ОКЕАНОЛОГИЯ, 2024, том 64, № 3, с. 385–395

ФИЗИКА МОРЯ

УДК 551.5:532.5

ПОДОБИЕ КВАЗИГЕОСТРОФИЧЕСКИХ ВИХРЕЙ НА ФОНЕ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ С ВЕРТИКАЛЬНЫМ СДВИГОМ И ТЕЧЕНИЙ ОБЩЕГО ВИДА С БАРОТРОПНОЙ И БАРОКЛИННОЙ СОСТАВЛЯЮЩИМИ

© 2024 г. В. В. Жмур*

Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, г. Москва

** zhmur-vladimir@mail.ru*

Поступила в редакцию 21.08.23 г.
После доработки 02.10.2023 г.
Принята к публикации 16.11. 2023 г.

Данная статья является продолжением и обобщением работы автора [6]. Рассмотрена аналогичная постановка задачи, но для других видов фоновых течений. В квазигеострофическом описании для малых чисел Россби излагается задача об эволюции объема жидкости произвольной формы с однородной потенциальной завихренностью всех частиц вихревого ядра в равнозавихренном фоновом потоке – горизонтальном течении с вертикальным сдвигом и равнозавихренном течении с баротротропной и бароклинной составляющими. В конечном итоге проблема сводится к интегро-дифференциальному уравнению для эволюции границы вихревого ядра. Исследование этого уравнения в безразмерной форме позволяет найти набор безразмерных параметров, определяющих условие подобия изучаемых вихрей.

Ключевые слова: вихрь, вихревое ядро, фоновое течение, баротропное и бароклинное течения, потенциальная завихренность, относительная завихренность, безразмерное число подобия, геометрическое подобие

DOI: 10.31857/S0030157424030019, **EDN:** QCOLIQ

ВВЕДЕНИЕ

При лабораторном или численном исследовании мезомасштабных вихрей, вихревой изменчивости и т. д. естественно требовать, чтобы изучаемые вихревые образования были бы подобны их природным аналогам. То есть и в лабораторных или численных экспериментах похожим образом вели себя со своими морскими аналогами. При этом сами течения тоже должны быть подобными. В данной работе предлагается простая теория подобия вихрей на течениях. В статье [6] уже изложена аналогичная задача для частного случая фоновых течений – равнозавихренных баротропных потоков и однородных по потенциальной завихренности вихрей с произвольной начальной формой ядра. В данной работе, являющейся естественным продолжением [6], изучается влияние на такие вихревые образования горизонтальных течений с вертикальным сдвигом и общего случая фоновых потоков, имеющих как баротропную, так и бароклинную составляющие.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Следуя работе [6], рассмотрим поведение квазигеострофических вихрей в фоновом течении. Постановочная часть задачи такая же, как и в указанной статье. Отличие будет именно в фоновом течении. Поэтому на постановочном уровне наша работа практически повторяет задачу [6]. В качестве фонового течения в нынешней статье выберем прямолинейное горизонтальное течение с вертикальным сдвигом (простейшая разновидность бароклинного течения), а также равнозавихренное течение общего вида с баротропной и бароклинной составляющими. Напомним, что в вышеупомянутой статье [6] фоновым течением являлся баротропный поток.

В квазигеострофическом приближении при малых числах Россби $\mathrm{Ro} = \dfrac{U}{fL} \ll 1$ (U – характерная скорость изучаемого процесса, L – характерный горизонтальный размер f – параметр Кориолиса) систему уравнений геофизической гидродинамики удается свести к уравнению для давления p, где p — превышение давления над гидростатическим давлением покоя. Именно этим давлением объясняется движение среды. Давление p с точностью до множителя связано с функцией тока $\psi = \frac{1}{\rho_0 f}$, где $\rho_0 = \text{const}$ — средняя по глубине плотность воды. Уравнения для давления и функции тока практически совпадают. Выпишем размерное уравнение для функции тока в квазигеострофическом приближении:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta_h\psi + \frac{\partial}{\partial z}\frac{f^2}{N^2}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) + \\ + J_h\left(\psi, \Delta_h\psi + \frac{\partial}{\partial z}\frac{f^2}{N^2}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = 0. \tag{1}$$

Здесь x, y — неподвижные горизонтальные оси системы координат, z — вертикальная ось, $J_h(A,B) = \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial B}{\partial x}$ — определитель Якоби (якобиан), $\Delta_h = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа по горизонтальным координатам. Если функция тока $\psi(x,y,z,t)$ найдена, то можно вычислить все остальные гидродинамические характеристики движения, например, поле скорости (u, v, w):

$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial y},\ v = \frac{\partial\psi}{\partial x}, \\ w = -\frac{f_0}{N^2}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial z} + J_h\left(\psi, \frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right]. \tag{2}$$

При этом уравнение (1) учитывает только геострофическую часть горизонтального движения, о чем свидетельствуют первые два соотношения (2). Негеострофическая компонента скорости в этой постановке мала — порядка O(Ro) и из приближения (1) получена быть не может.

Уравнение (1) утверждает, что величина

$$\sigma = \Delta_h\psi + \frac{\partial}{\partial z}\frac{f^2}{N^2}\frac{\partial\psi}{\partial z} \tag{3}$$

с той же точностью порядка является лагранжевым инвариантом и переносится вместе с движущейся жидкой частицей. Так же, как и в [6], рассмотрим простейшую модель вихря. Представим, что вихрь состоит из вихревого ядра и внешней жидкости, захваченной во вращательное движение вихревым ядром. Вихревое ядро представляет собой водяной мешок с жидкой свободно деформируемой границей, внутри которой содержится вода с потенциальной завихренностью σ_{in}, отличающейся от потенциальной завихренности σ_{out} внешней фоновой жидкости. Для простоты обе величины σ_{in} и σ_{out} будем считать постоянными, равно как и частоту Вяйсяля—Брента. Обозначим $\sigma = \sigma_{in} - \sigma_{out}$ перепад потенциальной завихренности между ядром вихря и фоновой жидкостью.

