

УДК 551.465

ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ ПРИ ГОРИЗОНТАЛЬНОМ ВЫТЯГИВАНИИ ОКЕАНСКИХ ВИХРЕЙ БАРОТРОПНЫМИ ТЕЧЕНИЯМИ

© 2023 г. В. В. Жмур¹ *, Д. А. Арутюнян²

¹Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Москва, Россия

²Московский физико-технический институт (государственный университет), Москва, Россия

*e-mail: zhmur-vladimir@mail.ru

Поступила в редакцию 22.06.2022 г.

После доработки 05.07.2022 г.

Принята к публикации 16.08.2022 г.

В работе предлагается исследование трансформации физических свойств мезомасштабных вихрей при их сильном вытягивании горизонтальными баротропными течениями. Показано, что при вытягивании ядра кинетическая и доступная потенциальная энергии вихря каждая в отдельности, а также их сумма (полная механическая энергия вихря) уменьшаются, а сам вихрь деградирует по всем физическим параметрам. Уменьшение энергии ансамбля вихрей при их вытягивании фоновым течением интерпретируется как проявление свойства обратного энергетического каскада или, в более старой терминологии, явления отрицательной вязкости.

Ключевые слова: геострофичность, агеострофичность, квазигеострофическое приближение, мезомасштабные и субмезомасштабные вихревые образования (вихревые нити, филаменты), ядро вихря, энергия ядра, доступная потенциальная энергия, число Россби, обратный энергетический каскад

DOI: 10.31857/S0030157423010185, **EDN:** AFRQNI

ВВЕДЕНИЕ

$$Ro = \frac{U}{fL}. \quad (2)$$

Задача описания океанических процессов субмезомасштаба и связь этих процессов с мезомасштабными (синоптическими) явлениями океана — одна из важных задач современной океанологии. Традиционно мезомасштабные и субмезомасштабные процессы отличаются своими горизонтальными размерами L , причем важную роль играет внутренний (бароклинный) масштаб деформации Россби

$$L_R = \frac{N^*}{f} H, \quad (1)$$

который разделяет эти явления: процессы с $L \geq L_R$ относятся к мезомасштабным, а при $L \ll L_R$ — к субмезомасштабным. Граница $L = L_R$ условная. Здесь f — параметр Кориолиса, N^* — характерное значение частоты Вайсяля-Брента, H — вертикальный размер явления, приравненный глубине бассейна. При описании как мезомасштабных, так и субмезомасштабных явлений важную роль играет число Россби — безразмерный параметр, возникающий при обезразмеривании уравнений движения и означающий отношение сил инерции к силе Кориолиса:

Здесь U — характерная горизонтальная скорость, L — характерный горизонтальный размер.

В литературе можно встретить другую запись числа Россби, в которой формально отсутствует характерный горизонтальный размер явления:

$$Ro = \frac{|\text{rot}_z \vec{u}|}{f}. \quad (3)$$

Обычно считается, что для мезомасштабных процессов характерный горизонтальный размер явления L — порядка внутреннего радиуса деформации Россби $L \sim L_R$, а также для процессов с большими масштабами $L > L_R$ число Россби мало: $Ro \ll 1$. С точностью до первой степени разложения по малому числу Россби в системе реализуется геострофический баланс.

Согласно формуле (2), при уменьшении характерного горизонтального размера L число Россби Ro возрастает, а, следовательно, геострофический баланс сил нарушается. В таком рассуждении негласно считается, что характерная горизонтальная скорость U остается прежней. Однако в реальности уменьшение L может сопровож-

даться одновременным изменением U . В этом случае запись числа Россби в форме (3) оказывается более удобной.

Цель данной работы – продемонстрировать океанические процессы, в которых первоначально мезомасштабное явление деформируется в субмезомасштабное с сохранением свойства геострофического баланса сил. Другими словами, значительное уменьшение характерного горизонтального размера оставляет в силе неравенство $Ro \ll 1$. Эта задача будет продемонстрирована на примере вытягивания вихрей неоднородным горизонтальным потоком. Сильно вытянутое в горизонтальном направлении вихревое образование часто называют вихревой нитью или филаментом (от английского filament – нить).

Одновременно будут указаны пределы справедливости квазигеострофического подхода к вихревым явлениям субмезомасштабных процессов, а также будет описана эволюция физических характеристик вытягивающихся вихрей, таких как энергия, циркуляция, стратификация вихревого ядра, относительная завихренность ядра, число Россби.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ЭЛЛИпсоИДАЛЬНЫХ ВИХРЕЙ

В работах [2, 4–6, 26–28] разработан теоретический подход к описанию поведения внутритермоклинных вихрей с эллипсоидальной формой ядра и полуэллипсоидальных приповерхностных вихрей в равновихренных баротропных потоках. Океан предполагался с постоянной частотой Вайсяля-Брента. Число Россби считается малым. В исходной постановке ядро вихря представляло собой свободно деформируемый “водяной мешок” эллипсоидальной формы, заполненный жидкостью с однородной потенциально завихренной жидких частиц σ , помещенный в океан, неподвижный на бесконечности. Предполагалась справедливость квазигеострофического приближения. В такой постановке математически задача сводилась к решению нелинейного нестационарного уравнения для давления или функции тока. Ниже исходное уравнение записано для функции тока $\Psi(x, y, z, t)$ в размерном виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\Delta_h \Psi + \frac{\partial}{\partial z} \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) + J_h \left(\Psi, \Delta_h \Psi + \frac{\partial}{\partial z} \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) = 0. \quad (4)$$

Здесь x, y – неподвижные горизонтальные оси системы координат, z – вертикальная ось. В (4)

$J_h(A, B) = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial B}{\partial x}$ – определитель Якоби (якобиан). Δ_h – оператор Лапласа по горизон-

тальным координатам x и y . Если функция тока $\Psi(x, y, z, t)$ найдена, то можно вычислить все остальные гидродинамические характеристики движения, например, поле скорости (u, v, w) :

$$u = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad (5)$$

$$w = -\frac{f_0}{N^2} \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial z} + J_h \left(\Psi, \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \right].$$

Физический смысл уравнения (4) – сохранение потенциальной завихренности σ у движущейся жидкой частицы:

$$\sigma = \Delta_h \Psi + \frac{\partial}{\partial z} \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial \Psi}{\partial z}. \quad (6)$$

Причем $\text{rot}_z \vec{u} = \Delta_h \Psi$. Вдоль траектории движения σ у частицы сохраняется. Если предположить, что океан безграничен во всех направлениях, частота Вайсяля-Брента постоянная $N = \text{const}$, на бесконечности – покой, деформируемое ядро вихря с жидкой границей представляет собой эллипсоидальный объем, заполненный жидкостью с постоянной потенциальной завихренностью частиц σ , то такая задача решается точно, несмотря на нестационарность, нелинейность самого уравнения (4) и нелинейность кинематического граничного условия на подвижной деформируемой границе вихревого ядра. Для краткости изложения мы не выписываем само граничное условие. Это изложено и развито в работах [2, 4, 26–28]. Отметим, что в данном подходе динамическое условие на границе ядра выполняется автоматически. Ниже приведено решение задачи, изложенное в этих работах:

$$\Psi(\tilde{x}, \tilde{y}, \eta, t) = -\frac{1}{4} \sigma a b \tilde{c} \int_{\lambda}^{\infty} \left(1 - \frac{\tilde{x}^2}{a^2 + \mu} - \frac{\tilde{y}^2}{b^2 + \mu} - \frac{\eta^2}{\tilde{c}^2 + \mu} \right) \times \quad (7)$$

$$\times \frac{d\mu}{\sqrt{(a^2 + \mu)(b^2 + \mu)(\tilde{c}^2 + \mu)}}.$$

Здесь a, b – горизонтальные полуоси эллипсоида, c – его вертикальная полуось, $\tilde{c} = \frac{N}{f} c$ – растянутая в $\frac{N}{f}$ раз вертикальная полуось, \tilde{x}, \tilde{y} – горизонтальные оси координат, направленные по главным осям эллипсоида, $\eta = \frac{N}{f} z$ – растянутая в $\frac{N}{f}$ раз вертикальная ось системы координат. Параметр μ в (7) и последующих формулах – переменная интегрирования. Нижний предел $\lambda(\tilde{x}, \tilde{y}, \eta)$

в интеграле (7) – положительный корень кубического уравнения

$$\frac{\tilde{x}^2}{a^2 + \lambda} + \frac{\tilde{y}^2}{b^2 + \lambda} + \frac{\eta^2}{\tilde{c}^2 + \lambda} = 1. \quad (8)$$

Для пространства внутри ядра вплоть до его границы следует положить $\lambda = 0$. В покоящемся на бесконечности океане ядро вихря вращается без деформации формы вокруг вертикальной оси. Частицы внутри ядра движутся быстрее вращения формы ядра. Детали можно найти в работах [2, 4, 28].

Если на такой океан с присутствующим в нем вихрем наложить фоновое равновихренное баротропное течение, линейное по горизонтальным координатам

$$u_b = u_0 + ex - \gamma y, \quad v_b = v_0 + \gamma x - ey, \quad (9)$$

то подход, развитый выше для покоящегося океана, можно применить и в этом случае. Параметр

$\gamma = \frac{1}{2} \text{rot}_z \vec{U}_b$ – это угловая скорость вращения фонового потока (9), где $\vec{U}_b = (u_b, v_b)$. Тензор скоростей деформации потока (9) $\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & -e \end{pmatrix}$ зависит только

от параметра e , поэтому наличие $e \neq 0$ в фоновом потоке наделяет его свойством деформировать жидкие объекты. Система горизонтальных координат (x, y) , в которой выписана скорость (9), неподвижна. Отметим, что системы координат (x, y, z) и $(\tilde{x}, \tilde{y}, z)$ различны, но имеют общую ось z .

Линейная зависимость скорости фонового течения от координат в теории эллипсоидальных вихрей принципиально важна. При повороте системы координат относительно вертикальной оси линейная зависимость типа (9) от координат сохранится, но изменятся коэффициенты при горизонтальных координатах. При любой линейной зависимости поля фонового течения от горизонтальных координат всегда можно подобрать такой поворот системы координат, чтобы в новой системе реализовалось распределение скорости (9). Фоновое течение (9) $\vec{U}_b = (u_b, v_b, 0)$ – наиболее общий вид линейного по горизонтальным координатам баротропного течения. В нем как потенциальная, так и относительная завихренность постоянна и совпадают с ротором скорости фонового течения $\text{rot}_z \vec{U}_b = 2\gamma$. Распределение скорости (9) можно представить как разложение крупномасштабного баротропного течения в ряд Тейлора в окрестности вихря и при этом ограничиться линейными по координатам слагаемыми.

