

УДК 551.465

ПОДОБИЕ КВАЗИГЕОСТРОФИЧЕСКИХ ВИХРЕЙ НА ФОНЕ КРУПНОМАСШТАБНЫХ БАРОТРОПНЫХ ТЕЧЕНИЙ

© 2024 г. В. В. Жмур*

Институт океанологии им. П. П. Ширшова РАН, Москва, Россия

*e-mail: zhmur-vladimir@mail.ru

Поступила в редакцию 05.06.2023 г.

После доработки 15.06.2023 г.

Принята к публикации 18.07.2023 г.

В работе предлагается теория подобия квазигеострофических вихрей на фоне крупномасштабных течений. Эта теория полезна при планировании лабораторных и численных экспериментов по изучению мезомасштабной и субмезомасштабной вихревой динамики взаимодействующих с течениями вихрей. Особое внимание уделено изучению геометрического подобия явлений. Выявлено, что полный набор безразмерных чисел подобия бароклиных вихрей включает в себя четыре безразмерных параметра: безразмерную интенсивность вихря, геометрическое подобие фонового течения (отношение относительной завихренности к коэффициенту деформации фонового течения), коэффициент горизонтального удлинения вихревого ядра и коэффициент вертикальной сплюснутости вихревого ядра, совпадающий с числом Бургера. Для описания подобия баротропных вихрей на фоне баротропных течений количество необходимых безразмерных параметров уменьшается на одно число — из рассмотрения выбывает коэффициент вертикальной сплюснутости вихревого ядра. При изучении осесимметричных вихрей или близких к ним вихревых структур из рассмотрения выбывает еще один геометрический параметр вихря — коэффициент горизонтального удлинения вихревого ядра. В результате максимально возможный набор параметров подобия включает в себя четыре безразмерных числа, а минимальный — два.

Ключевые слова: вихрь, вихревое ядро, фоновое течение, потенциальная завихренность, относительная завихренность, безразмерные числа подобия, геометрическое подобие

DOI: 10.31857/S0030157424020012 EDN: RWXXLD

ВВЕДЕНИЕ

При моделировании океанических процессов лабораторными или численными методами важно соблюдать правила подобия явлений, гарантирующие адекватность результатов натурных и лабораторных исследований. В классической гидромеханике несжимаемой жидкости разработана и успешно применяется теория подобия, которая вкратце сводится к выполнению нескольких тезисов: два явления называются подобными, если соблюдено геометрическое подобие, а также соблюдено равенство безразмерных чисел Рейнольдса и Фруда [13]. При изучении движений вращающейся стратифицированной жидкости к вышеупомянутым безразмерным параметрам добавятся числа Бургера и Россби. Успешное применение теории размерностей в различных задачах геофизической гидродинамики, физики, астрономии изложено в работах Г. С. Голицына [2] и Г. И. Баренблатта [1]. Конечно, перечень работ далеко не полный.

Количество безразмерных чисел, определяющих подобие явлений, может быть уменьшено, если справедливы упрощающие предположения о малости тех или иных эффектов. Например, если с позиций физики эффектами вязкости можно пренебречь, то из условий подобия исчезнет число Рейнольдса. В квазигеострофическом подходе для малых чисел Россби система уравнений сводится к одному уравнению для давления (или для функции тока), в котором может присутствовать только одно безразмерное число Бургера (Bu), указывающее на соотношение эффектов плавучести и вращения. Кроме условия геометрического подобия, это единственный безразмерный параметр в уравнении, от которого также зависит условие подобия явлений. Если рассматривать квазигеострофические явления с горизонтальным размером L порядка бароклин-

ного радиуса деформации Россби $L_R = \frac{N^*}{f}h$

(N^* — характерное значение частоты Вайсяля—Брента N ; f — параметр Кориолиса; h — характер-

ный вертикальный размер явления), то число Бургера $Bu = \frac{L_R}{L}$ окажется порядка единицы, но,

вообще говоря, не выпадет из рассмотрения, хотя диапазон его изменения должен быть сильно ограничен и лежать в районе единицы. В результате в квазигеострофическом подходе из условий подобия останется только равенство чисел Бургера и геометрическое подобие. Что такое геометрическое подобие для вихрей на течениях — не особенно ясно. Детализации этого тезиса и посвящена основная часть работы. Если в рамках квазигеострофического подхода использовать какую-либо уже разработанную вихревую модель, то это даст возможность получить набор безразмерных модифицированных параметров в более приемлемой форме использования. Использование размерных уравнений позволит также выделить размерные определяющие параметры, позволяющие сделать численные оценки значимости основных физических характеристик рассматриваемых процессов.