Закон (3) позволяет выписать распределение потенциальной завихренности в пространстве в виде простого соотношения

$$\Delta\psi = \begin{cases}\sigma_{in}, \text{если } (x,y,\tilde{z}) \in V \\ \sigma_{out}, \text{если } (x,y,\tilde{z}) \notin V\end{cases}. \tag{4}$$

Здесь $\tilde{z} = \frac{N}{f}z$ — растянутая в $\frac{N}{f}$ раз вертикальная ось системы координат, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{z}^2}$ — объемный оператор Лапласа в пространстве $(x,y,\tilde{z})$, V — деформируемая область пространства, которую занимает вихревое ядро и эволюцию которой следует определить в процессе решения в “растянутом” пространстве $(x,y,\tilde{z})$. При отсутствии вихря во всем пространстве наблюдается однородное распределение потенциальной завихренности:

$$\Delta\psi = \sigma_{out}. \tag{5}$$

Отметим, что оператор Лапласа по горизонтальным координатам $\Delta_h = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ учитывает только вертикальную компоненту ротора скорости $\Delta_h\psi = \text{rot}_z\vec{u}$ от горизонтальных течений. В случае горизонтального течения с вертикальным сдвигом

$$\vec{u} = (\Gamma z,\, 0\,,\, 0), \tag{6}$$

где ось x направлена по вектору течения, ротор скорости имеет только горизонтальную компоненту. Соответствующая течению (6) функция тока остается линейной по z, поэтому при $\frac{N}{f} = \text{const}$ оператор $\frac{\partial}{\partial z}\frac{f^2}{N^2}\frac{\partial\psi}{\partial z}$ тоже не дает вклада в потенциальную завихренность (3). В результате получаем $\sigma_{out} = 0$. Выбором бароклинного течения (6) данная работа отличается от работы [6], в которой изучалось воздействие на вихри баротропных потоков.

Аналогично течению (6), в заключительной части работы будут обобщены результаты по изучению подобия вихрей в равнозавихренных течениях общего вида — суперпозиции течения (6) и равнозавихренного баротропного потока:

$$\vec{u} = \left(\Gamma_x z + ex - \gamma y, \Gamma_y z + \gamma x - ey, 0\right), \qquad (6a)$$

где (x, y, z) – "удобная" по горизонтальным составляющим система координат с определяющими параметрами, $\gamma = \frac{1}{2}\mathrm{rot}_z \vec{u}_f$ – угловая скорость вращения жидких частиц в фоновом течении, e – коэффициент деформации фонового течения. В плоском варианте такая система координат была использована в работе [18] для описания эволюции вихрей Кирхгофа в плоских равнозавихренных потоках. Если обозначить φ как угол между направлением течения со сдвигом и положительным направлением оси x выбранной системы координат (x, y, z), то параметры Γ_x и Γ_y выразятся через сдвиг Γ: $\Gamma_x = \Gamma\cos\varphi$, $\Gamma_y = \Gamma\sin\varphi$. Таким образом, течение общего вида (6а) описывается в рамках четырех определяющих параметров (e, γ, Γ, φ), первые три из которых (e, γ, Γ) имеют одинаковую размерность $с^{-1}$, а последний φ – безразмерный.

Подробно рассмотрим течение (6) как фоновое течение. При наличии вихря возмущение ψ_v функции тока течения, связанное с вихрем, подчиняется уравнению

$$\Delta\psi_v = \begin{cases} \sigma, \text{если } (x, y, \tilde{z}) \in V \\ 0, \text{если } (x, y, \tilde{z}) \notin V \end{cases}. \qquad (7)$$

Здесь для краткости записи введено $\sigma = \sigma_{in}$.

Интересно отметить, что, несмотря на нелинейность исходного уравнения (1) в эйлеровой постановке, его интерпретация в полулагранжевом варианте в виде закона сохранения потенциальной завихренности у движущихся частиц (4) оказывается линейной. Это позволяет рассматривать суперпозицию фонового течения (6) и взаимодействующего с этим течением вихря (7) как решение исходного уравнения. С физической точки зрения это возможно из-за того, что функция тока с точностью до постоянного множителя совпадает с давлением, а при суперпозиции двух течений общее давление является суммой их индивидуальных давлений.

Уравнение (7) с точностью до обозначений совпадает с задачей определения гравитационного потенциала [16] однородного по плотности тела формы. Задача (7) решается в общем случае для любой формы ядра V в пространстве $(x, y, \tilde{z})$ [5, 13, 16]:

$$\psi_v(x, y, \tilde{z}, t) = -\frac{\sigma}{4\pi}\iiint_V \frac{dx'dy'd\tilde{z}'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (\tilde{z}-\tilde{z}')^2}}. \qquad (8)$$

В том числе, соотношение (8) остается справедливым и при меняющейся во времени форме ядра. Поэтому параметрическая зависимость $\psi_v(x, y, \tilde{z}, t)$ от времени t скрыта именно в переменной форме ядра.

Пользуясь функцией тока ψ_v, согласно (2), можно найти поле геострофических компонент течения:

$$u_v(x, y, \tilde{z}, t) = -\frac{\sigma}{4\pi}\iiint_V \frac{(y-y')dx'dy'd\tilde{z}'}{\left[\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (\tilde{z}-\tilde{z}')^2}\right]^3}, \qquad (8а)$$

$$v_v(x, y, \tilde{z}, t) = -\frac{\sigma}{4\pi}\iiint_V \frac{(x-x')dx'dy'd\tilde{z}'}{\left[\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (\tilde{z}-\tilde{z}')^2}\right]^3}. \qquad (8б)$$

В соотношения (8), (8а), (8б) явным образом входит размерный параметр σ и неявным образом – размеры области интегрирования. Обозначим a, b – горизонтальные размеры области V и $\tilde{c}$ – ее вертикальный размер. Таким образом, в (8), (8а), (8б) содержатся четыре размерных параметра. Уточним, что задача (7) поставлена в "растянутом" в $\frac{N}{f}$ раз по вертикали пространстве, поэтому вертикальный размер области интегрирования c в физическом пространстве и "растянутом" пространстве связаны равенством $\tilde{c} = \frac{N}{f}c$.

Согласно математическим свойствам решения (8) уравнения (7), соотношение (8) непрерывно вместе с первыми пространственными производными [16]. Это, в свою очередь, означает, что поле давления вместе с полем геострофических течений тоже непрерывно. Непрерывность поля давления автоматически удовлетворяет динамическому условию на поверхности вихревого ядра, где существует разрыв потенциальной завихренности между ядром вихря и окружающей внешней жидкостью. Отметим, что на этом этапе кинематическое условие на той же поверхности еще не выполнено.