В указанном потоке (9) решение (7) останется в силе, ядро вихря по-прежнему будет иметь эл-

липсоидальную форму, но параметр σ в (7) следует интерпретировать как избыточную потенциальную завихренность ядра над ее фоновым значением. Другими словами, для частиц в ядре потенциальная завихренность однородная и равна $(2\gamma + \sigma)$, для внешних к ядру жидких частиц потенциальная завихренность тоже постоянна и равна 2γ . Поведение ядра тоже претерпит изменение. Прежде всего, ядро будет двигаться со скоростью внешнего фонового течения с поступательной скоростью центра ядра $(u_0, v_0, 0)$. Далее ядро будет деформироваться фоновым течением благодаря коэффициенту деформации e в соотношении (9). Горизонтальные полуоси $a(t), b(t)$ будут меняться со временем с сохранением произведения $a(t)b(t) = \text{const}$; вертикальная полуось c и соответственно растянутая вертикальная полуось $\tilde{c} = \frac{N}{f}c$ останутся фиксированными. Вращение формы ядра тоже изменится. Детали и более подробное описание такой ситуации можно найти в работах [2, 4, 28]. В эволюции эллипсоидального ядра можно выделить три режима поведения. Два из них периодические – режим вращения ядра и режим колебания ядра. В режиме вращения длинная горизонтальная полуось ядра (пусть это будет полуось a) за период описывает полный поворот на 360 градусов. В режиме колебаний длинная полуось периодически колеблется около некоторого направления. При этом в обоих режимах происходит периодическое ограниченное изменение длин горизонтальных полуосей. В режиме колебаний ядра жидкие частицы в ядре продолжают вращаться в одну и ту же сторону, независимо от фазы колебаний формы.

Кардинально отличается поведение вихревого ядра в режиме неограниченного вытягивания. На этом режиме ядро не успевает совершить ни одного полного поворота формы ядра. Можно выделить два варианта эволюции. Первый – длинная ось $a(t)$ выстраивается вдоль течения, далее, практически не поворачиваясь относительно течения, неограниченно вытягивается. Во втором режиме ядро вначале деформируется в более компактное образование с уменьшением длинной горизонтальной оси $a(t)$ и увеличением короткой $b(t)$. Затем ядро вихря неограниченно вытягивается вдоль течения так же, как и в первом варианте. В любом случае окончательно происходит неограниченное вытягивание вихревого ядра. Но во втором варианте, прежде чем начнется вытягивание, вихрь проходит промежуточную стадию однократного формирования более компактного вихря. Режиму неограниченного вытягивания подвергаются относительно слабые по интенсивности вихревые образования, а также

вихри, уже с самого начала достаточно вытянутые в горизонтальном направлении. Необходимым, но недостаточным условием существования режима неограниченного вытягивания вихревых ядер является неравенство $|e| \geq |\gamma|$, накладываемое на параметры фонового течения [2].

Рассмотрим отдельные аспекты поведения вихря при его деформации. Во-первых, выпишем выражение для ротора скорости внутри ядра:

$$\text{rot}_z \vec{u} = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sigma}{2} ab \tilde{c} \int_0^\infty \left(\frac{1}{a^2 + \mu} + \frac{1}{b^2 + \mu} \right) \times \frac{d\mu}{\sqrt{(a^2 + \mu)(b^2 + \mu)(\tilde{c}^2 + \mu)}}. \quad (10)$$

Выражение (10) может быть записано через безразмерные параметры горизонтальной вытянутости $v = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ и вертикальной сплюснутости

$K = \frac{N}{f} \frac{c}{\sqrt{ab}}$ вихревого ядра в виде:

$$\text{rot}_z \vec{u} = \frac{\sigma}{2} K \int_0^\infty \frac{(2\tilde{\mu} + v) d\tilde{\mu}}{(\tilde{\mu}^2 + v\tilde{\mu} + 1)^{3/2} (K^2 + \tilde{\mu})^{1/2}}. \quad (11)$$

Прежде всего, обратим внимание на то, что для всего объема ядра ротор скорости одинаков. Как понятно из вышесказанного, при вытягивании вихря по горизонтали параметр K остается неизменным, а параметр v увеличивается от 2 (круглый в плане вихрь) до бесконечности (сильно вытянутый по горизонтали вихрь).

Для постоянной частоты Вайсяля-Брента выражение для потенциальной завихренности частиц примет вид

$$\text{rot}_z \vec{u} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} = \sigma. \quad (12)$$

Слагаемое $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2}$ в (12) также может быть вычислено из решения (7):

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} = \frac{\sigma}{2} K \int_0^\infty \frac{d\tilde{\mu}}{(\tilde{\mu}^2 + v\tilde{\mu} + 1)^{1/2} (K^2 + \tilde{\mu})^{3/2}}. \quad (13)$$

В результате, из очевидного свойства (13) – монотонного уменьшения $\left| \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} \right|$ до нуля с ростом v – следует монотонное увеличение $|\text{rot}_z \vec{u}|$ при тех же условиях. Однако рост $|\text{rot}_z \vec{u}|$ ограничен значением $|\sigma|$. Слагаемое $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2}$ в соотношении (12) ответ-

ственно за эффект растяжения жидких частиц по вертикали. Благодаря этому эффекту в вихревом ядре меняется частота Вайсяля-Брента. Старое постоянное фоновое значение N_0 меняется на новое постоянное значение N [30]:

$$N^2 = N_0^2 \left(1 + \frac{1}{f} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} \right). \quad (14)$$

Малая величина $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2}$ соответствует незначительному изменению частоты Вайсяля-Брента. В сильно вытянутом по горизонтали вихре следует ожидать, что параметр $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2}$ будет мал, а следовательно, в ядре частота Вайсяля-Брента должна быть близкой к фоновой. Что касается ротора скорости, то $\text{rot}_z \vec{u}$, наоборот, экстремален и близок к σ .

Выясним условия справедливости описания сильно вытянутого вихря в рамках квазигеострофического подхода. Мы полагаем, что на начальном этапе рассматриваемый вихрь считался квазигеострофическим, т.е. исходное значение

$Ro = \frac{|\text{rot}_z \vec{u}|}{f}$ было малым. Затем, по мере его вытягивания в горизонтальном направлении $|\text{rot}_z \vec{u}|$ монотонно увеличивался, и, в конечном пределе, расчетное число Россби становилось близким к $Ro = \frac{|\sigma|}{f}$. Условие малости параметра $\frac{|\sigma|}{f} \ll 1$ служит гарантией того, что квазигеострофический подход описания вихря от начального момента до сильно вытянутого состояния останется справедливым. Возможен и другой вариант. В случае, если на промежуточном этапе удлинения вихря число Россби перестанет быть малым, то с этого момента описание вихря в рамках квазигеострофического подхода перестанет быть справедливым. При этом параметр $\frac{|\sigma|}{f}$ как предельное рас-

четное значение для числа Россби может быть достаточно большим. В этом случае интервал по v или ϵ , в котором сохраняется малость числа Россби, будет ограничен сверху некоторым значением $\tilde{\epsilon}$, таким что $1 \leq \epsilon < \tilde{\epsilon}$, и применение квазигеострофического подхода оправдано только в этом интервале. Для сильно вытянутого вихря с $\epsilon > \tilde{\epsilon}$ его поведение становится агеострофическим.

Изложенный в [2, 4–6, 26–28] подход был развит в работах [21–23] для дальнейшего описания свойств эллипсоидальных вихрей.

ПОВЕДЕНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ВИХРЯ ПРИ СИЛЬНОМ ГОРИЗОНТАЛЬНОМ ВЫТЯГИВАНИИ ЯДРА

1. Поведение относительной завихренности ядра

Используя закон сохранения потенциальной завихренности (12) и соотношение (13), можно относительную завихренность $\text{rot}_z \vec{u}$ представить в более удобном для исследования виде

$$\text{rot}_z \vec{u} = \sigma \left[1 - \frac{1}{2} K \int_0^\infty \frac{d\tilde{\mu}}{(\tilde{\mu}^2 + v\tilde{\mu} + 1)^{1/2} (K^2 + \tilde{\mu})^{3/2}} \right]. \quad (15)$$

По мере вытягивания вихревого ядра параметр v неограниченно увеличивается от 2 (круглый в плане вихрь) до бесконечности. В пределе $v \rightarrow \infty$ для соотношения (15) имеем $\text{rot}_z \vec{u} = \sigma$. Интересно отметить, что в выражении для потенциально-го вихря (12) у сильно вытянутого вихря останется только ротор скорости, который и будет являться лагранжевым инвариантом. С другой стороны, в классической двумерной гидродинамике ротор скорости сам по себе является лагранжевым инвариантом. Следовательно, по мере удлинения 3D-вихря $|\text{rot}_z \vec{u}|$ нарастает до предельного значения $\text{rot}_z \vec{u} = \sigma$. Движение жидкости внутри ядра по мере его удлинения становится более плоским.

2. Скорость циркуляции на периферийной границе ядра главного сечения

Поток ротора скорости Π через главное горизонтальное сечение площадью $S = \pi ab$ определяется как

$$\begin{aligned} \Pi &= \pi ab \cdot \text{rot}_z \vec{u} = \\ &= \pi ab \frac{\sigma}{2} K \int_0^\infty \frac{(2\tilde{\mu} + v) d\tilde{\mu}}{(\tilde{\mu}^2 + v\tilde{\mu} + 1)^{3/2} (K^2 + \tilde{\mu})^{1/2}} = \\ &= S\sigma \left\{ 1 - \frac{1}{2} K \int_0^\infty \frac{d\tilde{\mu}}{(\tilde{\mu}^2 + v\tilde{\mu} + 1)^{1/2} (K^2 + \tilde{\mu})^{3/2}} \right\}, \end{aligned} \quad (16)$$

где S – сохраняющаяся при растягивании вихря площадь главного сечения S . Периметр главного сечения эллипсоида $P = 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = \sqrt{2}\pi a \sqrt{1 + \frac{1}{v^2}}$ неограниченно растет. Обозначим через u_τ среднюю тангенциальную скорость на границе главного сечения.

$$\begin{aligned} \Pi &= u_\tau P = \\ &= S\sigma \left\{ 1 - \frac{1}{2} K \int_0^\infty \frac{d\tilde{\mu}}{(\tilde{\mu}^2 + v\tilde{\mu} + 1)^{1/2} (K^2 + \tilde{\mu})^{3/2}} \right\}, \end{aligned} \quad (17)$$

откуда следует выражение для u_τ :

$$u_\tau = \sqrt{\frac{1}{2}} b \sigma \frac{1 - \frac{1}{2} K \int_0^\infty \frac{d\tilde{\mu}}{(\tilde{\mu}^2 + v\tilde{\mu} + 1)^{1/2} (K^2 + \tilde{\mu})^{3/2}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{v^2}}}, \quad (18)$$

а также предельное значение u_τ при больших v :

$$u_\tau = \sqrt{\frac{1}{2}} b \sigma. \quad (19)$$

Напомним, что горизонтальная полуось b эллипсоида является малой горизонтальной осью и при удлинении ядра формально уменьшается до нуля. Следовательно, циркуляционная скорость на периферии ядра по мере удлинения ядра спадает до нуля.