Тем не менее остаются вопросы — сколько безразмерных чисел подобия необходимо для описания вихрей на фоне течения, что такое геометрическое подобие в задачах вихревой динамики и как на это подобие влияют характеристики среды, например частота Вайсяля—Брента, свойства фоновых течений и т.д.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В квазигеострофическом приближении при малых числах Россби $Ro = \frac{U}{fL} \ll 1$ (U — характерная скорость изучаемого процесса) систему уравнений геофизической гидродинамики удается свести к уравнению для давления p , где p — превышение давления над гидростатическим давлением покоя. Наличие этого давления приводит среду в движение. Данное давление p связано с функцией тока ψ постоянным множителем:

$$\psi = \frac{1}{\rho_0 f} p. \text{ Здесь } \rho_0 = \text{const} \text{ — средняя по глубине}$$

плотность воды. Уравнения для давления и функции тока практически совпадают. Выпишем размерное уравнение для функции тока в квазигеострофическом приближении:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\Delta_h \psi + \frac{\partial}{\partial z} \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + J_h \left(\psi, \Delta_h \psi + \frac{\partial}{\partial z} \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = 0. \quad (1)$$

Здесь x, y — неподвижные горизонтальные оси системы координат; z — вертикальная ось;

$$J_h(A, B) = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial B}{\partial x} \text{ — определитель Якоби}$$

$$\text{(якобиан); } \Delta_h = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \text{ — оператор Лапласа}$$

по горизонтальным координатам. Если функция тока $\psi(x, y, z, t)$ найдена, то можно вычислить все остальные гидродинамические характеристики движения, например, поле скорости (u, v, w)

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

$$w = -\frac{f_0}{N^2} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial z} + J_h \left(\psi, \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right]. \quad (2)$$

При этом уравнение (1) ухватывает только геострофическую часть горизонтального движения. Агеострофическая компонента скорости в этой постановке мала (порядка Ro) и в приближении (1) получена быть не может.

Уравнение (1) имеет важный физический смысл: оно утверждает, что величина

$$\sigma = \Delta_h \psi + \frac{\partial}{\partial z} \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (3)$$

является лагранжевым инвариантом и переносится вместе с движущейся жидкой частицей. Представим, что вихрь состоит из вихревого ядра и внешней жидкости, захваченной во вращательное движение вихревым ядром. Вихревое ядро представляет собой некий водяной мешок с жидкой свободно деформируемой границей, внутри которой содержится вода с завихренностью σ_{in} , отличающейся от завихренности σ_{out} внешней фоновой жидкости. Для простоты обе величины σ_{in} и σ_{out} будем считать постоянными, равно как и частоту Вайсяля—Брента. Обозначим $\sigma = \sigma_{in} - \sigma_{out}$ перепад потенциальной завихренности между ядром вихря и фоновой жидкостью.

Закон (3) позволяет выписать распределение потенциальной завихренности в пространстве в виде простого соотношения:

$$\Delta \psi = \begin{cases} \sigma_{in}, & \text{если } (x, y, \tilde{z}) \in V \\ \sigma_{out}, & \text{если } (x, y, \tilde{z}) \notin V \end{cases}. \quad (4)$$

Здесь $\tilde{z} = \frac{N}{f} z$, растянутая в $\frac{N}{f}$ раз вертикальная ось системы координат;

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \quad - \quad \text{объемный оператор}$$

Лапласа в пространстве (x, y, \bar{z}) ; V – деформируемая область пространства, которую занимает вихревое ядро и эволюцию которой следует определить в процессе решения. При отсутствии вихря во всем пространстве наблюдается однородное распределение потенциальной завихренности

$$\Delta \Psi = \sigma_{\text{out}}. \quad (5)$$

В этом случае решение уравнения (5) $\Psi = \Psi_f(x, y, \bar{z})$ представляет собой фоновое течение. При наличии вихря возмущение течения, связанное с вихрем Ψ_v , подчиняется уравнению

$$\Delta \Psi_v = \begin{cases} (\sigma_{\text{in}} - \sigma_{\text{out}}), & \text{если } (x, y, \bar{z}) \in V \\ 0, & \text{если } (x, y, \bar{z}) \notin V. \end{cases} \quad (6)$$

Уравнение (6) с точностью до обозначений совпадает с задачей определения гравитационного потенциала однородного по плотности тела формы V .

Задача (6) решается в общем случае для любой формы ядра V в пространстве (x, y, \bar{z}) [14]:

$$\begin{aligned} \Psi_v(x, y, \bar{z}, t) = \\ = -\frac{\sigma}{4\delta} \iiint_V \frac{dx'dy'd\bar{z}'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (\bar{z}-\bar{z}')^2}}. \end{aligned} \quad (7)$$

В том числе соотношение (7) остается справедливым и при меняющейся во времени форме ядра. Поэтому параметрическая зависимость $\Psi_v(x, y, \bar{z}, t)$ от времени скрыта именно в переменной форме ядра.