Запишем уравнение границы ядра как функцию пространственных координат и времени $F(x,y,z,t)=0$. В кинематическом условии на поверхности вихревого ядра

$$\frac{\partial F}{\partial t}+u\frac{\partial F}{\partial x}+v\frac{\partial F}{\partial y}+w\frac{\partial F}{\partial z}=0 \qquad (9)$$

не все слагаемые равноправные. Слагаемое $w\dfrac{\partial F}{\partial z}$ для наших задач составляет величину порядка $\mathrm{O(Ro)}$ от слагаемых $u\dfrac{\partial F}{\partial x}$ и (или) $v\dfrac{\partial F}{\partial y}$. Пользуясь соображениями о непревышении точности выше, чем $\mathrm{O(Ro)}$, отбросим в точном уравнении (9) малое слагаемое $w\dfrac{\partial F}{\partial z}$. В результате в нашем квазигеострофическом приближении кинематическое условие с точностью $\mathrm{O(Ro)}$ (равно как и точность основного уравнения (1)) примет вид

$$\frac{\partial F}{\partial t}+u\frac{\partial F}{\partial x}+v\frac{\partial F}{\partial y}=0. \qquad (10)$$

Тот факт, что в кинематическое условие в форме (10) не входит вертикальная скорость, имеет свои последствия. Поскольку (9) и (10) совпадают при $w\equiv 0$, это означает, что трансформация ядра вихря по вертикали связана исключительно с горизонтальными движениями. Отсюда получаем два эффекта: первое, ядро объемного вихря “зажато” между двумя неподвижными горизонтальными плоскостями, т. е. вертикальный размер ядра не меняется (с точностью до $\mathrm{O(Ro)}$); второе, площадь горизонтального сечения ядра при его деформации течением (6) на любом горизонтальном уровне сохраняется в той же точности.

Перейдя в подвижную систему координат с началом в центре масс ядра вихря, движущуюся со скоростью (u_0,v_0), получим интегро-дифференциальное уравнение эволюции границы $F(x,y,z,t)=0$ вихря (7), приспособленное под цели описания деформации вихревого ядра:

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\left(\Gamma z+u_v\right)\frac{\partial F}{\partial x}+u_v\frac{\partial F}{\partial y}=0. \qquad (11)$$

Задача о поведении равнозавихренного вихревого ядра в бароклинном потоке свелась к задаче об эволюции его ядра. Решение (11) в любой момент времени t полностью определяет форму ядра вихря $F(x, y, z, t) = 0$ и позволяет с помощью соотношений (7)–(8) найти все остальные характеристики вихря. Уравнение (11) описывает все эффекты, которые могут произойти с вихрем на течении, а также без течения, если убрать из (11) член Γz. К эволюции вихря относится описание устойчивости или неустойчивости, при небольшой модификации взаимодействие вихрей и их возможное слияние и т. д. Однако аналитическое исследование интегро-дифференциального уравнения (11) затруднительно. А вот обезразмеривание и построение на его основе теории подобия возможно (см., например, работы [1, 2, 15]). Это и является предметом исследования в данной работе.

В соотношение (11) входят следующие размерные определяющие параметры: присутствующие явным образом Γ, σ (с размерностью c^{-1}) и неявным образом a, b, $\tilde{c}$ (с размерностью метр). Из этих пяти размерных параметром можно составить три независимых безразмерных параметра: $\dfrac{\Gamma}{\sigma}$ – отношение сдвига скорости фонового течения к величине потенциальной завихренности вихревого ядра, отношение горизонтальных размеров $\dfrac{a}{b}$ и отношение вертикального размера $\tilde{c}$ к характерному горизонтальному размеру L. Характерный горизонтальный размер L связан с горизонтальными размерами вихревого ядра a, b и будет выбран позже.

На этом этапе статьи уместно обсудить геометрические свойствах математически подобных фигур применительно к форме вихревого ядра. Прежде всего, понятно, что геометрически подобными следует считать фигуры, отличающиеся друг от друга только различным масштабированием. При этом внешние размеры ядер – горизонтальные a, b и вертикальный $\tilde{c}$ у двух подобных вихрей связаны условиями подобия: безразмерные параметры $\dfrac{a}{b}$ и $\dfrac{\tilde{c}}{a}$ (или $\dfrac{\tilde{c}}{b}$) одного вихря должны совпадать с аналогичными параметрами другого вихря. Это условие обязательно, но строго для геометрического подобия фигур недостаточное. Например, возьмем две фигуры с одинаковыми внешними размерами a, b, $\tilde{c}$. У одной из них изменим форму, не затрагивая внешних размеров. В результате условия равенства безразмерных параметров подобия $\dfrac{a}{b}$ и $\dfrac{\tilde{c}}{a}$ выполнятся, но фигуры с математической точки зрения подобными не будут. Поэтому, строго говоря, условия совпадения соответствующих параметров $\dfrac{a}{b}$

и $\dfrac{\tilde{c}}{a}$ двух вихрей не являются математическим признаком геометрического подобия. Однако если упомянутое условие не выполнено, то две фигуры точно не являются подобными. С другой стороны, в лабораторном эксперименте трудно создать начальный вихрь сложной формы. Обычно это осесимметричные вихри с двумя размерами — горизонтальным и вертикальным. Для таких вихрей указанный способ вполне соответствует физическим требованиям и очень прост в использовании. Поэтому строгое понятие геометрического подобия, которое формулируется на уровне слов, мы из практических соображений заменим на более легкие и простые в математической формулировке соотношения равенства безразмерных параметров $\dfrac{a}{b}$ и $\dfrac{\tilde{c}}{a}$ или их аналогов.

К геометрическим условиям подобия также следует отнести начальную ориентацию вихря относительно фонового течения. Это условие, понятное на словах, математически выражается в виде одинаковых начальных условий в безразмерном виде. Наконец, должно быть освещено и подобие самих фоновых течений. Для баротропного случая это излагалось в работе [6]. В настоящей статье, в силу специфики выбранного фонового потока в виде прямолинейного горизонтального течения с вертикальным сдвигом, эта проблема отпадает сама собой — все такие течения подобны. Тем не менее все условия подобия следует исследовать в безразмерной постановке задачи, что и будет сделано.