Подчеркнем интересное свойство – по мере удлинения вихря относительная завихренность ядра по модулю увеличивается, в то время как скорость циркуляции уменьшается.

3. Эволюция частоты Вайсяля-Брента

Согласно выражениям (13) и (14), по мере удлинения вихря слагаемое $\left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \right|$ монотонно уменьшается до нуля. Следовательно, частота Вайсяля-Брента N внутри вихревого ядра стремится к фоновому значению N_0 в покое. Сильно длинный вихрь слабо изменяет поле фоновой плотности. Это свойство частично обсуждено выше.

4. Эволюция энергии вихря

Собственная механическая энергия эллипсоидального вихря, включающая в себя кинетическую и доступную потенциальную энергии области как внутри вихревого ядра, так и вне его (захваченную в движение фоновую жидкость) дается соотношением [2, 4]

$$H = \frac{3}{40\pi} \rho_0 \frac{V_0^2 \sigma^2}{c} K \int_0^\infty \frac{d\tilde{\mu}}{\sqrt{(\tilde{\mu}^2 + v\tilde{\mu} + 1)(K^2 + \tilde{\mu})}}. \quad (20)$$

В указанных работах соотношение (20) предложено с другим множителем перед интегралом. В задачах работ [2, 4] множитель был неважен, что и отмечалась в тексте этих работ.

При любых деформациях вихря сохраняется объем его ядра V_0 и потенциальная завихренность частиц σ , в результате переменная часть зависит от K, v . Еще в качестве переменной в этом случае можно рассматривать вертикальный размер ядра

c и косвенно частоту Вьяйсяля-Брента N . Другая удобная форма записи энергии –

$$H = \frac{2}{15} \pi \rho_0 r_0^3 c^2 \sigma^2 \frac{N}{f} \int_0^\infty \frac{d\tilde{\mu}}{\sqrt{(\tilde{\mu}^2 + v\tilde{\mu} + 1)(K^2 + \tilde{\mu})}}. \quad (21)$$

Течения, не меняющие стратификацию $\frac{N}{f}$, не меняют также размерный блок $r_0^3 c^2$ коэффициента при интеграле; σ вообще не меняется. Поэтому переменной частью является безразмерная функция $\Phi(v, K)$:

$$\begin{aligned} \Phi(v, K) &= \frac{H}{\frac{2}{15} \pi \rho_0 r_0^3 c^2 \sigma^2 \frac{N}{f}} = \\ &= \int_0^\infty \frac{d\tilde{\mu}}{\sqrt{(\tilde{\mu}^2 + v\tilde{\mu} + 1)(K^2 + \tilde{\mu})}}. \end{aligned} \quad (22)$$

Как следует из формулы (22), функция $\Phi(v, K)$ имеет максимумы при $K = 0$ и $v = 2$.

Для $K = 0$ интеграл $\Phi(v, 0) = \int_0^\infty \frac{d\tilde{\mu}}{\sqrt{(\tilde{\mu}^2 + v\tilde{\mu} + 1)\mu}} = \int_0^\infty \frac{d\mu}{\sqrt{\mu(\varepsilon + \mu)} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \mu\right)}$ сходится. Абсолютный максимум $\Phi(v, K)_{\max} = \Phi(2, 0) = \pi$.

Интерес представляет отношение $\frac{\Phi(v, K)}{\Phi(2, K)}$ как функция двух аргументов (v, K) , показывающее, во сколько раз уменьшается безразмерная механическая энергия вихря при изменении v или, что то же самое, при изменении ε для фиксированного K . Это же отношение можно трактовать как коэффициент ослабления механической энергии вихря при его вытягивании:

$$\frac{H(\varepsilon, K)}{H(1, K)} = \frac{\Phi(v, K)}{\Phi(2, K)}. \quad (23)$$

На графике 1 представлено поведение $\frac{H(\varepsilon, K)}{H(1, K)}$ от ε при различных K . Как и следовало ожидать, рост ε приводит к уменьшению относительной энергии. Слабое изменение ε в диапазоне значения $1 < \varepsilon < 2$ для тонких вихрей $0 < K < 1$ приводит к незначительной потере энергии на 1–10%. Для толстых вихрей это изменение не превышает 1%. Сильное вытягивание вихря до 10 раз $\varepsilon = 10$ дополнительно уменьшит общую механическую энергию тонких вихрей. Потери составят величину примерно 10–15%. Толстые вихри при этих же условиях потеряют несколько процентов энергии. Интересно отметить, что при неограничен-

ном увеличении параметра K коэффициент ослабления энергии $\frac{H(\varepsilon, K)}{H(1, K)}$ как функция от ε вы-

ходит на некоторую конечную асимптотическую зависимость. Наконец, совсем сильное вытягивание тонких вихрей в сто раз $\varepsilon = 100$ приведет к потерям 35–60% энергии у тонких вихрей и 1–10% у толстых. Дальнейшее горизонтальное удлинение формально должно привести к еще большим потерям. Однако следует вспомнить, что используемое квазигеострофическое приближение справедливо для малых геометрических параметров

вихря $\frac{c}{b} \ll 1$ и малых чисел Россби. Поэтому уменьшение горизонтальной ширины вихревого ядра не может быть неограниченно малым. Примем за условную границу применимости метода $b \sim c$.

Рассмотрим мезомасштабные и субмезомасштабные явления верхнего деятельного слоя океана. Тогда в качестве характерного вертикального размера мезомасштабных и субмезомасштабных явлений разумно рассматривать толщину верхнего деятельного слоя океана c , вряд ли превышающую 200 м. Согласно нашим оценкам, допустимая полуширина вихревых нитей b для квазигеострофического подхода составляет размер порядка 2 км. Конечно, число Россби тоже должно быть малым.

Главный вывод по этой части работы состоит в том, что при удлинении вихрей они теряют энергию. Реальные потери при превращении мезомасштабного вихря в субмезомасштабное образование типа вихревой нити оцениваются по порядку величин до 0.5–0.6 от первоначальной энергии вихря.

При неизменном вертикальном размере ядра максимальная механическая энергия вихря, включающая кинетическую и доступную потенциальную энергии ядра и полную энергию захваченной во вращение внешней жидкости, соответствует круглому в плане вихрю. По мере вытягивания механическая энергия вихря убывает с ростом параметра горизонтальной вытянутости ядра ε . Падение энергии с ростом ε достаточно медленное. Так, для тонких вихрей с диапазоном $0 < K < 1$ и $\varepsilon = 10$ (вытягивание первоначально круглого в плане вихря по горизонтали в 10 раз) энергия вихря уменьшится на 5–10%, а при вытягивании в 100 раз – соответственно на 40–60%. При этом тонкие вихри в процентах теряют энергию интенсивнее, чем толстые. Максимальные потери энергии для широкого диапазона ε соответствуют значению $K \approx 0.4$. Это свойство демонстрируется на рис. 2.

На рис. 3 представлен результат расчетов максимального изменения полной энергии вихря в зависимости от параметра ε .

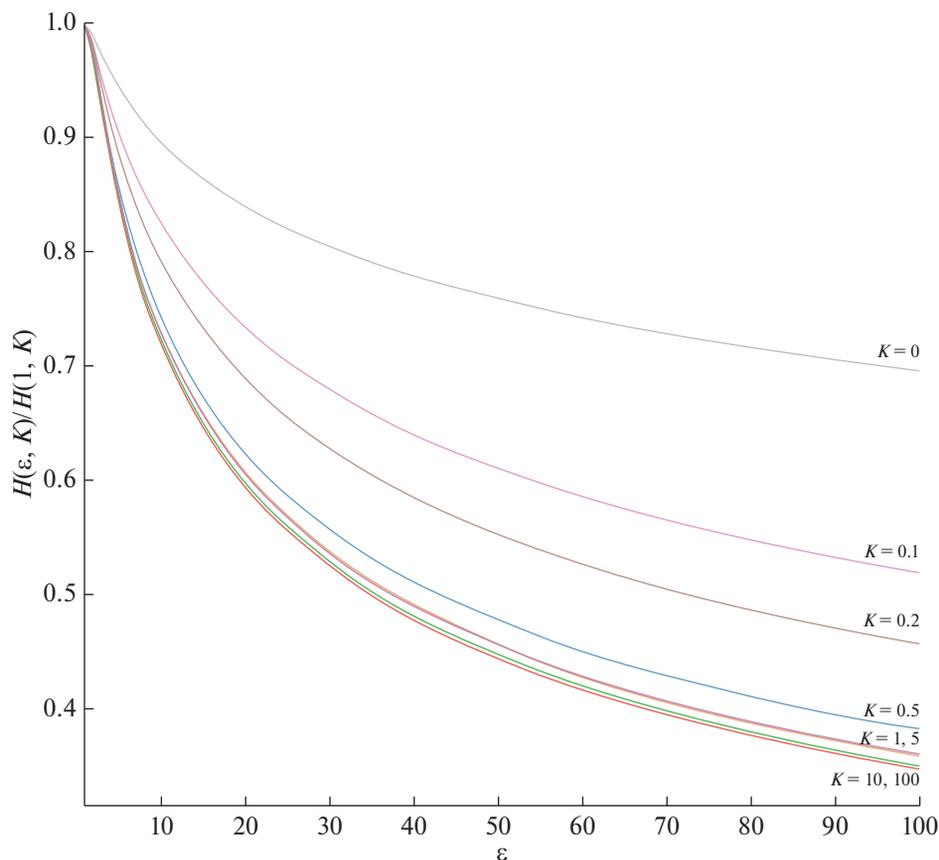


Рис. 1. Зависимость полной механической энергии вихря $H(\epsilon, K)$ от горизонтального параметра ϵ при различных вертикальных параметрах K . Энергия нормирована на значение $H(1, K)$. При любом фиксированном K энергия монотонно убывает с ростом ϵ .