Пользуясь функцией тока Ψ_v , согласно (2), можно найти поле геострофических компонент течения:

$$\begin{aligned} u_v(x, y, \bar{z}, t) = \\ = \frac{\sigma}{4\pi} \iiint_V \frac{(y-y')dx'dy'd\bar{z}'}{\left[\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (\bar{z}-\bar{z}')^2}\right]^3} \end{aligned} \quad (8a)$$

$$v_v(x, y, \bar{z}, t) =$$

$$= -\frac{\sigma}{4\pi} \iiint_V \frac{(x-x')dx'dy'd\bar{z}'}{\left[\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (\bar{z}-\bar{z}')^2}\right]^3}. \quad (8б)$$

Согласно математическим свойствам решения (7) уравнения (6), соотношение (7) непрерывно вместе с первыми пространственными производными [14]. Это, в свою очередь, означает, что поле давления вместе с полем геострофических течений тоже непрерывно. Непрерывность поля давления автоматически удовлетворяет динамическому условию на поверхности вихревого ядра, где существует разрыв потенциальной завихренности между ядром вихря и окружающей внешней жидкостью. Отметим, что на этом этапе кинематическое условие на той же поверхности еще не выполнено.

Запишем уравнение границы ядра как функцию пространственных координат и времени $F(x, y, \bar{z}, t) = 0$. В кинематическом условии на поверхности вихревого ядра

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (9)$$

не все слагаемые равноправны. Слагаемое $w \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}$ для наших задач составляет величину порядка $O(Ro)$ от слагаемых

$$u \frac{\partial F}{\partial x} \quad \text{или} \quad v \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Пользуясь соображениями о не превышении точности выше, чем $O(Ro)$, отбросим в точном уравнении (9) малое слагаемое $w \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}$. В результате в нашем квазигеострофическом приближении кинематическое условие примет вид

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} = 0. \quad (10)$$

Тот факт, что в кинематическое условие в форме (10) не входит вертикальная скорость, имеет свои последствия. Поскольку (9) и (10) совпадают при $w \equiv 0$, это означает, что трансформация ядра вихря по вертикали отсутствует. Отсюда получаем два эффекта: первое, ядро объемного вихря “зажато” между двумя неподвижными горизонтальными плоскостями, т.е. вертикальный размер ядра не меняется (с точностью до $O(Ro)$); второе,

площадь горизонтального сечения ядра при его деформации баротропным течением на любом горизонтальном уровне сохраняется в той же точности.

Рассмотрим поле фонового течения (5). Положим, что характерный размер течения заметно превышает характерный вихря L . Поэтому поле скоростей баротропного фонового течения разложим в ряд Тэйлора в окрестности центра масс рассматриваемого вихря. Поскольку характерный размер течения заметно превышает характерный размер вихря, то можно ограничиться линейными по координатам членами разложения:

$$u_f = u_0 + \tilde{e}x - \tilde{a}_1y \quad (11a)$$

$$v_f = v_0 + \tilde{a}_2x - \tilde{e}y \quad (11б)$$

$$w_f = 0 \quad (11в)$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \text{rot}_z \vec{u}_f \quad (11д)$$

$$\frac{\partial u_f}{\partial x} + \frac{\partial v_f}{\partial y} = 0. \quad (11e)$$

При повороте системы координат вокруг вертикальной оси все коэффициенты $\gamma_1, \gamma_2, \tilde{e}$ будут меняться. На первый взгляд поле течений зависит от трех размерных параметров $\gamma_1, \gamma_2, \tilde{e}$, однако сумма двух из них при повороте не меняется: $\gamma_1 + \gamma_2 = \text{rot}_z \vec{u}_f$, поэтому количество размерных определяющих параметров для фонового течения не три, а два. В явном виде такое утверждение демонстрируется подбором такого поворота системы координат, при котором коэффициенты γ_1 и γ_2 совпадут ($\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$), при этом коэффициент \tilde{e} в этой системе координат примет некоторое значение e .