ОБЕЗРАЗМЕРИВАНИЕ

Перейдя к дифференцированию по безразмерному времени $\tau = \sigma t$ и безразмерным координатам $\bar{x} = x/L$, $\bar{y} = y/L$, $\bar{\tilde{z}} = \tilde{z}/L$, а также к интегрированию в выражения скоростей (u_v, v_v) (8а), (8б) по тем же безразмерным переменным $\bar{x}, \bar{y}, \bar{\tilde{z}}$ выпишем уравнение (11) в безразмерном виде

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} + \left(\frac{\Gamma}{\sigma}\bar{\tilde{z}} + \bar{u}_v\right)\frac{\partial F}{\partial \bar{x}} + \bar{v}_v \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} = 0, \tag{12}$$

$$\bar{u}_v = \frac{1}{4\pi}\iiint_{V'} \frac{(\bar{y} - \bar{y}')\, d\bar{x}' d\bar{y}' d\bar{\tilde{z}}'}{\left[\sqrt{(\bar{x} - \bar{x}')^2 + (\bar{y} - \bar{y}')^2 + (\bar{\tilde{z}} - \bar{\tilde{z}}')^2}\right]^3}, \tag{12a}$$

$$\bar{v}_v = \frac{1}{4\pi}\iiint_{V'} \frac{(\bar{x} - \bar{x}')\, dx' dy' d\tilde{z}'}{\left[\sqrt{(\bar{x} - \bar{x}')^2 + (\bar{y} - \bar{y}')^2 + (\bar{\tilde{z}} - \bar{\tilde{z}}')^2}\right]^3}. \tag{12$б$}$$

Само уравнение границы $F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\tilde{z}}, \tau) = 0$ можно сразу считать безразмерным. В полученное безразмерное интегро-дифференциальное уравнение (12) входит явным образом безразмерный параметр $\dfrac{\Gamma}{\sigma}$ и неявно уравнение зависит от формы границы вихря, т. е. от дополнительных геометрических характеристик. Если формы двух вихрей геометрически подобны, то для них обязаны совпадать числа $\dfrac{a}{b}$ и $\dfrac{\tilde{c}}{L}$. С другой стороны, совпадение для вихрей двух безразмерных чисел $\dfrac{a}{b}$ и $\dfrac{\tilde{c}}{L}$ еще не означает их геометрическое подобие. Они могут отличаться в тонкостях, оставаясь подобными при грубом рассмотрении.

Если два вихря геометрически подобны (в строгом математическом смысле) в начальный момент времени, т. е. для каждого из них соответствующие параметры $\dfrac{\Gamma}{\sigma}$, $\dfrac{a}{b}$ и $\dfrac{\tilde{c}}{L}$ совпадают, то интегро-дифференциальные уравнения, описывающие эволюцию каждого из них вместе с равноценными начальными условиями, окажутся тождественно одинаковыми. Следовательно, поведение вихрей во времени и пространстве будет тоже подобным. Последние два числа $\dfrac{a}{b}$ и $\dfrac{\tilde{c}}{L}$ связаны с геометрическим подобием вихрей. Кроме условий на размеры, здесь следует отметить еще одно условие геометрического подобия — положение вихрей относительно фонового течения тоже должно быть одинаковым в начальный момент времени. Обычно ориентация твердого тела в пространстве описывается тремя углами — либо углами Эйлера, либо углами Кардана. Для жидкого деформируемого тела произвольной формы этот подход непродуктивен, хотя бы из тех соображений, что выбор сопутствующей системы координат для деформирующегося тела сложной формы неоднозначен и не несет каких-то важных физических причин. Поэтому условие одинаковой ориентированности ядра вихря в течении мы отнесем к начальным условиям задачи и далее это условие мы обсуждать не будем. Тем не менее в более простых ситуациях, например, при изучении деформации эллипсоидальных вихрей, где выбор сопутствующей системы координат, связанной с вихрем, очевиден, вопрос об эволюции углов ориентации правомочен и имеет сам по себе самостоятельное значение [13, 23].

Итак, нами показано, что параметры подобия поведения квазигеострофических вихрей в горизонтальных фоновых течениях с вертикальным сдвигом — это безразмерное число $\frac{\Gamma}{\sigma}$ и геометрическое подобие границ вихревых ядер в виде чисел $\frac{a}{b}$ и $\frac{\tilde{c}}{L}$ в начальный момент времени, включая начальную ориентацию ядер вихрей по отношению к фоновому течению. В таком общем подходе геометрическое подобие выглядит несколько незавершенным, поскольку в исходное уравнение сохранения потенциального вихря (1) в безразмерном виде входит число Бургера, которое на этом этапе рассуждений в выводах подобия отсутствует. Естественно предположить, что число Бургера каким-то образом неявно фигурирует в условиях геометрического подобия.

В общем случае выпуклое овальное 3D-ядро имеет три размера — два горизонтальных a и b (для определенности $a > b$) и один вертикальный: в физическом пространстве (x, y, z) этот размер обозначим как c, а в “растянутом” по вертикали пространстве $(x, y, \tilde{z})$, в котором выписано исследуемое уравнение (11), этот же размер будет $\tilde{c} = \frac{N}{f}c$. Из трех размерных параметров a, b и $\tilde{c}$ можно скомпоновать два безразмерных параметра: отношение горизонтальных размеров (параметр горизонтальной вытянутости)

$$\varepsilon = \frac{a}{b} \tag{13}$$

и отношение вертикального размера к характерному горизонтальному размеру $L = \sqrt{ab}$

$$K = \frac{\tilde{c}}{\sqrt{ab}}. \tag{14}$$

Характерный горизонтальный размер в форме $L = \sqrt{ab}$ нами выбран из соображений удобства, поскольку в частном случае эллипсоидального ядра для описания безразмерной вертикальной характеристики ядра из теории автоматически следует соотношение (14) [12]. В (13) и (14) a и b горизонтальные полуоси, а $\tilde{c}$ вертикальная полуось эллипсоида в растянутом пространстве. В исходной работе [12] параметр K трактовался как параметр вертикальной сплюснутости. Интересно отметить, что параметр K одновременно является и числом Бургера. Действительно, если ввести в рассмотрение радиус деформации Россби $L_R = \frac{N}{f}c$ и характерный горизонтальный размер ядра $L = \sqrt{ab}$, то $K = \frac{\tilde{c}}{\sqrt{ab}} = \frac{L_R}{L}$, что полностью соответствует определения числа Бургера Bu. Поскольку исследования в нашей системе координат должны стыковаться с аналогичными исследованиями для эллипсоидальных вихрей и с их удобными наклоненными системами координат, то более правильно параметр K называть числом Бургера.