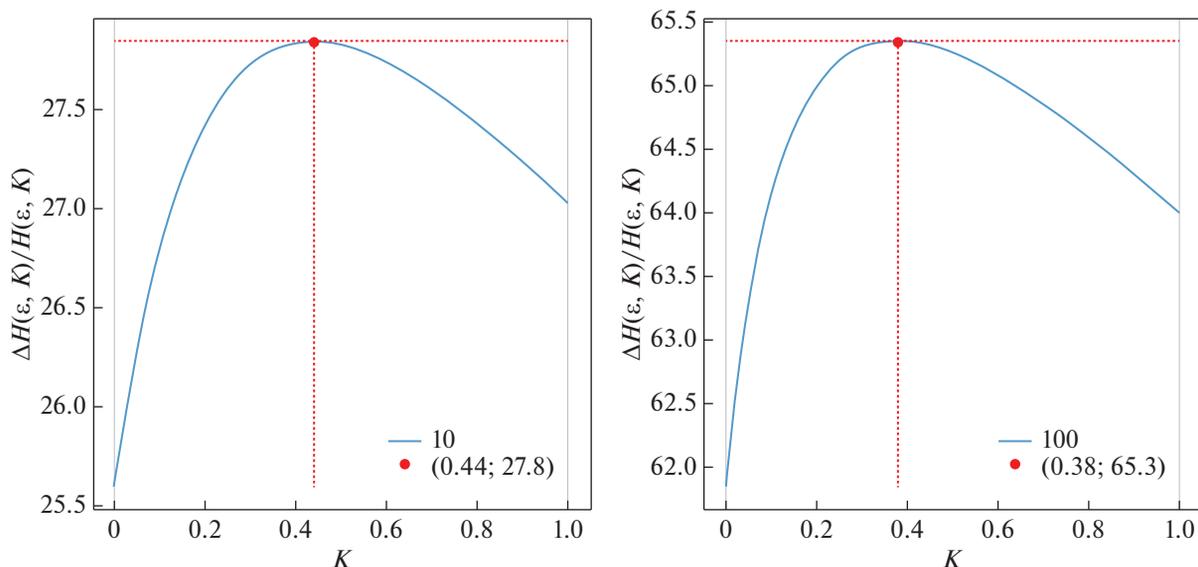


Рис. 2. Зависимость относительного изменения полной энергии от вертикального параметра K для значений $\epsilon = 10, 100$. Расчет проводился по формуле $\frac{\Delta H(\epsilon, K)}{H(1, K)} = \frac{H(1, K) - H(\epsilon, K)}{H(1, K)}$ для широкого диапазона значений ϵ и K . Приведены два примера с наиболее отличающимися положениями максимумов кривых. Максимальное изменение энергии $\frac{\Delta H(\epsilon, K)}{H(1, K)}$ соответствует тонким вихрям с параметром вертикальной сплюснутости $K \approx 0.4$.

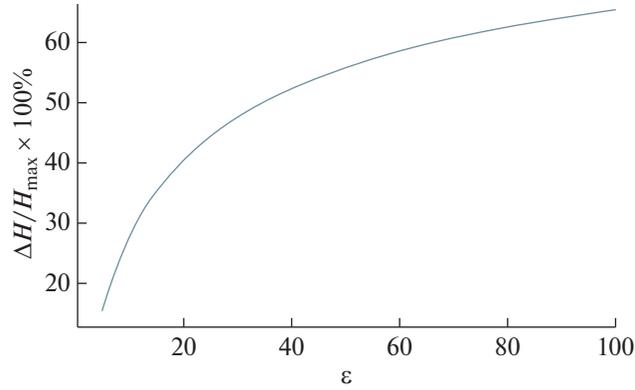


Рис. 3. Зависимость максимальной относительной потери энергии вихря от параметра горизонтальной вытянутости ядра ε . Параметр вертикальной сплюснутости $K \approx 0.4$ взят из набора расчетов для графиков 2. Из графиков следует, что основные потери энергии происходят на тонких вихрях (малых K) при сильном вытягивании вихрей.

5. Энергия вихревого ядра

Остановимся еще на одном аспекте энергии вихрей. Рассчитаем общую механическую энергию H_{core} , отдельно кинетическую H_{core}^k и доступную потенциальную энергии вихря H_{core}^p , заключенную в объеме вихревого ядра, и сравним эти виды энергии между собой, а также сравним их с общей энергией вихря H . В результате аналитических расчетов имеем соотношения:

расчетная формула для кинетическая энергия вихревого ядра –

$$H_{\text{core}}^k = \frac{1}{40} \rho_0 \sigma^2 V_0 ab K^2 \times \left\{ \varepsilon \left(\int_0^\infty \frac{1}{\varepsilon + \mu} \frac{d\mu}{\sqrt{(\varepsilon + \mu) \left(\frac{1}{\varepsilon} + \mu \right) (K^2 + \mu)}} \right)^2 + \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_0^\infty \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon} + \mu} \frac{d\mu}{\sqrt{(\varepsilon + \mu) \left(\frac{1}{\varepsilon} + \mu \right) (K^2 + \mu)}} \right)^2 \right\}, \quad (25)$$

доступная потенциальная энергия вихревого ядра –

$$H_{\text{core}}^p = \frac{1}{40} \rho_0 \sigma^2 V_0 ab K^4 \times \left(\int_0^\infty \frac{1}{K^2 + \mu} \frac{d\mu}{\sqrt{(\varepsilon + \mu) \left(\frac{1}{\varepsilon} + \mu \right) (K^2 + \mu)}} \right)^2, \quad (26)$$

механическая энергия вихревого ядра $H_{\text{core}} = H_{\text{core}}^k + H_{\text{core}}^p$ –

$$H_{\text{core}}(\varepsilon, K) = \frac{1}{40} \rho_0 \sigma^2 V_0 ab K^2 \times \left\{ \varepsilon \left(\int_0^\infty \frac{1}{\varepsilon + \mu} \frac{d\mu}{\sqrt{(\varepsilon + \mu) \left(\frac{1}{\varepsilon} + \mu \right) (K^2 + \mu)}} \right)^2 + \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_0^\infty \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon} + \mu} \frac{d\mu}{\sqrt{(\varepsilon + \mu) \left(\frac{1}{\varepsilon} + \mu \right) (K^2 + \mu)}} \right)^2 + K^2 \left(\int_0^\infty \frac{1}{K^2 + \mu} \frac{d\mu}{\sqrt{(\varepsilon + \mu) \left(\frac{1}{\varepsilon} + \mu \right) (K^2 + \mu)}} \right)^2 \right\}. \quad (27)$$

Представляет интерес определить степень уменьшения энергии ядра с удлинением вихря по горизонтали и зависимость энергии от толщины вихря по вертикали. Для этого удобно использовать отношение $\frac{H_{\text{core}}(\varepsilon, K)}{H_{\text{core}}(1, K)}$ энергии вытянутого по горизонтали ядра $H_{\text{core}}(\varepsilon, K)$ к энергии круглого в плане ядра $H_{\text{core}}(1, K)$ при одинаковом значении параметра K в числителе и знаменателе выражения:

$$\frac{H_{\text{core}}(\varepsilon, K)}{H_{\text{core}}(1, K)} = \frac{H_{\text{core}}^k(\varepsilon, K) + H_{\text{core}}^p(\varepsilon, K)}{H_{\text{core}}^k(1, K) + H_{\text{core}}^p(1, K)}. \quad (29)$$

На рис. 4 приведены результаты расчетов по формуле (29). Как и следовало ожидать, при удлинении ядра вихря энергия уменьшается. Уменьшение более значительно для толстых вихрей.

Аналогично определим долю кинетической и доступной потенциальной энергии в суммарной энергии ядра в зависимости от параметров ε и K :

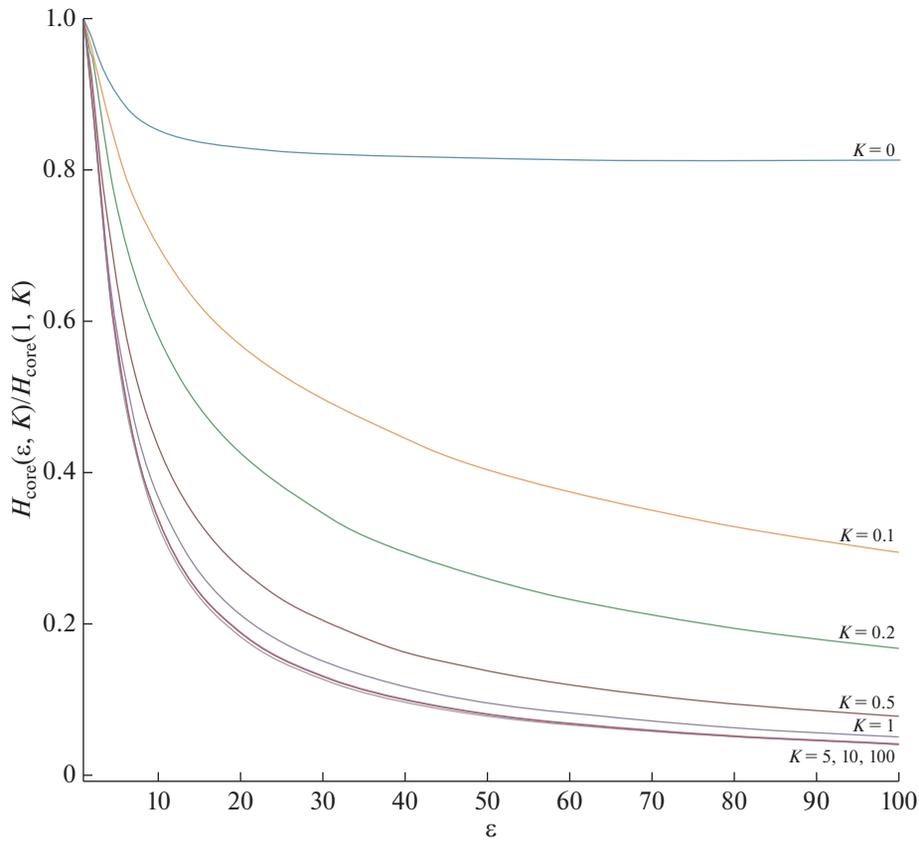


Рис. 4. Относительное уменьшение механической энергии вихревого ядра при вытягивании вихря для разных значений параметра K .