Перейдя в подвижную систему координат с началом в центре масс ядра вихря, движущуюся со скоростью (u_0, v_0) , получим интегро-дифференциальное уравнение эволюции границы $F(x, y, z, t) = 0$ вихря (7), приспособленное под цели описания деформации вихревого ядра:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + (ex - \tilde{a}_1y + u_v) \frac{\partial F}{\partial x} + (\tilde{a}_2x - ey + u_v) \frac{\partial F}{\partial y} = 0. \quad (12)$$

Задача о поведении равнозавихренного вихревого ядра в баротропном потоке свелась к задаче об эволюции его ядра. Решение (12) в любой момент времени t полностью определяет форму ядра вихря $F(x, y, z, t) = 0$ и позволяет с помощью соотношений (7) – (8) найти все остальные ха-

рактеристики вихря. Теорию подобия будем излагать с позиции исследования уравнения (12).

Перейдя к дифференцированию по безразмерному времени $\tau = et$ и безразмерным координатам $\bar{x} = x/L$, $\bar{y} = y/L$, а также к интегрированию в выражения скоростей (u_v, v_v) (8а, 8б) по тем же безразмерным переменным $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, выпишем уравнение (12) в безразмерном виде

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} + \left(\bar{x} - \frac{\gamma}{e} \bar{y} + \bar{u}_v \right) \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} + \left(\frac{\gamma}{e} \bar{x} - \bar{y} + \bar{v}_v \right) \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (13)$$

$$\bar{u}_v = \frac{1}{4\pi e} \iiint_{V'} \frac{(\bar{y} - \bar{y}') d\bar{x}' d\bar{y}' d\bar{z}'}{\left[\sqrt{(\bar{x} - \bar{x}')^2 + (\bar{y} - \bar{y}')^2 + \left(\bar{z} - \bar{z}' \right)^2} \right]^3}. \quad (13a)$$

$$\bar{v}_v = -\frac{1}{4\pi e} \iiint_{V'} \frac{(\bar{x} - \bar{x}') d\bar{x}' d\bar{y}' d\bar{z}'}{\left[\sqrt{(\bar{x} - \bar{x}')^2 + (\bar{y} - \bar{y}')^2 + \left(\bar{z} - \bar{z}' \right)^2} \right]^3}. \quad (13б)$$

Само уравнение границы $F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \tau) = 0$ можно сразу считать безразмерным. В полученное интегро-дифференциальное уравнение входит два безразмерных параметра $\frac{\sigma}{e}$ и $\frac{\gamma}{e}$. Если два вихря геометрически подобны в начальный момент времени и для каждого из них соответствующие параметры $\frac{\sigma}{e}$ и $\frac{\gamma}{e}$ совпадают, то интегро-дифференциальные уравнения, описывающие эволюцию каждого из них вместе с начальными условиями, окажутся тождественно одинаковыми. Следовательно, поведение вихрей во времени и пространстве будет тоже подобным.

Итак, нами показано, что параметры подобия поведения квазигеострофических вихрей в крупномасштабных фоновых течениях — безразмерные числа $\frac{\sigma}{e}$, $\frac{\gamma}{e}$ и геометрическое подобие границ вихревых ядер в начальный момент времени. В таком общем подходе геометрическое подобие выглядит несколько расплывчато. Естественно считать, что подобными вихрями являются вихри с одинаковой формой ядра, отличающиеся только масштабированием всех размеров. Кроме того, подобные вихри должны быть одинаково ориентированы относительно фонового течения. Что

касается масштабирования, то это свойство будет изложено ниже. А вот с ориентацией ядер вихрей относительно фоновых течений дело обстоит сложнее. Дело в том, что для ядер сложной формы может не быть естественных выделенных направлений, эволюцию ориентации которых мы можем связывать с ориентацией вихря в пространстве. Для более простых вихрей, например эллипсоидальных, такие направления существуют. Посмотрим на проблему с позиции уравнения (13). В математической постановке для (13) необходимо задавать начальные условия на форму ядра. В начальную форму автоматически входит ориентация ядра относительно фонового течения. Требование одинаковости начальных условий для двух вихрей (модельного и реального) в рамках уравнения (13) автоматически приводит к выполнению требуемых условий одинаковой ориентации. Это означает, что условия одинаковой ориентации автоматически заложены в начальные условия задачи и обязаны быть выполненными. Поэтому в дальнейшем мы не будем обсуждать очевидное условие подобия вихрей в течениях по их ориентации относительно течений.

Интересно отметить, что в исходное уравнение сохранения потенциального вихря (1) в безразмерном виде входит число Бургера, которое на этом этапе рассуждений в выводах подобия отсутствует. Естественно предположить, что число Бургера каким-то образом неявно фигурирует в условиях геометрического подобия.

