = 0$ практически все вихри океана окажутся в серой зоне и неминуемо подвергнутся неограниченному вытягиванию. На верхней границе полосы $-1 \leq \frac{\gamma}{e} \leq 1$, т.е. при $\frac{\gamma}{e} = 1$ половина вихрей окажется в серой зоне и, следовательно, неминуемо вытянется ($\frac{\sigma}{e} < 0$), а другая половина

($\frac{\sigma}{e} > 0$) окажется в зеленой или голубой зоне и, следовательно, практически полностью останется в локализованной форме. Итак, в полосе $-1 \leq \frac{\gamma}{e} \leq 1$ нам удалось оценить долю вытягивающихся вихрей только для трех значений: $\frac{\gamma}{e} = \pm 1$ и

$\frac{\gamma}{e} = 0$. Таким образом, на границах области вытягивается половина вихрей, в центре — вытягиваются все вихри. Если предположить, что доля вытягивающихся вихрей линейно зависит от параметра $\frac{\gamma}{e}$ в диапазонах $-1 \leq \frac{\gamma}{e} < 0$ и $0 \leq \frac{\gamma}{e} < 1$, то

такому распределению в полосе $-1 \leq \frac{\gamma}{e} \leq 1$ соответствует средняя доля вытягивающихся вихрей — 0.75. По всей видимости, полученное значение 0.75, является оценкой снизу, поскольку на границах диапазона $\frac{\gamma}{e} = \pm 1$ мы не учитывали дополни-

тельное вытягивание некоторого количества вихрей зеленой зоны. Предполагаемая линейная зависимость распределения вытягивающихся вихрей в окрестности $\frac{\gamma}{e} = 0$ также уменьшила локальное поведение функции распределения. В результате на трех точках $\frac{\gamma}{e} = \pm 1$ и $\frac{\gamma}{e} = 0$ мы везде получили недоучет доли растягивающихся вихрей.

На этом основании мы не можем однозначно утверждать, что доля вытягивающихся вихрей превышает 75%, но, возможно, это утверждение

верно. В конечном итоге, мы ограничимся оценкой 75% доли вытягивающихся вихрей в диапазоне параметра течений $-1 \leq \frac{\gamma}{e} \leq 1$. Какова доля вихрей из их общего количества, попадающих в условия $-1 \leq \frac{\gamma}{e} \leq 1$, пока нам не известно, но эта задача будет поставлена и решена в следующей нашей работе. В дальнейшем, на основе полученных результатов, будет сделана оценка доли мезомасштабных вихрей Мирового океана, которые вытягиваются в филаменты и тем самым перераспределяют энергию с мезомасштаба на субмезомасштаб.

ВЫВОДЫ

Таким образом, мы показали, что если в гидродинамической системе выполняется геострофический баланс сил, то все полученные результаты могут быть перенесены на явления с теми же числами Бургера, но с другими горизонтальными размерами. В частности, все полученные свойства могут быть переписаны в терминах субмезомасштабных процессов для деятельного слоя океана, если число Бургера лежит в диапазоне от нескольких десятых единицы до нескольких единиц, а наиболее быстрорастущие возмущения имеют масштаб порядка радиуса деформации Россби. При этом гидродинамическое подобие квазигеострофических явлений должно наблюдаться для широкого круга задач и значительного диапазона горизонтальных размеров вихрей.

Для вихрей с произвольным фиксированным значением параметра K при $|\gamma/e| \leq 1$ в плоскости параметров $(\sigma/e, \gamma/e)$ возникают три различные зоны, характеризующие различные формы поведения вихрей (см. рис. 1): внешняя (зеленая), когда разрешены все режимы: вращательный, колебательный и вытягивания; промежуточная (синяя), когда разрешены колебательный режим и режим неограниченного вытягивания; внутренняя (серая), когда разрешен только режим неограниченного вытягивания ядра вихря. Эти зоны симметричны относительно начала координат. При $|\gamma/e| > 1$ неограниченное вытягивание вихрей запрещено (красные зоны на рис. 1).

Для монотонного вытягивания вихря требуется остановка вращения его формы. Но такое возможно только в том случае, если знаки у σ и γ разные. Слабые вихри с разными знаками σ и γ преимущественно вытягиваются течением в вихревые нити, в то время как в течениях наиболее живучи вихри с одинаковыми знаками σ и γ . Слабые мелкие вихри одного знака с крупным интенсивным вихрем вытягиваются в нити, а интенсивные вихри не могут неограниченно вытягиваться.