Итак, в основном уравнении (12) определились следующие безразмерные числа подобия: $\frac{\Gamma}{\sigma}$, ε, K. Первый из них $\frac{\Gamma}{\sigma}$ характеризует относительную интенсивность вертикального сдвига скорости фонового течения по отношению к потенциальной завихренности ядра (мощности вихря). Параметры ε, K описывают геометрическое подобие вихревых ядер. За кадром осталось условие одинаковой ориентированности вихря по отношению к фоновому течению, которое входит в одинаковые начальные условия задачи. Интересно отметить, что параметр подобия для фоновых течений не возник в процессе исследования. Это означает, что рассматриваемые фоновые течения самоподобны.

В частном случае осесимметричных вихрей на начальный момент времени (вихрей, близких по геометрии к круглым в плане вихрям с радиусом R) параметр $\varepsilon = 1$ фиксирован и выпадает из набора чисел подобия, при этом $K = \mathrm{Bu} = \frac{N}{f}\frac{\tilde{c}}{R}$. В результате остаются два числа подобия $\frac{\Gamma}{\sigma}$ и K.

Неограниченное увеличение параметра K равносильно переходу от 3-бароклинных вихрей к плоскому случаю вихревых движений. При этом параметр K также выбывает из общего набора чисел подобия. Оставшиеся числа подобия $\frac{\Gamma}{\sigma}$, ε описывают вихри больших по числу K вертикальных размеров. И хотя само число K выпало из набора интересующих нас параметров, условие, что K должно быть большим, никуда не делось. Если же в этих условиях больших K изучать эволюцию первоначально осесимметричных вихрей, то остается только один параметр подобия $\frac{\Gamma}{\sigma}$.

Итак, при изучении эволюции бароклинных вихрей в горизонтальных течениях с вертикальным сдвигом выявлен набор из трех параметров $\frac{\Gamma}{\sigma}$, ε, K, определяющих подобие рассматриваемых явлений. Для первоначально осесимметричных вихрей их останется два – $\frac{\Gamma}{\sigma}$, K. Наконец, важен случай поведения первоначально баротропных вихрей (захватывающих всю водную толщу, или для $K \to \infty$) в тех же течениях. Здесь параметр K выпадает из рассмотрения. Оставшиеся $\frac{\Gamma}{\sigma}$, ε являются параметрами подобия для вихрей более сложной формы, чем осесимметричный вихрь, и параметр $\frac{\Gamma}{\sigma}$ – для первоначально осесимметричных вихрей в тех же ограничениях на $K \to \infty$.

Задача о поведении вихря с ядром эллипсоидальной формы в равнозавихренных течениях решается точно в рамках квазигеострофического подхода уравнения (1) с учетом кинематического и динамического условий на границе ядра [5, 12, 13, 22, 23]. В общем случае это произвольно ориентированные в пространстве вихри на фоне равнозавихренных течений. Однако сразу следует ограничить условия применимости этих задач к условиям Земли. Дело в том, что из-за больших горизонтальных размеров такие вихри не могут иметь большой угол наклона. При больших углах наклона их периферийные части рискуют “высунуться” из океана. Поэтому два главных направления осей эллипсоида должны быть почти горизонтальными (назовем их условно горизонтальными), а последняя ось должна быть почти вертикальной (назовем ее условно вертикальной). Решения задачи для функции в сопутствующей системе координат – следующие:

$$\psi(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, t) = -\frac{1}{4}\sigma ab\tilde{c}\int_{\lambda}^{\infty}\left(1 - \frac{\tilde{x}^2}{a^2+\mu} - \frac{\tilde{y}^2}{b^2+\mu} - \frac{\tilde{z}^2}{\tilde{c}^2+\mu}\right)\frac{d\mu}{\sqrt{\left(a^2+\mu\right)\left(b^2+\mu\right)\left(\tilde{c}^2+\mu\right)}}. \tag{15}$$

Здесь $\tilde{x}, \tilde{y}$ – условно горизонтальные оси координат, направленные по главным осям эллипсоида, $\tilde{z} = \frac{N}{f}z$ – растянутая в $\frac{N}{f}$ раз условно вертикальная ось системы координат. a, b – условно горизонтальные полуоси эллипсоида, c – его условно вертикальная полуось, $\tilde{c} = \frac{N}{f}c$ – растянутая в $\frac{N}{f}$ раз условно вертикальная полуось. В данном соотношении (15) параметр σ – превышение потенциальной завихренности вихревого ядра над потенциальной завихренностью фона (сохраняющаяся величина). В общем случае полуоси a, b, c могут зависеть от времени. Главные направления эллипсоида со временем также могут изменяться, поэтому сопутствующая система координат $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ может поворачиваться, а форма вихревого ядра в этой системе координат может также меняться, оставаясь эллипсоидом.

Нижний предел $\lambda(\tilde{x}, \tilde{y}, \eta)$ в интеграле (15) – положительный корень кубического уравнения

$$\frac{\tilde{x}^2}{a^2+\lambda} + \frac{\tilde{y}^2}{b^2+\lambda} + \frac{\tilde{z}^2}{\tilde{c}^2+\lambda} = 1 \tag{16}$$

также может эволюционировать со временем из-за поворота сопутствующей системы координат относительно осей неподвижной исходной системы координат, в которой выписано решение (15). Для пространства внутри ядра вплоть до его границы следует положить $\lambda = 0$. В покоящемся на бесконечности океане ядро вихря вращается без деформации формы вокруг вертикальной оси. Частицы внутри ядра движутся быстрее вращения формы ядра. Детали можно найти в работах [5, 25, 12, 22, 23, 18].