$$\begin{aligned}
 & \frac{H_{\text{core}}^k(\varepsilon, K)}{H_{\text{core}}(\varepsilon, K)} = \\
 & \frac{\varepsilon \left(\int_0^\infty \frac{d\mu}{\sqrt{(\varepsilon + \mu)^3 \left(\frac{1}{\varepsilon} + \mu\right) (K^2 + \mu)}} \right)^2 + \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_0^\infty \frac{d\mu}{\sqrt{(\varepsilon + \mu) \left(\frac{1}{\varepsilon} + \mu\right)^3 (K^2 + \mu)}} \right)^2}{\varepsilon \left(\int_0^\infty \frac{d\mu}{\sqrt{(\varepsilon + \mu)^3 \left(\frac{1}{\varepsilon} + \mu\right) (K^2 + \mu)}} \right)^2 + \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_0^\infty \frac{d\mu}{\sqrt{(\varepsilon + \mu) \left(\frac{1}{\varepsilon} + \mu\right)^3 (K^2 + \mu)}} \right)^2 + K^2 \left(\int_0^\infty \frac{d\mu}{\sqrt{(\varepsilon + \mu) \left(\frac{1}{\varepsilon} + \mu\right) (K^2 + \mu)^3}} \right)^2} \quad (30) \\
 & \frac{H_{\text{core}}^p(\varepsilon, K)}{H_{\text{core}}(\varepsilon, K)} = \\
 & \frac{K^2 \left(\int_0^\infty \frac{d\mu}{\sqrt{(\varepsilon + \mu) \left(\frac{1}{\varepsilon} + \mu\right) (K^2 + \mu)^3}} \right)^2}{\varepsilon \left(\int_0^\infty \frac{d\mu}{\sqrt{(\varepsilon + \mu)^3 \left(\frac{1}{\varepsilon} + \mu\right) (K^2 + \mu)}} \right)^2 + \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_0^\infty \frac{d\mu}{\sqrt{(\varepsilon + \mu) \left(\frac{1}{\varepsilon} + \mu\right)^3 (K^2 + \mu)}} \right)^2 + K^2 \left(\int_0^\infty \frac{d\mu}{\sqrt{(\varepsilon + \mu) \left(\frac{1}{\varepsilon} + \mu\right) (K^2 + \mu)^3}} \right)^2} \quad (31)
 \end{aligned}$$

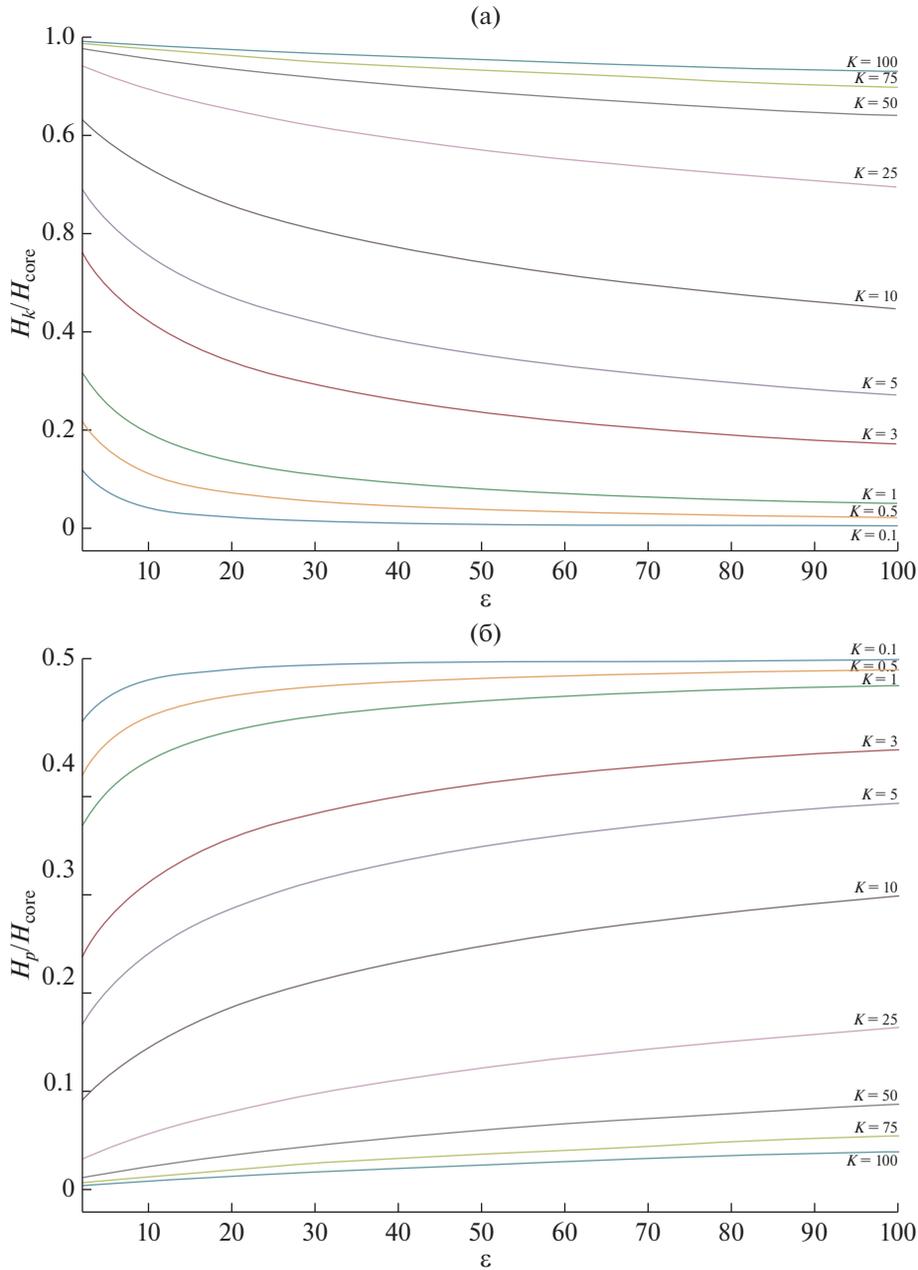


Рис. 5. Доля кинетической (а) и доступной потенциальной (б) энергии в общей механической энергии, приходящейся на объем вихревого ядра.

На рис. 5 показана доля кинетической и доступной потенциальной энергии в механической энергии ядра в зависимости от параметров ϵ и K .

Как следует из расчетов, энергия ядра вихря в основном сосредоточена в кинетической энергии. Причем, в толстых вихрях кинетическая энергия значительно превышает доступную потенциальную энергию. В тонких вихрях кинетическая энергия превышает половину общей энергии. При неограниченном вытягивании вихря до-

ли кинетической и доступной потенциальной энергий сближаются к $\frac{1}{2}$ с разных сторон.

Наконец, важным параметром энергетики вихря является доля энергии в вихревом ядре к общей механической энергии вихря $\frac{H_{\text{core}}(\epsilon, K)}{H(\epsilon, K)}$.

На рис. 6 изображена эта зависимость. Из расчетов следует, что основная часть механической энергии вихря сосредоточена вне ядра вихря. Это несколько неожиданный результат, физически

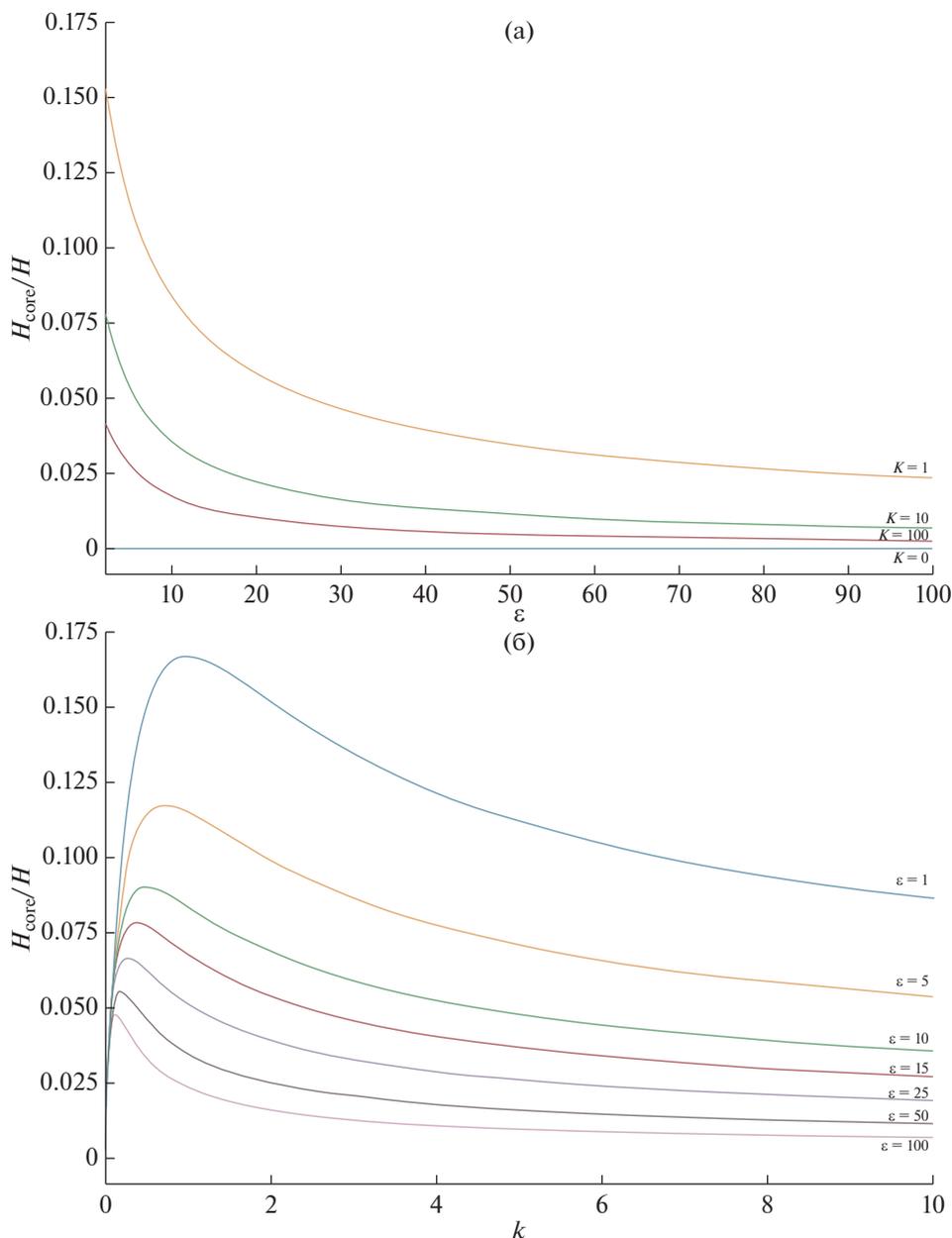


Рис. 6. Доля $\frac{H_{\text{core}}(\epsilon, K)}{H(\epsilon, K)}$ механической энергии $H_{\text{core}}(\epsilon, K)$, заключенной в ядре вихря, в общей механической энергии вихря $H(\epsilon, K)$ для широкого набора параметра вертикальной сплюснутости K в зависимости от вытянутости ядра ϵ (а) и для широкого набора параметра вытянутости ядра ϵ в зависимости от параметра вертикальной сплюснутости ядра K (б).