Такое поведение объясняет существование в окрестности крупных интенсивных вихрей слабых мелких вихрей противоположного знака завихренности [2, 8, 10, 12, 13].

Внутренняя (серая) зона для вихрей не стягивается к нулю при $K \rightarrow \infty$, но возникает конечная внутренняя часть серой зоны — сердцевина, для которой все вихри любой толщины при любых значениях K неминуемо вытянутся в нить, в том числе и бесконечно толстые вихри.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Отправной точкой исследования является система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая поведение эллипсоидального вихря (см. формулы 12а и 12б):

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= 2\varepsilon \cos 2\theta, \\ \dot{\theta} &= \frac{\sigma K}{2} \int_0^\infty \frac{\mu d\mu}{\sqrt{\left(\mu^2 + \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right)\mu + 1\right)^3 (K^2 + \mu)}} + \left. \begin{aligned} &+ \gamma - \frac{\varepsilon^2 + 1}{\varepsilon^2 - 1} \varepsilon \sin 2\theta \end{aligned} \right\}. \quad (16)$$

Решением данной системы является семейство интегральных кривых:

$$\begin{aligned} \sin 2\theta(\varepsilon) &= \frac{\sigma}{\varepsilon} \left(S \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1} \right) + \\ &+ \frac{\gamma \varepsilon - 1}{\sigma \varepsilon + 1} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1} \int_1^\varepsilon \frac{\varphi^2 - 1}{\varphi^2} \frac{K}{2} \times \\ &\times \int_0^\infty \frac{\mu d\mu}{\sqrt{\left(\mu^2 + \left(\varphi + \frac{1}{\varphi}\right)\mu + 1\right)^3 (K^2 + \mu)}} d\varphi, \end{aligned} \quad (17)$$

где S — константа интегрирования. Подробный анализ данного семейства интегральных кривых

показал, что при $K > 0$ и $\frac{\gamma}{\sigma} \in R$ существует шесть различных типов картин интегральных кривых, которые путем подбора параметра $\frac{\gamma}{\sigma}$ могут быть получены для любого K .

В ходе дальнейшего исследования фиксировалось значение параметра K , определялись соответствующие ему типы интегральных кривых, анализ которых позволил построить в плоскости параметров $\left(\frac{\gamma}{\sigma}, \frac{e}{\sigma}\right)$ области, соответствующие различным режимам поведения вихрей. Далее подобная процедура производилась для другого значения параметра K , когда области поведения вихрей были построены для всех интересующих

значений K , было произведено преобразование из плоскости параметров $\left(\frac{\gamma}{\sigma}, \frac{e}{\sigma}\right)$ в плоскость параметров $\left(\frac{\sigma}{e}, \frac{\gamma}{e}\right)$. Результатом такого преобразования является карта областей поведения эллипсоидальных вихрей, представленная на рисунках 1 и 2.

Источники финансирования. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ № 22-17-00267 и по теме государственного задания 0128-2021-0002.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баренблатт Г.И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеиздат, 1978. 207 с.
2. Жмур В.В. Мезомасштабные вихри океана. М.: ГЕОС, 2011. 384 с.
3. Жмур В.В., Новоселова Е.В., Белonenko Т.В. Потенциальная завихренность в океане: подходы Эртеля и Россби с оценками для Лофотенского вихря // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2021. Т. 57. № 6. С. 721–732. <https://doi.org/10.31857/S0002351521050151>
4. Жмур В.В., Новоселова Е.В., Белonenko Т.В. Особенности формирования поля плотности в мезомасштабных вихрях Лофотенской котловины. Часть 2 // Океанология. 2022. Т. 62. № 3. С. 341–356. <https://doi.org/10.31857/S0030157422030170>
5. Жмур В.В., Панкратов К.К. Динамика эллипсоидального приповерхностного вихря в неоднородном потоке // Океанология. 1989. Т. 29. № 2. С. 205–211.
6. Жмур В.В., Панкратов К.К. Дальнее взаимодействие ансамбля квазигеострофических эллипсоидальных вихрей. Гамильтонова формулировка // Известия АН СССР. 1990. Т. 26. № 9. С. 972–981.
7. Жмур В.В., Щепеткин А.Ф. Эволюция эллипсоидального вихря в стратифицированном океане в приближении f-плоскости // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 1991. Т. 27. № 5. С. 492–503.
8. Зинченко В.А., Гордеева С.М., Собко Ю.В., Белonenko Т.В. Мезомасштабные вихри Лофотенской котловины по спутниковым данным // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2019. Т. 12. № 3. С. 46–54. <https://doi.org/10.7868/S2073667319030067>
9. Чаплыгин С.А. Собрание сочинений. Т. 2. М.: Гостехиздат, 1948. 642 с.
10. Belonenko T.V., Zinchenko V.A., Fedorov A.M. et al. Interaction of the Lofoten Vortex with a satellite cyclone // Pure and Applied Geophysics. 2021. V. 178. P. 287–300. <https://doi.org/10.1007/s00024-020-02647-1>
11. Eady E.T. Long waves and cyclone waves // Tellus. 1949. V. 1 (3). P. 33–52.
12. Fedorov A.M., Belonenko T.V. Interaction of mesoscale vortices in the Lofoten Basin based on the GLORYS