Для эллипсоидального вихря в фоновом потоке (6) были выписаны уравнения для эволюции полуосей a, b, $\tilde{c}$ и трех углов ориентации эллипсоида в пространстве. Это громоздкие уравнения, которые для краткости мы здесь не приводим, а воспользуемся выводами и анализом этих работ. В частности, в работе [13] рассматривалась упрощенная постановка задачи о поведении эллипсоидальных вихрей в потоках, аналогичных (6), при первоначально малых углах наклона главного сечения эллипсоида с горизонтальной плоскостью. Одним из интересных выводов был вывод о том, что в рассмотренных вариантах параметров вихря с выбранными начальными условиями качественно поведение всех вихрей сводилось к следующему. С точки зрения эволюции длин полуосей эллипсоидального вихревого ядра и ориентации в пространстве в общем случае на начальном этапе вихрь вел себя квазипериодически по своим размерам и довольно сложным образом по ориентации. Затем вращение формы ядра прекращалось, и далее вихрь монотонно и неограниченно вытягивался вдоль течения, одновременно становился тоньше по вертикали и практически не менялся в горизонтальном перпендикулярном течению направлении. В результате вихрь вытягивался в структуру, похожую на ленту, ориентированную практически горизонтально вдоль течения с очень маленькой вертикальной толщиной. Этот процесс похож на формирование тонкой по вертикали структуры ленточной формы. Одновременно процесс образования из вихря тонкой структуры фактически связан с уничтожением вихря течением. Дело в том, что при построении теории пренебрегли рядом физических эффектов. В теории отсутствует вязкость, диффузия, которые значительны при больших градиентах свойств. А именно это явление и должно сопровождать вытягивание вихрей. Сильно вытянутый вихрь теряет вихревые свойства и становится тонкой структурой. При этом, конечно, сохранялись объем ядра, площадь сечения на любом горизонтальном уровне. Верхняя и нижняя точки ядра скользили по двум фиксированным горизонтальным поверхностям. Такое поведение оказалось гораздо сложнее движения твердого недеформируемого эллипсоидального тела.

В указанных работах численно определялось и время наступления процесса вытягивания T, которое трактовалось как время жизни вихря. Следует ожидать, что при каких-то условиях вытягивание не наступает. Границы различного поведения вихрей не исследовались. Однако авторы для выбранного начального значения параметра K и параметра вытянутости $\varepsilon \geqslant 1$ вблизи практически круглых в плане вихрей показали, что по истечении некоторого времени вихри неограниченно вытягиваются. При этом обнаружена связь безразмерного времени жизни вихря σT и параметра $\frac{\Gamma}{\sigma}$ в виде степенного соотношения

$$\sigma T = C\left(\frac{\Gamma}{\sigma}\right)\delta. \qquad (17)$$

Для начальных параметров $\varepsilon = 1.5$ и $K = 0.25$ определены значения $C = 4.5$ и $\delta = 2.52$. Согласно нашим соображениям, для других начальных условий следует ожидать, что указанные величины будут являться функциями ε и K: $C = C(\varepsilon, K)$ и $\delta = \delta(\varepsilon, K)$. Задача их определения здесь не изучается и будет рассмотрена в отдельной работе. Также возможен вариант поведения вихрей, когда вытягивание вообще не наступает. Это свойство, оставшееся за кадром в работе [13], тоже требует самостоятельного исследования и здесь не освещается.

Обнаруженное в работе [13] явление трансформации эллипсоидальных вихрей в тонкую ленточную структуру под действием горизонтальных течений с вертикальным сдвигом, по-видимому, может быть ожидаемым и для вихрей овальной формы, а также для вихрей с более сложной формой ядра. Мы надеемся, что критерии наступления режима вытягивания, а также времена жизни вихрей в этом случае качественно будут соответствовать получаемым соотношениям для эллипсоидальных вихрей.

Различного рода обобщения, приложения теории эллипсоидальных вихрей к реальному океану и вопросы, касающиеся деталей поведения вихрей как в теоретическом, лабораторном, так и в практическом экспедиционном аспектах развивались в достаточно большом наборе задач [3–5, 7, 8–11, 13, 14, 17, 19–25]. Список далеко не полный.

ОБОБЩЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ НА СЛУЧАЙ РАВНОЗАВИХРЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ С БАРОТРОПНОЙ И БАРОКЛИННОЙ СОСТАВЛЯЮЩИМИ

Интересно сравнить условия подобия вихрей на баротропных и бароклинном течениях типа. Как следует из работы [6], подобие квазигеострофических вихрей в баротропных течениях в общем случае описывается четырьмя безразмерными параметрами $\left(\frac{\sigma}{e}; \frac{\gamma}{e}; \varepsilon; K\right)$. Напомним, что здесь $\gamma = \frac{1}{2}\mathrm{rot}_z \vec{u}_f$ – угловая скорость вращения жидких части в фоновом течении, e – коэффициент деформации фонового течения. В результате из-за того, что баротропное течение описывается двумя параметрами одинаковой размерности (м$^{-1}$) и такой же размерности – потенциальная завихренность ядра σ, из трех размерных параметров γ, e и σ можно составить две независимых безразмерных комбинации $\left(\frac{\sigma}{e}; \frac{\gamma}{e}\right)$, в то время как для вихря в бароклинном течении данной статьи возникает только одна комбинация $\frac{\Gamma}{\sigma}$.

Остальные безразмерные числа ε и K в двух постановках совпадают. В результате для описания вихрей на баротропных течениях требуется на один больше безразмерных параметров, чем для аналогичных вихрей в бароклинном потоке (6).

Если же усложнить задачу, рассмотрев поведение вихря в горизонтальном потоке общего типа – с баротропной и бароклинной составляющими (6а), то количество размерных определяющих параметров, описывающих течение, увеличится до трех – γ, e и Γ. Такую же размерность имеет потенциальная завихренность ядра σ. В результате из набора четырех одинаково размерных чисел можно составить три независимых безразмерных параметра, например $\left(\frac{\sigma}{e};\frac{\gamma}{e};\frac{\gamma}{\Gamma}\right)$. Добавив к ним два безразмерных геометрических параметра ядра ε и K, получим набор из пяти безразмерных чисел $\left(\frac{\sigma}{e};\frac{\gamma}{e};\frac{\gamma}{\Gamma};\varepsilon;K\right)$, описывающих подобие вихрей на течениях общего вида. Кроме того, "удобная" система координат, в которой наиболее просто изучать воздействие баротропных течений на вихри, и система координат для бароклинного течения (6) в нашей ситуации могут оказаться повернутыми вокруг вертикальной оси на некоторый угол φ (безразмерная величина). В результате этот угол должен быть добавлен к вышеупомянутому набору $\left(\frac{\sigma}{e};\frac{\gamma}{e};\frac{\gamma}{\Gamma};\varepsilon;K;\varphi\right)$ чисел подобия. Это максимально возможный набор чисел подобия. Следует сразу отметить, что если рассматривать задачу построения теории подобия в рамках исходного уравнения (1) с начальными условиями на форму вихревого ядра, то в безразмерной формулировке условие на угол φ выполняется автоматически. Поэтому реальными условиями подобия останется набор $\left(\frac{\sigma}{e};\frac{\gamma}{e};\frac{\gamma}{\Gamma};\varepsilon;K\right)$ из пяти безразмерных параметров. В любых других частных случаях количество безразмерных чисел уменьшится. Например, если начальные вихри осесимметричные, то из набора выпадает ε и достаточен набор $\left(\frac{\sigma}{e};\frac{\gamma}{e};\frac{\gamma}{\Gamma};K\right)$. Если отказаться от осевой симметрии относительно вертикали, но рассматривать вихри большого вертикального размера (большие K, то K выпадет из набора, останутся числа подобия $\left(\frac{\sigma}{e};\frac{\gamma}{e};\frac{\gamma}{\Gamma};\varepsilon\right)$. Наконец, если изучать осесимметричные и одновременно большие по вертикали вихри, то получим набор $\left(\frac{\sigma}{e};\frac{\gamma}{e};\frac{\gamma}{\Gamma}\right)$. Обычно для условий океана и атмосферы параметр $\frac{\gamma}{\Gamma}$ мал и, согласно теории подобия, тоже может выпасть из общего рассматриваемого набора чисел. Однако это высказывание требует отдельного рассмотрения.