В общем случае выпуклое овальное 3D-ядро имеет три размера — два горизонтальных a и b (для определенности $a > b$) и один вертикальный: в физическом пространстве (x, y, z) этот размер обозначим как c , а в «растянутом» по вертикали пространстве (x, y, \tilde{z}) , в котором выписано исследуемое уравнение (12), этот же размер будет $\tilde{c} = \frac{N}{f}c$. Из трех размерных параметров a, b и \tilde{c} можно скомпоновать два безразмерных параметра:

отношение горизонтальных размеров (параметр горизонтальной вытянутости)

$$\varepsilon = \frac{a}{b} \tag{14}$$

и отношение вертикального размера \tilde{c} к характерному горизонтальному размеру $L = \sqrt{ab}$

$$K = \frac{\tilde{c}}{\sqrt{ab}}. \tag{15}$$

Характерный горизонтальный размер в форме $L = \sqrt{ab}$ нами выбран из соображений удобства, поскольку в частном случае эллипсоидального ядра для описания безразмерной вертикальной характеристики ядра автоматически получается соотношение (15). В (14) и (15) a и b — горизонтальные полуоси, а \tilde{c} — вертикальная полуось эллипсоида в растянутом пространстве. В исходной работе [11] параметр K трактовался как параметр вертикальной сплюснутости. В данной работе мы оставим в силе это название.

Интересно отметить, что параметр K одновременно является и числом Бургера. Действительно, если ввести в рассмотрение радиус деформации Россби $L_R = \frac{N}{f}c$ и характерный горизонтальный размер ядра $L = \sqrt{ab}$, то $K = \frac{\tilde{c}}{\sqrt{ab}} = \frac{L_R}{L}$, что полностью соответствует определению числа Бургера Bu .

Итак, в основном уравнении (13) определились следующие безразмерные числа подобия: $\frac{\sigma}{e}$, $\frac{\gamma}{e}, \varepsilon, K$, один из которых $\frac{\sigma}{e}$ характеризует относительную мощность вихря, параметр $\frac{\gamma}{e}$ определяет геометрическое подобие фоновых течений (подобие линий тока) и два последних ε, K описывают геометрическое подобие вихревых ядер.

В частном случае осесимметричных вихрей (или вихрей, близких по геометрии к круглым в плане вихрям с радиусом R) параметр $\varepsilon = 1$ фиксирован и выпадает из набора чисел подобия, при этом $K = Bu = \frac{N \tilde{c}}{f R}$. В результате остаются три числа подобия — $\frac{\gamma}{e}, \frac{\sigma}{e}, K$.

Неограниченное увеличение параметра K равносильно переходу от 3D-бароклиных вихрей к плоскому случаю баротропных вихревых движений. При этом параметр K выбывает из общего набора чисел подобия. Следовательно, при изучении эволюции баротропных вихрей в крупномасштабных баротропных течениях остается набор из трех параметров $\frac{\gamma}{e}, \frac{\sigma}{e}, \varepsilon$, определяющих подобие рассматриваемых явлений, а для осесимметричных вихрей их останется два — $\frac{\gamma}{e}, \frac{\sigma}{e}$.

Задача о поведении вихря с ядром эллипсоидальной формы решается точно в рамках квазигеострофического подхода уравнения (1) с уче-

том кинематического и динамического условий на границе ядра [5, 11, 16, 17, 19]:

$$\begin{aligned} \psi(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, t) = \\ = -\frac{1}{4} \sigma ab \tilde{c} \int_{\lambda}^{\infty} \left(1 - \frac{\tilde{x}^2}{a^2 + \mu} - \frac{\tilde{y}^2}{b^2 + \mu} - \frac{\tilde{z}^2}{\tilde{c}^2 + \mu} \right) \times \\ \times \frac{d\mu}{\sqrt{(a^2 + \mu)(b^2 + \mu)(\tilde{c}^2 + \mu)}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь a, b — горизонтальные полуоси эллипсоида, c — его вертикальная полуось, $\tilde{c} = \frac{N}{f}c$ — растянутая в $\frac{N}{f}$ раз вертикальная полуось, \tilde{x}, \tilde{y} — горизонтальные оси координат, направленные по главным осям эллипсоида, $\tilde{z} = \frac{N}{f}z$, растянутая в $\frac{N}{f}$ раз вертикальная ось системы координат. Нижний предел $\lambda(\tilde{x}, \tilde{y}, \eta)$ в интеграле (16) — положительный корень кубического уравнения

$$\frac{\tilde{x}^2}{a^2 + \lambda} + \frac{\tilde{y}^2}{b^2 + \lambda} + \frac{\tilde{z}^2}{\tilde{c}^2 + \lambda} = 1. \quad (17)$$

Для пространства внутри ядра вплоть до его границы следует положить $\lambda = 0$. В покоящемся на бесконечности океане ядро вихря вращается без деформации формы вокруг вертикальной оси. Частицы внутри ядра движутся быстрее вращения формы ядра. Детали можно найти в работах [5, 11, 16, 17, 19].