- database // Russian Journal of Earth Sciences. 2020. V. 20. P. ES2002.
<https://doi.org/10.2205/2020ES000694>
13. Gordeeva S.M., Zinchenko V.A., Koldunov A.V. et al. Statistical analysis of long-lived mesoscale eddies in the Lofoten basin from satellite altimetry // *Advances in Space Research*. 2020. V. 68 (2). P. 364–377.
<https://doi.org/10.1016/j.asr.2020.05.043>
 14. Kida S. Motion of an elliptic vortex in uniform shear flow // *Journal of the Physical Society of Japan*. 1981. V. 50 (10). P. 3517–3520.
 15. Koshel K.V., Ryzhov E.A., Zhmur V.V. Ellipsoidal vortex in a nonuniform flow: dynamics and chaotic advections // *Journal of Marine Research*. 2011. № 69 (2–3). P. 435–461.
<https://doi.org/10.1357/002224011798765204>
 16. Koshel K.V., Ryzhov E.A., Zhmur V.V. Diffusion-affected passive scalar transport in an ellipsoidal vortex in a shear flow // *Nonlinear Processes in Geophysics*. 2013. V. 20 (4). P. 437–444.
<https://doi.org/10.5194/npg-20-437-2013>
 17. Koshel K.V., Ryzhov E.A., Zhmur V.V. Effect of the vertical component of diffusion on passive scalar transport in an isolated vortex model // *Physical Review E*. 2015. V. 92 (5). P. 053021.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.92.053021>
 18. Meacham S.P. Quasigeostrophical ellipsoidal vortices in stratified fluid // *Dynamics of Atmospheres and Oceans*. 1992. V. 16 (3–4). P. 189–223.
 19. Meacham S.P., Pankratov K.K., Shchepetkin A.F., Zhmur V.V. The interaction of ellipsoidal vortices with background shear flows in a stratified fluid // *Dynamics of Atmospheres and Oceans*. 1994. V. 21 (2–3). P. 167–212.
[https://doi.org/10.1016/0377-0265\(94\)90008-6](https://doi.org/10.1016/0377-0265(94)90008-6)
 20. Pankratov K.K., Zhmur V.V. A dynamics of desingularized quasigeostrophic vortices // *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*. 1991. V. 3 (5). P. 1464.
<https://doi.org/10.1063/1.857998>
 21. Zhmur V.V., Novoselova E.V., Belonenko T.V. Peculiarities of formation of the density field in mesoscale eddies of the Lofoten Basin: Part 1 // *Oceanology*. 2021. V. 61. № 6. P. 830–838.
<https://doi.org/10.1134/S0001437021060333>

Conditions for the Transformation of a Mesoscale Vortex into a Submesoscale Vortex Thread When the Vortex Elongates by an Inhomogeneous Barotropic Flow

V. V. Zhmur^{a, b, c, #}, T. V. Belonenko^c, E. V. Novoselova^c, B. P. Suetin^b

^a Shirshov Institute of Oceanology, Russian Academy of Sciences, 36 Nahimovskiy prospect, Moscow, 117997 Russia

^b Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University),
9 Institutskiy per., Dolgoprudny, Moscow Region, 141701 Russia

^c Saint Petersburg State University, 7–9 Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034 Russia

[#]e-mail: zhmur-vladimir@mail.ru

In this paper, we study the effects of strong stretching in the horizontal plane of large-scale mesoscale ocean eddies using the ellipsoidal eddies theory in the World ocean. The purpose of this work is to theoretically determine the physical conditions for unbounded stretching eddies and also check the feasibility of these conditions in the ocean. We estimate the share of mesoscale ocean eddies that are elongated into filaments and then they redistribute energy from the mesoscale to the submesoscale.

Keywords: mesoscale vortex, stretching, vortex filament, filament, ellipsoidal vortex, flow