означающий, что ядро вихря, которое затягивает в циркуляционное движение фоновую жидкость вокруг себя и является первопричиной раскручивания большой массы воды вне ядра, сама обладает меньшей энергией, чем раскрученная им вода. Как оказалось, в лучшем случае ядро круглой в плане формы обладает примерно 0.17 долей от общей энергии вихря при параметре $K = 1$. Соотношение энергий уменьшается при вытягивании

вихря, а также при его утолщении или утончении. При вытягивании по горизонтали как плоского, так и 3D-вихря доля энергии вне ядра будет увеличиваться при общей энергетической деградации вихря в целом.

На рис. 6а изображен график зависимости $\frac{H_{\text{core}}(\epsilon, K)}{H(\epsilon, K)}$ от вертикального параметра K для различных горизонтальных параметров ϵ . Как ви-

дим, максимум отношения $\frac{H_{\text{core}}(\varepsilon, K)}{H(\varepsilon, K)}$, равный примерно 0.17, достигается при $K = 1$ для $\varepsilon = 1$. При вытягивании вихря по горизонтали доля энергии ядра в общей энергии вихря падает. То же самое отношение $\frac{H_{\text{core}}(\varepsilon, K)}{H(\varepsilon, K)}$ представлено на рис. 6б как функция от K для вихрей различной горизонтальной вытянутости. Из обоих рисунков ба и 6б следует вывод — доля механической энергии ядра мала по сравнению с общей энергией вихря и не превосходит числа 0.17. При вытягивании вихря в горизонтальной плоскости эта доля продолжает уменьшаться. Поведение расчетного отношения $\frac{H_{\text{core}}(\varepsilon, K)}{H(\varepsilon, K)}$ как функции от параметра K более сложное (рис. 6б). При фиксированном значении ε в графике $\frac{H_{\text{core}}(\varepsilon, K)}{H(\varepsilon, K)}$ от K имеется максимум, относящийся к малым значениям $K \leq 1$ и сдвигающийся с ростом ε в сторону еще более малых K . Само же максимальное значение $\frac{H_{\text{core}}(\varepsilon, K)}{H(\varepsilon, K)}$ с ростом ε также падает.

Таким образом, основная энергия вихря сосредоточена вне вихревого ядра. Это свойство несколько неожиданное и, возможно, связано с тем, что в применяемой модели f -плоскости сказалось степенное затухание скорости с расстоянием как R^{-2} . В вихревых задачах на β -плоскости следует ожидать экспоненциального затухания возмущений с расстоянием [8], что приводит к большей локализации возмущений в пространстве и как следствие — к уменьшению доли энергии вне вихревого ядра. Пока полной ясности в этом вопросе нет. Согласно нашей модели, если в природе вихрь “накачивается” энергией, то это увеличение в основном коснется внешней к ядру области — зашваченной во вращение фоновой жидкости.

6. Эволюция числа Россби

Как уже отмечалось раньше, с удлинением вихря медленно увеличивается относительная завихренность ядра вихря, что сопровождается ростом числа Россби. Мы полагаем, что на начальном этапе, например, для круглого в плане вихря, число Россби мало. Затем с удлинением ядра число Россби растет до предельного расчетного значения $Ro = \frac{|\sigma|}{f}$. Если при этом выполняется условие $\frac{|\sigma|}{f} \ll 1$, то вихрь останется квазигеострофическим на всех этапах растяжения. Если же

указанное неравенство окажется несправедливым и $\frac{|\sigma|}{f} \geq 1$, то удлиняющийся вихрь останется квазигеострофическим на конечном интервале параметра ε : $1 \leq \varepsilon < \tilde{\varepsilon}$, вне которого число Россби станет достаточно большим, а сам вихрь трансформируется в агеострофическое образование. Следует отметить (см. рис. 7), что при удлинении наиболее интенсивный рост числа Россби должен наблюдаться для тонких вихрей, поэтому наиболее интенсивные из них с $\frac{|\sigma|}{f} \geq 1$ при удлинении первыми потеряют геострофичность. Слабые тонкие вихри останутся квазигеострофическими всегда. Что касается толстых вихрей, то для них число Россби практически не растет и они, будучи квазигеострофическими вначале, останутся квазигеострофическими при вытягивании в нить. Незначительное вытягивание в 2–3 раза толстых вихрей практически не меняет значений чисел Россби. Эти свойства следуют из рис. 7.

Фактически на рис. 7 $\frac{Ro(\varepsilon, K)}{Ro(1, K)}$ — коэффициент усиления числа Россби при горизонтальном вытягивании ядра вихря из круглого в плане вихря. При сильном вытягивании $\varepsilon \rightarrow \infty$ относительное значение $\frac{Ro(\varepsilon, K)}{Ro(1, K)}$ выходит на асимптоту. Наиболее интенсивно число Россби растет при горизонтальном вытягивании тонких вихрей на начальном этапе удлинения.

Варьируя параметр ε , можно получить оценку значения $\tilde{\varepsilon}$ для вихря заданной толщины, задавая предельно допустимое значение числа Россби, например, $Ro(\tilde{\varepsilon}, K) = 0.3$ и воспользовавшись соотношением (11). Другой способ найти $\tilde{\varepsilon}$ состоит в использовании коэффициента усиления числа Россби по графикам рис. 7. Для этого нужно знать начальное число Россби для симметричного ядра $Ro(1, K)$. Затем рассчитать коэффициент усиления числа Россби $k = \frac{0.3}{Ro(1, K)}$. На рис. 7 выбрать график, соответствующий нужному значению K , и по вычисленному коэффициенту усиления k на оси абсцисс выбрать нужное значение $\tilde{\varepsilon}$.

Аналитическое исследование агеострофических вихрей с числом Россби $Ro > 1$ затруднительно ввиду того, что пока не найдены возможности физико-математического упрощения задачи, что приводит к необходимости применения численного моделирования. Изучение же таких вихрей в натуре и численных экспериментах ведется довольно интенсивно [7, 9–15, 19, 20, 24, 25, 29]. Список работ — далеко не полный.

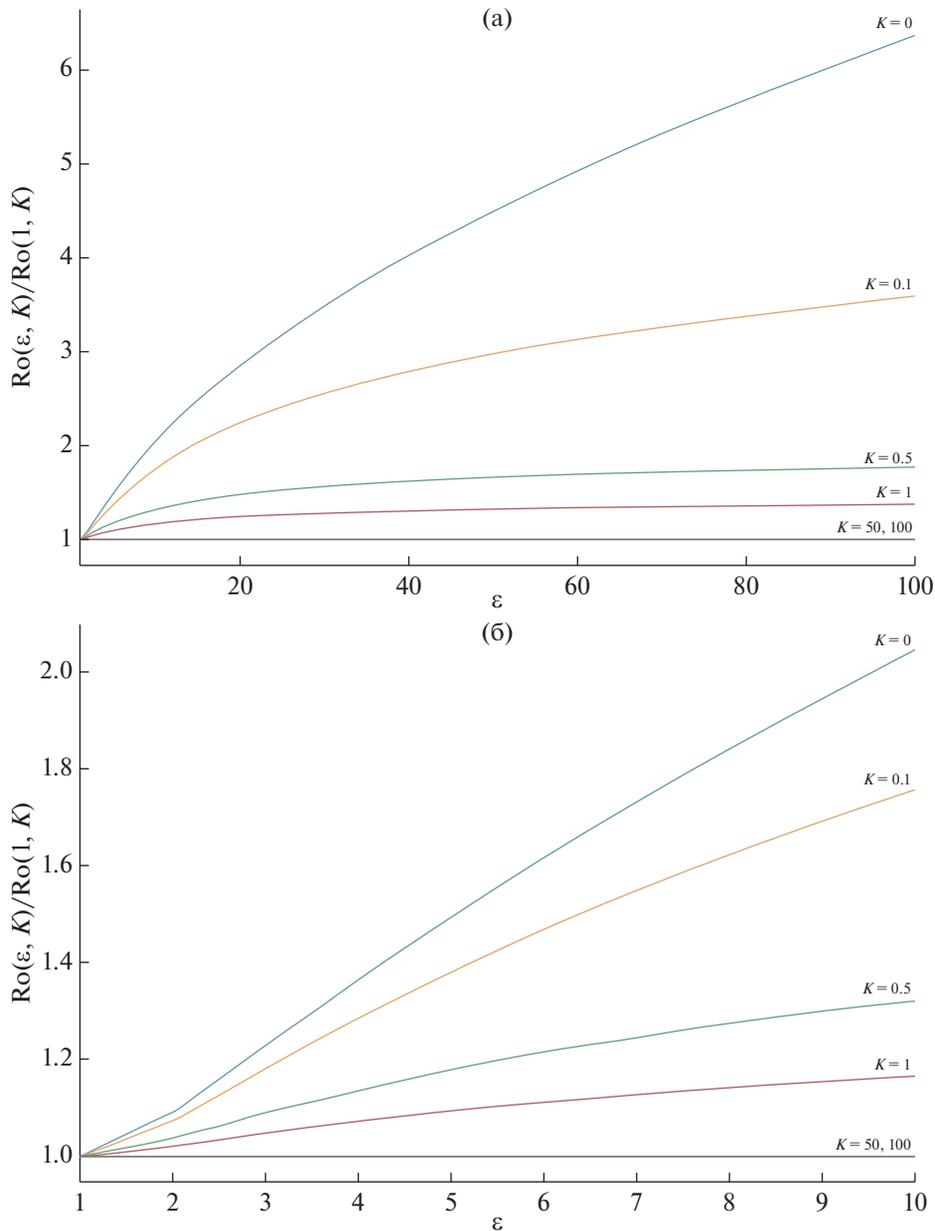


Рис. 7. (а) – расчетные значения относительного числа Россби $\frac{Ro(\epsilon, K)}{Ro(1, K)}$ в широком диапазоне параметра горизонтального удлинения ϵ ; $Ro(1, K)$ – начальное значение числа Россби для круглого в плане вихря той же толщины; (б) демонстрируется тот же эффект, но для более узкого диапазона значений $1 < \epsilon < 10$, в котором относительное число Россби $\frac{Ro(\epsilon, K)}{Ro(1, K)}$ меняется наиболее интенсивно.