Решение (16) можно интерпретировать как эволюцию эллипсоидального вихря в покоящемся на бесконечности океане (при этом $\sigma_{out} = 0$, а фоновое движение в океане отсутствует). Как было показано ранее [5, 11, 16, 17, 19], граница такого вихря вращается с постоянной угловой скоростью

$$\Omega(\varepsilon, K) = \frac{1}{2} \sigma K \int_0^{\infty} \frac{\mu d\mu}{\sqrt{(\mu + \varepsilon) \left(\mu + \frac{1}{\varepsilon} \right) (K^2 + \mu)}}. \quad (18)$$

Вращение будем относить к деформации границы ядра. При этом частицы жидкости обгоняют вращение ядра.

В безразмерном виде уравнение (5) приведено ниже:

$$\begin{aligned} \frac{\psi(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, t)}{\sigma ab} = \\ = -\frac{1}{4} K \int_{\lambda'}^{\infty} \left(1 - \frac{x'^2}{\varepsilon + \mu'} - \frac{y'^2}{\varepsilon^{-1} + \mu'} - \frac{z'^2}{K^2 + \mu'} \right) \times \\ \times \frac{d\mu'}{\sqrt{(\varepsilon + \mu')(\varepsilon^{-1} + \mu')(K^2 + \mu')}}. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь (x', y', z') — безразмерные координаты $\frac{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})}{\sqrt{ab}}$, $\mu' = \frac{\mu}{ab}$. В уравнении (19) появились две

безразмерные геометрические характеристики вихревого ядра:

$\varepsilon = \frac{a}{b}$ — параметр горизонтальной вытянутости и $K = \frac{N}{f} \frac{c}{\sqrt{ab}}$ — параметр сплюснутости ядра

по вертикали. Параметр сплюснутости, хотя нами относится к геометрическим характеристикам, содержит свойства среды — частоту Вайсяля–Брента и параметр Кориолиса. Его можно также связать с числом Бургера $Bi = \frac{L_R}{L}$, в котором радиус деформации Россби определен как $L_R = \frac{N}{f}c$,

а характерный горизонтальный размер вихря как $L = \sqrt{ab}$. В этом случае $Bi = K$. Для определенности обе характеристики ε и K мы отнесем к геометрическим свойствам ядра, но число Бургера будем использовать наравне с параметром K .

Нижняя граница безразмерного интеграла (19) запишется в виде

$$\frac{x'^2}{\varepsilon + \lambda'} + \frac{y'^2}{\varepsilon^{-1} + \lambda'} + \frac{z'^2}{K^2 + \lambda'} = 1 \quad (19)$$

Угловое вращение вихря (18) можно также преобразовать к безразмерному виду в тех же переменных

$$\frac{\Omega(\varepsilon, K)}{\delta} = \frac{1}{2} K \int_0^{\infty} \frac{\mu d\mu}{\sqrt{(\mu + \varepsilon) \left(\mu + \frac{1}{\varepsilon} \right) (K^2 + \mu)}} \quad (20)$$

и убедиться, что новых безразмерных характеристик вихревого ядра, кроме чисел ε и K , не появилось. Геометрически подобными в покоящемся океане следует считать вихри, у которых совпадают параметры горизонтальной вытянутости ε и параметр вертикальной сплюснутости ядра $K = Bi$. Обратим внимание на то, что в понятие геометрического подобия мы включили и свойства среды. Дело в том, что удобная математическая формулировка задачи (4) и (6) представлена в растянутом по вертикали в $\frac{N}{f}$ раз пространстве.

Поэтому характерный вертикальный размер вих-

ревого ядра в этом пространстве тоже увеличился в $\frac{N}{f}$ раз. С некоторыми оговорками указанные понятия можно распространить и на вихри с ядрами овальной формы в общем случае с тремя разными характерными размерами.

Особый интерес как в теоретических, так и в экспериментальных исследованиях уделяется осесимметричным вихрям. Большинство мощных вихревых образований в океане в плане круглые. В лабораторных условиях круглые вихри легче создать. Рассмотрим условия подобия для осесимметричных вихрей. В этом случае все интегралы (4) и (6) вычисляются в элементарных функциях, но, что более важно, зависят только от одного параметра вертикальной сплюснутости K . Именно этот единственный параметр является параметром подобия для круглых вихрей в покоящейся среде.

Применим разработанную модель подобия к эллипсоидальным вихрям в равновихренных баротропных потоках.