Отметим, что подход с обобщением фонового течения (6а) приведет к похожему с (11) интегро-дифференциальному уравнению

$$\begin{gathered}\frac{\partial F}{\partial t}+\left(\Gamma_x z+ex-\gamma y+u_v\right)\frac{\partial F}{\partial x}+\\+\left(\Gamma_y z+\gamma x-ey+u_v\right)\frac{\partial F}{\partial y}=0,\end{gathered}\tag{18}$$

в котором скорости u_v и u_v описываются прежними интегралами (8а), (8б). Соотношение (18) позволяет формализовать выводы, изложенные выше. Однако, поскольку в уравнение (18) заложены все размерные определяющие параметры, то гораздо проще применить теорию размерности. Именно это и сделано выше. Результаты, естественно, совпадают.

ВЫВОДЫ

В данной работе построена теория подобия для равнозавихренных (в смысле потенциальной завихренности) объемов жидкости произвольной формы в фоновых горизонтальных течениях с вертикальным сдвигом. Показано, что максимальный набор $\left(\frac{\Gamma}{\sigma};\varepsilon;K\right)$ состоит из трех чисел подобия. Первое описывает мощность вихря относительно сдвига течения. Два других (ε; K) – геометрические параметры подобия. Первое ε связано с удлинением ядра вихря по горизонтали. Последнее K описывает сплющенность ядра вихря по вертикали, причем K совпадает с числом Бургера.

Во всех частных случаях количество чисел подобия уменьшается. Например, если в начальных условиях вихри осесимметричны относительно вертикали, то набор чисел подобия состоит их двух чисел $\left(\frac{\Gamma}{\sigma};K\right)$. Если начальные вихри имеют большой вертикальный размер (большие значения K или же исходные вихри баротропные), но не осесимметричны, то из набора чисел подобия выпадет параметр K и общее количество параметров подобия составят два числа $\left(\frac{\Gamma}{\sigma};\varepsilon\right)$. Наконец, если исходные вихри одновременно осесимметричны и с большими вертикальными размерами, то останется только одно число подобия $\frac{\Gamma}{\sigma}$.

Условия подобия вихрей в чисто баротропных течениях изучены в работе [6] и здесь подробно не излагаются.

Для тех же вихрей в течениях общего вида, состоящих из баротропной и бароклинной составляющих (бароклинная составляющая – горизонтальное течение с вертикальным сдвигом), количество чисел подобия значительно увеличится, их станет шесть штук $\left(\frac{\sigma}{e}; \frac{\gamma}{e}; \frac{\gamma}{\Gamma}; \varepsilon; K; \varphi\right)$. Первое число $\frac{\sigma}{e}$ описывает относительную мощность вихря. Два следующих числа $\left(\frac{\gamma}{e}; \frac{\gamma}{\Gamma}\right)$ и угол φ относятся к подобию составляющих для фоновых течений (баротропной и бароклинной частей течения). Последние два параметра (ε; K) описывают геометрическое подобие вихревых ядер, причем параметр подобия K совпадает с числом Бургера. Следует отметить, что ограничение на параметр φ автоматически учитывается в начальных условиях задачи, поэтому здесь мы будем считать, что условие на φ выполнено и сам параметр φ в нашей постановке несущественный. Тем не менее при моделировании поведения вихрей в течениях общего вида он должен быть учтен. Далее угол φ не будет рассматриваться как одно из чисел подобия.

В частных вариантах количество безразмерных параметров, участвующих в описании подобия, уменьшается. Так, если исходные вихри осесимметричны, то набор чисел подобия следующий – $\left(\frac{\sigma}{e}; \frac{\gamma}{e}; \frac{\gamma}{\Gamma}; K\right)$. Если исходные вихри неосесимметричны, но больших вертикальных размеров или они баротропны (что означает большие значения K), то набор параметров подобия также составят четыре числа $\left(\frac{\sigma}{e}; \frac{\gamma}{e}; \frac{\gamma}{\Gamma}; \varepsilon\right)$. Наконец, если исходные вихри и осесимметричны, и больших вертикальных размеров (или баротропны), то набор чисел подобия минимален $\left(\frac{\sigma}{e}; \frac{\gamma}{e}; \frac{\gamma}{\Gamma}\right)$ и фактически связан с относительной мощностью вихря и подобием фоновых течений.