7. Потенциальная завихренность Эртеля

Наряду с потенциальной завихренностью Россби σ , рассмотрим потенциальную завихренность PV Эртеля [16–18]. Следует сразу отметить, что подход Россби справедлив для малых чисел Россби $Ro \ll 1$, в то время как для PV это ограничение отсутствует. Поэтому потенциальная за-

вихренность Эртеля PV имеет большую применимость и в нашем случае ее одинаково можно использовать как для геострофических (мезомасштабных), так и для агеострофических (субмезомасштабных) процессов. Поскольку PV является лагранжевым инвариантом, то ее значение сохраняется для *частиц* как в состоянии геострофического баланса, так и в агеострофической фазе

эволюции. В работе [3] было предложено упрощенное выражение для PV , проверенное для вихрей Лофотенской котловины:

$$PV = \frac{(f + \text{rot}_z \bar{u})}{g} N^2. \quad (32)$$

Пусть на начальной стадии эволюции вихрь представлял собой геострофическое образование, подчиняющиеся уравнению (4) со всеми вытекающими свойствами. Тогда в ядре вихря эллипсоидальной формы по соотношению геометрических параметров (ε, K) можно восстановить начальное значение $(\text{rot}_z \bar{u})_0$ и частоту Вайсяля-Брента N^2 , которые являются однородными для всех внутренних жидких частиц ядра. Эти соотношения вычисляются по формулам (11), (13), (14) и (15). Конечно, нужно знать следующие характеристики вихря: потенциальную завихренность ядра по Россби σ и начальные значения геометрических параметров ε и K . В результате получим свойство – однородность значений PV для всех внутренних жидких частиц вихревого ядра. Другими словами, мы опять получили равновихренное ядро, но уже в терминах Эртеля. Следует сразу отметить, что использование характеристик потенциальной завихренности Россби в (4) и (6) приводит к огрублению самого выражения потенциальной завихренности по Эртелю (32) и, в конечном итоге, с такой же степенью точности, из сохранения PV следует сохранение σ . Подход к изучению вихря с помощью потенциальной завихренности PV более универсален, т.к. сохранение PV (32) гарантировано не только для малых значений числа Россби, но и останется в силе при произвольных Ro . Таким образом, вычислив PV на начальном этапе, когда еще был справедлив квазигеострофический подход, мы можем пользоваться этим значением PV на этапе агеострофичности вихря, когда геострофический баланс перестанет выполняться.

Рассмотрим связь потенциальных завихренностей σ и PV в подходах Россби и Эртеля соответственно. Пусть для вихревого ядра известна величина σ . Для сильно вытянутого по горизонтали вихря частота Вайсяля-Брента в ядре не отличается от ее фонового значения N_0 , а относительная завихренность ядра совпадает с σ . Поэтому для такого вихря справедливо соотношение

$$PV = \frac{(f + \sigma)}{g} N_0^2. \quad (33)$$

Поскольку PV сохраняется, то величина PV до удлинения вихря была той же. Соотношение (33) связывает потенциальные завихренности в под-

ходах Россби σ и Эртеля PV . Отсюда следует справедливость соотношения (34)

$$\frac{(f + \text{rot}_z \bar{u})}{g} N^2 = \frac{(f + \sigma)}{g} N_0^2 \quad (34)$$

при условии малости числа Россби на всех стадиях эволюции вихря. Заведомо соотношение (34) всегда останется справедливым при условии $\left| \frac{\sigma}{f} \right| \ll 1$.

Для перехода от потенциальной завихренности Эртеля к потенциальной завихренности Россби можно действовать и другим способом. Пусть PV частицы вихревого ядра известна. Для эллипсоидальных вихрей и ротор скорости, и частота Вайсяля-Брента линейно зависят от σ и сложным образом зависят от параметров ε, K (см. соотношения (13)–(15)):

$$\text{rot}_z \bar{u} = \sigma \left[1 - \frac{1}{2} K \int_0^\infty \frac{d\tilde{\mu}}{(\tilde{\mu}^2 + v\tilde{\mu} + 1)^{1/2} (K^2 + \tilde{\mu})^{3/2}} \right], \quad (35)$$

$$N^2 = N_0^2 \left(1 + \frac{\sigma}{2f} K \int_0^\infty \frac{d\tilde{\mu}}{(\tilde{\mu}^2 + v\tilde{\mu} + 1)^{1/2} (K^2 + \tilde{\mu})^{3/2}} \right). \quad (36)$$

Если считать, что ε, K могут быть также изменены экспериментально, то соотношение (32) превращается в легко решаемое квадратное уравнение относительно σ . При таком подходе нужно следить за числом Россби Ro , поскольку подход Россби справедлив только для малых значений Ro , а само выражение для σ имеет погрешность порядка числа Россби.

Проблема перехода вихря в агеострофическое состояние не может быть решена до конца в рамках (32), поскольку на одно выражение для PV приходится два неизвестных параметра вихревого ядра – относительная завихренность и частота Вайсяля-Брента. Тем не менее, соотношение может быть использовано, например, если какая-либо из характеристик измерена в натуре или оценена каким-либо независимым способом.

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ

Мы выяснили, что при вытягивании вихрей их собственная энергия падает. Вихри вытягиваются неоднородным течением, которое при этом совершает работу над вихрем. Эта работа тратится на уменьшение энергии вихрей.

Если мы рассмотрим ансамбль вихрей разных знаков, размеров и интенсивностей на фоне неоднородного баротропного течения, то поведение такого ансамбля будет качественно следующим. В первое время близко расположенные одноименные вихри сольются и образуют более крупные вихри того же знака. Разноименные близко расположенные вихри образуют диполь-

ные пары. Если интегральная потенциальная завихренность таких пар окажется равной нулю, то пары покинут территорию ансамбля. Если интегральные завихренности пар не будут скомпенсированы, то центр масс таких пар будет двигаться по большой окружности, периодически уходя и возвращаясь в зону ансамбля. Остальные вихри будут взаимодействовать между собой более или менее активно. Более активное взаимодействие сведется к вытягиванию слабых вихрей сильными. Все это будет сопровождаться вытягивающим воздействием течения на каждый вихрь и ансамбль в целом. В результате после начального периода слияния близких одноименных вихрей естественно ожидать следующую картину. Часть достаточно сильных вихрей выживет в течении и будет эволюционировать без значительного вытягивания, т.е. останутся локализованными образованиями. Их эволюция в основном сведется к перемещению вихрей течением и к взаимодействию вихрей между собой. Остальные относительно слабые вихри или не слабые, первоначально достаточно вытянутые, будут продолжать вытягиваться течением или другими вихрями. Собственная энергия выживших вихрей в среднем меняться не будет, а энергия вытягивающихся вихрей будет уменьшаться. Суммарно энергия ансамбля будет уменьшаться за счет уменьшения энергии вытягивающихся вихрей. Если подойти к этой задаче с позиций теории турбулентности, где вихри будут играть роль элементов турбулентности, то в такой системе суммарная энергия турбулентности со временем будет теряться. Эти потери будут возвращаться в среднее течение, поскольку в нашей умозрительной модели есть только течение и турбулентность и больше ничего. Такое физическое поведение ансамбля первоначально мезомасштабных вихрей на фоне течения приводит к свойству обратного энергетического каскада, т.е. перераспределению энергии с малых масштабов на большие. Первоначально это явление называлось явление отрицательной вязкости.

Общая картина эволюции ансамбля квазигеострофических вихрей на фоне крупномасштабного течения – следующая. Течение в результате в основном бароклинной неустойчивости само порождает мезомасштабные вихри, часть вихрей выживает в течении, часть вытягивается течением и трансформируется в субмезомасштабные вихревые образования (вихревые нити, филаменты). Вытягивающиеся элементы теряют энергию. За счет потери энергии вытягивающихся вихрей и возвращения энергии назад в течение возникает явление обратного энергетического каскада или, по более старой терминологии, явление отрицательной вязкости.

Интересно отметить, что после вытягивания в 10–100 раз энергия новых образований, рожденных из тонких вихрей, не исчезла, а уменьшилась

на 20–60%, и перешла на другие, более мелкие масштабы – на субмезомасштаб. Т.е. указанный нами эффект приводит к перераспределению энергии с мезомасштабов на субмезомасштаб. По сравнению с классической теорией турбулентности, энергия с масштаба на масштаб передается с потерями. Слово “потери” в данном случае означает, что частично энергия возвращается в крупномасштабные течения, остальная часть энергии перераспределяется на субмезомасштаб. Еще следует обратить внимание на то, что появилось выделенное направление вытягивания вихрей, по-видимому, означающее, что нарушилась изотропность пространства. Гипотеза локальной изотропности турбулентности тоже, возможно, нарушается. Отсюда возникает возможность нарушения пространственного спектра $-5/3$ на пятнах Мирового океана, где эволюция вихревых образований допускает неограниченное вытягивание вихрей. На больших же размерах, где интегрально теряется выделенность направлений, закон $-5/3$ должен работать.

Как уже отмечалось, неограниченное вытягивание вихрей происходит не во всяких неоднородных течениях, а только в течениях с ярко выраженными деформационными свойствами, необходимым условием которых является неравенство на коэффициенты e и γ фонового течения: $|e| \geq |\gamma|$. В случае невыполнения указанного неравенства вытягивание вихрей в нить запрещено. Выполнение указанного неравенства для неограниченного вытягивания вихрей потребует дополнительных условий на интенсивность вихрей, их начальную вытянутость и угол ориентации. В любом случае для ансамбля вихрей с фоновым течением, где выполняется неравенство $|e| \geq |\gamma|$, следует ожидать, что по крайней мере часть вихрей будет подвержена неограниченному вытягиванию, и тогда все указанные выше свойства, в том числе и явление отрицательной вязкости, будут иметь место. Таким образом, все выводы, привязанные к неограниченному вытягиванию вихрей и указанные в работе, справедливы лишь в районах Мирового океана, где выполняется неравенство $|e| \geq |\gamma|$. Устойчивость положения, изменчивость и само распределение таких пятен в Мировом океане не изучено. Однако, если рассматривать районы с большим количеством пятен со свойством $|e| \geq |\gamma|$, например, отдельные океаны или весь Мировой океан в целом, то следует ожидать, что выделенные направления в пятнах окажутся случайно разбросаны и в среднем идея выделенности какого-то направления на больших территориях окажется несостоятельной. Все это говорит о том, что в каких-то случаях следует ожидать отклонений от закона $-5/3$. В монографии Г.С. Галицына [1] приводятся многие физические процессы природы, где закон $-5/3$

справедлив. Относительно океана автор отмечает, что указанный закон справедлив на одних горизонтальных размерах и нарушается на других. Возможная причина этого нарушения – потеря изотропности, связанная с выделенным направлением вытягивания вихрей. Автор [1] указывает горизонтальный размер 200 км, на котором нарушается закон $-5/3$. Возможно, это и есть характерный размер зон с условием $|e| \geq |\gamma|$. Здесь пока много неопределенности. Однако мы надеемся, что в нашей работе мы предложили возможную причину нарушения закона $-5/3$.