Как отмечалось в работах [5, 11, 19], эллипсоидальный вихрь с двумя горизонтальными и одной вертикальной осью, помещенный в равновихренный баротропный поток, переносится как целое этим потоком и одновременно им деформируется. Перемещение вихря как целого нас интересовать не будет. Опишем поведение вихревого ядра в системе координат, движущейся вместе с вихрем. В этой системе координат вектор скорости равновихренного течения линейен по горизонтальным координатам x, y . Свойство линейности сохранится при повороте системы координат вокруг вертикальной оси, но коэффициенты при повороте, конечно, будут меняться. Для любого такого течения можно подобрать такой поворот осей и найти “удобную” систему координат, в которой неоднородный поток примет вид

$$\begin{cases} u = ex - \gamma y \\ v = \gamma x - ey \end{cases} \quad (21)$$

Неоднородность течения описывается двумя параметрами — коэффициентом деформации e и угловой скоростью вращения частиц жидкости в потоке $\gamma = \frac{1}{2} \text{rot}_z \vec{u}$, $\vec{u} = (u, v)$ горизонтальный вектор скорости фонового течения.

Изменчивость характеристик вихря, помещенного в течение (21), изучалась в работах [5, 11, 19], откуда следуют уравнения эволюции его параметров:

$$\begin{cases} \frac{d\varepsilon}{dt} = 2e\varepsilon \cdot \cos 2\theta \end{cases} \quad (22)$$

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = \Omega(\varepsilon, K) + \gamma - \frac{\varepsilon^2 + 1}{\varepsilon^2 - 1} e \cdot \sin 2\theta. \end{cases} \quad (23)$$

В (22), (23) θ — угол, который составляет большая горизонтальная ось эллипсоида (для определенности ось a) с положительным направлением оси x системы (21).

Обезразмерим систему (22), (23). В качестве безразмерного времени, как и ранее, примем $\tau = et$. В результате получим описание эволюции ядра вихря в безразмерном виде:

$$\begin{cases} \frac{d\varepsilon}{d\tau} = 2\varepsilon \cdot \cos 2\theta \end{cases} \quad (24)$$

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{d\tau} = \frac{1}{2} \frac{\sigma}{e} K \int_0^\infty \frac{\mu d\mu}{\sqrt{(\mu + \varepsilon) \left(\mu + \frac{1}{\varepsilon} \right) (K^2 + \mu)}} + \frac{\gamma}{e} - \frac{\varepsilon^2 + 1}{\varepsilon^2 - 1} \cdot \sin 2\theta. \end{cases} \quad (25)$$

В системе (24)–(25) присутствуют следующие безразмерные параметры: два прежних геометрических параметра ядра вихря (ε и K) и два новых параметра $-\frac{\sigma}{e}$ — относительная интенсивность вихря и $\frac{\gamma}{e}$ — параметр, описывающий

свойство фонового течения (подобие линий тока). Последний параметр сравнивает свойство вращать жидкие объекты со свойством их деформировать. Условие подобия решений системы (12)–(13) — совпадение всех четырех параметров $(\frac{\sigma}{e}; \frac{\gamma}{e}; \varepsilon; K)$ для двух различных природных или ла-

бораторных ситуаций. В частности, два геометрически подобных эллипсоидальных вихря с одинаковыми потенциальными завихренностями ядра будут одинаково вести себя в одном и том же течении независимо от их реальных физических размеров. Конечно, условия малости числа Россби (условие справедливости квазигеострофического приближения) требуется для каждого из вихрей. Как видим, набор безразмерных параметров $(\frac{\sigma}{e}; \frac{\gamma}{e}; \varepsilon; K)$, определяющих усло-

вия подобия в классе эллипсоидальных вихрей и для вихрей более общего вида, совпали. Этот факт дает обоснованную надежду на то, что предложенный набор безразмерных чисел для объемных вихревых ядер с тремя характерными разме-

рами является универсальным. В случае отсутствия течения безразмерный параметр интенсивности вихря следует заменить на другое выражение. Удобным вариантом является параметр $\frac{\sigma}{f}$. Тем не менее следует отметить, что кроме трех стандартных размеров (длина, ширина и толщина) у вихрей более сложной конфигурации могут возникнуть дополнительные характерные размеры, не учтенные в нашем подходе. Эти случаи требуют дополнительных исследований и в данной работе не обсуждаются.