Источники финансирования. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ № 22-17-00267 и по теме государственного задания Институт океанологии РАН им. П.П. Ширшова FMWE-2023-0002.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баренблатт Г.И.* Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Теория и приложения к геофизической гидродинамике. Л.: Гидрометеоиздат, 1982. 256 с.
2. *Голицын Г.С.* Статистика и динамика природных процессов и явлений: Методы, инструментарий, результаты. М.: Из-во “Красанд”, 2012. 400 с.
3. *Елкин Д.Н., Зацепин А.Г.* Лабораторное исследование механизма периодического вихреобразования за мысами в прибрежной зоне моря // Океанология. 2013. Т. 53. № 2. С. 259–268.
4. *Елкин Д.Н. Зацепин А.Г.* Лабораторное исследование механизма сдвиговой неустойчивости морского вдольберегового течения // Океанология. 2014. Т. 54. № 5. С. 614–621.
5. *Жмур В.В.* Мезомасштабные вихри в океане. М.: ГЕОС, 2011. 290 с.
6. *Жмур В.В.* О подобии квазигеострофических вихрей на фоне крупномасштабных баротропных течений // Океанология. 2024 (в печати).
7. *Жмур В.В., Арутюнян Д.А.* Перераспределение энергии при горизонтальном вытягивании океанских вихрей баротропными течениями // Океанология. 2023. Т. 63. № 1. С. 3–19. https://doi.org/10.31857/S0030157423010185.
8. *Жмур В.В., Белоненко Т.В., Новоселова Е.В. и др.* Эволюции мезомасштабных вихрей океана в неоднородных баротропных течениях // Известия РАН. ФАО. 2023 (в печати).
9. *Жмур В.В., Белоненко Т.В., Новоселова Е.В., Суетин Б.П.* Прямой и обратный каскад энергии при вытягивании вихрей в океане // Доклады Российской академии наук. Науки о Земле. 2023. Т. 508. № 2. С. 270–274. https://doi.org/10.31857/S2686739722602113 / Zhmur V.V., Belonenko T.V., Novoselova E.V., Suetin B.P. Direct and Inverse Energy Cascades in the Ocean during Vortex Elongation // Doklady Earth Sciences. 2023. V. 508. № 2. P. 233–236. https://doi.org/10.1134/S1028334X22601675
10. *Жмур В.В., Белоненко Т.В., Новоселова Е.В., Суетин Б.П.* Условия трансформации мезомасштабного вихря в субмезомасштабную вихревую нить при вытягивании его неоднородным баротропным течением // Океанология. 2023. Т. 63. № 2. С. 200–210. https://doi.org/10.31857/S0030157423020144
11. *Жмур В.В., Белоненко Т.В., Новоселова Е.В., Суетин Б.П.* Приложение к реальному океану теории трансформации мезомасштабного вихря в субмезомасштабную вихревую нить при вытягивании его неоднородным баротропным течением // Океанология. 2023. Т. 63. № 2. С. 211–223. https://doi.org/10.31857/S0030157423020156

12. *Жмур В.В., Панкратов К.К.* Динамика эллипсоидального приповерхностного вихря в неоднородном потоке // Океанология. 1989. Т. 29. № 2. С. 205–211.

13. *Жмур В.В., Щепеткин А.Ф.* Эволюция эллипсоидального вихря в стратифицированном океане в приближении f-плоскости // Изв. АН СССР. ФАО. 1991. Т. 27. № 5. С. 492–503.

14. *Зацепин А.Г., Елкин Д.Н., Шварцман Д.Р.* Предварительные результаты лабораторных исследований эволюции нефронтальных вихрей в двуслойной вращающейся жидкости // Океанологические исследования. 2023. Т. 51. № 1. С. 5–35.

15. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Т. 2. ОГИЗ. М., Л.: Гостехиздат, 1948. 612 с.

16. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1977. Изд. 5-е. 736 с.

17. *Fedorov K.N., Ginsburg A.I.* "Mushroom-like" currents (vortex dipoles) in the ocean and in a laboratory tank // Annales Geophys. 1986. 4B, 5. P. 507–516.

18. *Kida S.* Motion of an elliptic vortex in uniform shear flow // J. Phys. Soc. Japan. 1981. 50(10). P. 3517–3520.

19. *Koshel K.V., Ryzhov E.A., Zhmur V.V.* Ellipsoidal vortex in a nonuniform flow: dynamics and chaotic advections // J. Mar. Res. 2011. V. 69. № 2–3. P. 435–461.

20. *Koshel K.V., Ryzhov E.A., Zhmur V.V.* Diffusion-effected passive scalar transport in an ellipsoidal vortex in a shear flow // Nonlinear Processes in Geophysics. 2013. V. 20. P. 437–444. https://doi.org/10.5194/npg-20-437-2013

21. *Koshel K.V., Ryzhov E.A., Zhmur V.V.* Effect of the vertical component of diffusion on passive scalar transport in an isolated vortex model // Phys. Rev. 2015. V. 92. № 5. 053021. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.92.053021

22. *Meacham S.P.* Quasigeostrophical ellipsoidal vortices in stratified fluid // Dynamics of Atmospheres and Oceans. 1992. V. 16. № 3–4. P. 189–223.

23. *Meacham S.P., Pankratov K.K., Shchepetkin A.F., Zhmur V.V.* The interaction of ellipsoidal vortices with background shear flows in a stratified fluid // Dynamics of Atmospheres and Oceans. 1994. V. 21. № 2–3. P. 167–212. https://doi.org/10.1016/0377-0265(94)90008-6

24. *Zhmur V.V., Novoselova E.V., Belonenko T.V.* Peculiarities of formation of the density field in mesoscale eddies of the Lofoten Basin: Part 1 // Oceanology. 2021. V. 61. № 6. P. 830–838. https://doi.org/10.1134/S0001437021060333

25. *Zhmur V.V., Pankratov K.K.* Dynamics of desingularized quasigeostrophic vortices // Physics of Fluids A: Fluid Dynamics. 1991. V. 3. № 5. P. 1464–1464. https://doi.org/10.1063/1.857998

THE SIMILARITY OF QUASI-GEOSTROPHIC VORTICES AGAINST THE BACKGROUND OF HORIZONTAL CURRENTS WITH VERTICAL SHEAR AND GENERAL-TYPE CURRENTS WITH BAROTROPIC AND BAROCLINIC COMPONENTS

V. V. Zhmur*

Shirshov Institute of Oceanology of the Russian Academy of Sciences, Moscow

**zhmur-vladimir@mail.ru*

This article is a continuation and generalization of the work "On the similarity of quasi-geostrophic vortices against the background of large-scale barotropic currents" [6] (Oceanology, Zhmur, 2024, in print). In continuation of the above work, a similar formulation is considered, but for other types of background currents. In the quasi-geostrophic description for small Rossby numbers, the problem of the evolution of an arbitrary–shaped liquid volume with homogeneous potential vorticity of all vortex core particles in an equidistant background flow – horizontal flow with vertical shear and equidistant flow with barotrotropic and baroclinic components is presented. Ultimately, the problem boils down to an integro-differential equation for the evolution of the vortex core boundary. The study of this equation in dimensionless form allows us to find a set of dimensionless parameters that determine the similarity condition of the vortices under study.

Keywords: vortex, vortex core, background flow, barotropic and baroclinic flow, potential vorticity, relative vorticity, dimensionless similarity number, geometric similarity