ВЫВОДЫ

По мере вытягивания ядра вихря баротропным потоком геометрические параметры вихря меняются следующим образом. Вертикальный размер вихря сохраняется. Одна горизонтальная ось a неограниченно увеличивается, а вторая b уменьшается до нуля, с сохранением произведения ab . В результате ядро становится похожим на длинную “ленту”, вытянутую по горизонтали с конечным размером по вертикали, равным исходному вертикальному размеру ядра вихря. Сверху такая “лента” похожа на вихревую нить или филамент.

В сильно вытянутом ядре ротор скорости (относительная завихренность) принимает экстремальное значение, совпадающее с потенциальной завихренностью частиц ядра по Россби. В результате вытягивания вихрей поле относительной завихренности становится более контрастным, что дает возможность изучать поведение вихревых нитей в поле ротора скорости.

В вихревом ядре максимальная скорость наблюдается на периферии главного горизонтального сечения вихря. По мере вытягивания эта скорость уменьшается до нуля. В этом смысле сильно вытянутый вихрь теряет вихревые свойства и переносится внешним течением практически как пассивная примесь.

Вытягивание вихрей приводит к перераспределению энергии с мезомасштаба на субмезомасштаб с потерей энергии. Теряющаяся часть энергии возвращается в течение, что служит причиной возникновения явления обратного энергетического каскада или, по старой терминологии, – явления отрицательной вязкости. Это свойство сильнее проявляется при деформации тонких вихревых образований. Толстые вихри при вытягивании теряют энергию слабо. Сейчас нет полной ясности относительно размеров и формы указанных пятен, а также их в распределении в Мировом океане. Вытягивание вихрей течениями может служить причиной отклонения от закона $-5/3$ в пространственном энергетическом спектре.

Источник финансирования. Работа поддержана грантом РФФ 22-17-00264 и частично в рамках госзадания № 0128-2021-0002.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голицын Г.С.* Вероятностные структуры макромира: землетрясения, ураганы, наводнения. М.: Физматлит, 2021. 176 с.
2. *Жмур В.В.* Мезомасштабные вихри океана. М.: ГЕОС, 2011. 384 с.
3. *Жмур В.В., Новоселова Е.В., Белоненко Т.В.* Потенциальная завихренность в океане: подходы Эртеля и Россби с оценками для Лофотенского вихря // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2021. Т. 57. № 6. С. 721–732.
4. *Жмур В.В., Панкратов К.К.* Динамика эллипсоидального приповерхностного вихря в неоднородном потоке // Океанология. 1989. Т. 29. № 2. С. 205–211.
5. *Жмур В.В., Панкратов К.К.* Дальнее взаимодействие ансамбля квазигеострофических эллипсоидальных вихрей. Гамильтонова формулировка // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1990. Т. 26. № 9. С. 972–981.
6. *Жмур В.В., Щенеткин А.Ф.* Эволюция эллипсоидального вихря в стратифицированном океане в приближении f -плоскости // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1991. Т. 27. № 5. С. 492–503.
7. *Зацепин А.Г., Баранов В.И., Кондрашов А.А. и др.* Субмезомасштабные вихри на кавказском шельфе Черного моря и порождающие их механизмы // Океанология. 2011. Т. 51. № 4. С. 592–605.
8. *Ларичев В.Д., Резник Г.М.* Сильнонелинейный двумерный солитон волн Россби // Океанология. 1976. Т. 16. № 6. С. 961–967.
9. *Bower A.S., Hendry R.M., Amrhein D.E., Lilly J.M.* Direct observations of formation and propagation of subpolar eddies into the Subtropical North Atlantic // Deep-Sea Research II. 2013. V. 85. P. 15–41. <https://doi.org/10.1016/j.dsr2.2012.07.029>
10. *Brannigan L.* Intense submesoscale upwelling in anticyclonic eddies // Geophys. Res. Lett. 2016. V. 43. № 7. P. 3360–3369. <https://doi.org/10.1002/2016GL067926>
11. *Brannigan L., Marshall D.P., Naveira-Garabato A. et al.* Submesoscale instabilities in mesoscale eddies // Journal of Physical Oceanography. 2017. V. 47. № 12. P. 3061–3085. <https://doi.org/10.1175/JPO-D-16-0178.1>
12. *Capet X., McWilliams J.C., Molemaker M.J., Shchepetkin A.F.* Mesoscale to submesoscale. Transition in the California current system. Part I: flow structure, eddy flux, and observational tests // Journal of Physical Oceanography. 2008. V. 38. № 1. P. 29–43. <https://doi.org/10.1175/2007JPO3671.1>
13. *Capet X., McWilliams J.C., Molemaker M.J., Shchepetkin A.F.* Mesoscale to submesoscale transition in the California current system. Part II: frontal processes // Journal of Physical Oceanography. 2008. V. 38. № 1.

- P. 44–46.
<https://doi.org/10.1175/2007JPO3672.1>
14. *Capet X., McWilliams J.C., Molemaker M.J., Shchepetkin A.F.* Mesoscale to submesoscale transition in the California current system. Part III: energy and balance flux // *Journal of Physical Oceanography*. 2008. V. 38. № 10. P. 2256–2269.
<https://doi.org/10.1175/2008JPO3810.1>
 15. *de Marez C., Carton X., Corréard S. et al.* Observations of a deep submesoscale cyclonic vortex in the Arabian Sea // *Geophys. Res. Lett.* 2020. V. 47. № 13, e2020GL087881 (10 p.).
<https://doi.org/10.1029/2020GL087881>
 16. *Ertel H.* Ein neuer hydrodynamischer Erhaltungssatz. *Die Naturwissenschaften*. 1942. V. 36. P. 543–544.
 17. *Ertel H.* Über hydrodynamischer Wirbelsätze. *Physikalische Zeitschrift Leipzig*. 1942. V. 43. P. 526–529.
 18. *Ertel H.* Ein neuer hydrodynamischer Wirbelsatz. *Meteorologische Zeitschrift*. 1942. V. 59. P. 277–281.
 19. *Gula J., Blacic T.M., Todd R.E.* Submesoscale coherent vortices in the Gulf Stream // *Geophys. Res. Lett.* 2019. V. 46. № 5. P. 2704–2714.
<https://doi.org/10.1029/2019GL081919>
 20. *Klein P., Lapeyre G.* The oceanic vertical pump induced by mesoscale and submesoscale turbulence // *Annu. Rev. Mar. Sci.* 2009. V. 1. № 1. P. 351–357.
<https://doi.org/10.1146/annurev.marine.010908.163704>
 21. *Koshel K.V., Ryzhov E.A., Zhmur V.V.* Ellipsoidal vortex in a nonuniform flow: dynamics and chaotic advections // *J. Mar. Res.* 2011. V. 69. № 2–3. P. 435–461.
 22. *Koshel K.V., Ryzhov E.A., Zhmur V.V.* Diffusion – affected passive scalar transport in an ellipsoidal vortex in a shear flow // *Nonlinear Processes in Geophysics*. 2013. V. 20. P. 437–444.
<https://doi.org/10.5194/npg-20-437-2013>
 23. *Koshel K.V., Ryzhov E.A., Zhmur V.V.* Effect of the vertical component of diffusion on passive scalar transport in an isolated vortex model // *Phys. Rev.* 2015. V. 92. № 5. 053021.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.92.053021>
 24. *Mahadevan A., Tandon A.* An analysis of mechanisms for submesoscale vertical motion at fronts // *Ocean Modelling*. 2006. V. 14. № 3. P. 241–256.
<https://doi.org/10.1016/j.ocemod.2006.05.006>
 25. *McKiver W.J.* Balanced ellipsoidal vortex at finite Rossby number // *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*. 2020. V. 114. № 4–5. P. 1–26.
<https://doi.org/10.1080/03091929.2020.1755671>
 26. *Meacham S.P.* Quasigeostrophic, ellipsoidal vortices in a stratified fluid // *Dynamics of Atmospheres and Oceans*. 1992. V. 16. № 3–4, P. 189–223.
 27. *Meacham S.P., Pankratov K.K., Shchepetkin A.F., Zhmur V.V.* The interaction of ellipsoidal vortices with background shear flows in a stratified fluid // *Dynamics of Atmospheres and Oceans*. 1994. V. 21. № 2–3. P. 167–212.
[https://doi.org/10.1016/0377-0265\(94\)90008-6](https://doi.org/10.1016/0377-0265(94)90008-6)
 28. *Pankratov K.K., Zhmur V.V.* A dynamics of desingularized quasigeostrophic vortices // *Phys. Fluids A*. 1991. V. 3. P. 1464.
 29. *Roulet G., Klein P.* Cyclone–anticyclone asymmetry in geophysical turbulence // *Phys. Rev.* 2010. V. 104. № 21. 218501.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.104.218501>
 30. *Zhmur V.V., Novoselova E.V., Belonenko T.V.* Peculiarities of Formation the of Density Field in Mesoscale Eddies of the Lofoten Basin: Part 1 // *Oceanology*. 2021. V. 61. № 6. P. 830–838.

Redistribution of Energy during Horizontal Stretching of Ocean Vortices by Barotropic Currents

V. V. Zhmur^{a, #}, D. A. Harutyunyan^b

^a*P.P. Shirshov Institute of Oceanology, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

^b*Moscow Institute of Physics and Technology (State University), Moscow, Russia*

[#]*e-mail: zhmur-vladimir@mail.ru*

The paper proposes a study of the transformation of the physical properties of mesoscale vortices during their strong elongation by horizontal barotropic currents. It is shown that when the core is pulled out, the kinetic and available potential energies of the vortex individually, as well as their sum (the total mechanical energy of the vortex) decreases, and the vortex itself degrades in all physical parameters. The decrease in the energy of the ensemble of vortices when they are pulled out by the background flow is interpreted as a manifestation of the reverse energy cascade property or, in older terminology, the phenomenon of negative viscosity.

Keywords: geostrophy, ageostrophy, quasi-geostrophic approximation, mesoscale and submesoscale vortex formations (vortex filaments, filaments), vortex core, core energy, available potential energy, Rossby number, inverse energy cascade