АВТОМОДЕЛЬНОСТЬ И ТИПЫ ПОВЕДЕНИЯ ВИХРЕЙ

Изучение системы уравнений (12)–(13) показало, что под действием течений (9) существует только три типа поведения ядер эллипсоидальных вихрей: вращение формы, нутационные колебания формы и неограниченное вытягивание одной из горизонтальных осей [5, 11, 19]. В работах [7–10] на плоскости параметров $\left(\frac{\sigma}{e}; \frac{\gamma}{e}\right)$ при фиксированных K были представлены зоны вышеуказанных типов поведения вихрей и рассмотрены приложения этой теории к реальному океану. Причем только для режима неограниченного вытягивания оказалась самостоятельная

область, где другие типы поведения невозможны. Остальные типы поведения попарно объединены во всех возможных вариантах, а также существует зона, в которой объединены все три типа поведения вихрей. На рис. 1, заимствованном из работы [9], демонстрируются зоны различного поведения вихрей на плоскости параметров $\left(\frac{\sigma}{e}; \frac{\gamma}{e}\right)$ при $K = 1$.

В работе [7] показано, что границы областей различного поведения вихрей для разных значений параметра K самоподобны и могут быть получены из ситуации $K = 1$ простым растяжением (сжатием) оси $\frac{\sigma}{e}$ с коэффициентом растяжения, зависящим от K . На рис. 2 представлен график коэффициента растяжения как функции от K .

Таким образом, схема на рис. 1 совместно с рис. 2 позволяют определить тип поведения бароклинных вихрей (вращение, нутационные колебания или неограниченное вытягивание) подобных эллипсоидальных вихрей на плоскости параметров подобия $\left(\frac{\sigma}{e}; \frac{\gamma}{e}\right)$ при фиксированном третьем параметре подобия K . Для такого анализа не нужен параметр горизонтальной вытянутости, поскольку в такой постановке он является переменной величиной.

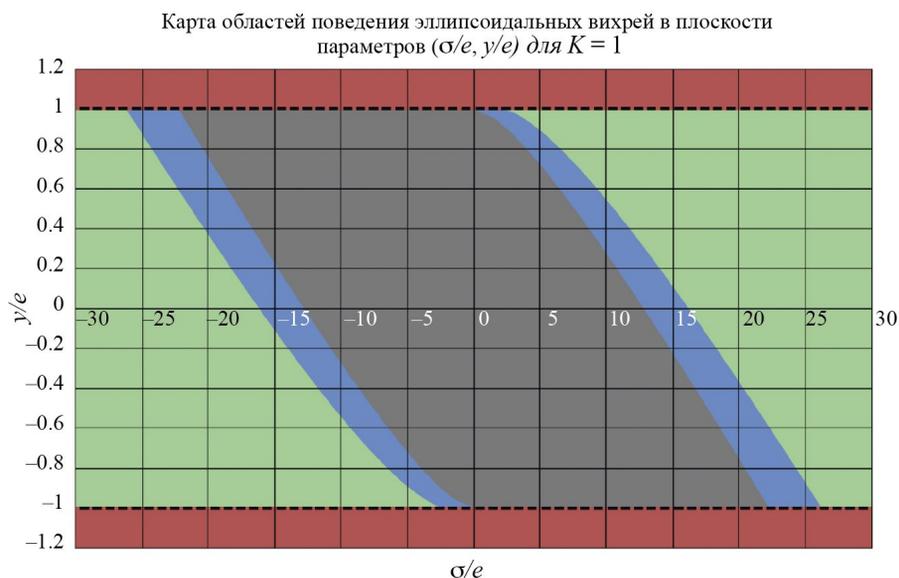


Рис. 1. Схема различных типов поведения вихрей в плоскости параметров $\left(\frac{\sigma}{e}; \frac{\gamma}{e}\right)$ для $K = 1$. Серая зона – неограниченное вытягивание вихрей; синяя зона – вытягивание и колебание; зеленая зона – все три варианта (вытягивание, вращение, колебание); красная зона – колебание и вращение (вытягивание запрещено).

Баротропные вихри как частный случай при $K \rightarrow \infty$ также содержатся на рис. 1. При увеличении K границы областей различного типа поведения вихрей стягиваются к оси ординат, но не достигают ее. Предельно положение этих границ описывает сердцевину серой зоны, в которой бароклинные вихри неминуемо вытягиваются при любых значениях K . Одновременно эта сердцевина соответствует зоне неминуемого вытягивания в баротропных течениях вихрей Кирхгофа в 2D-случае. На рис. 2 положение сердцевины и границ синей и зеленой зон для плоских вихрей формально относится к случаю $K \rightarrow \infty$, но довольно точно соответствует значению $K = 10$.

Данные на рис. 1 и 2 относятся к вихрям эллипсоидальной формы, однако все применяемые координаты записаны как безразмерные числа подобия для более общих форм вихревых ядер. Это дает надежду на справедливость качественного поведения вихрей более сложной формы ядра аналогично поведению эллипсоидальных вихрей. Особое место на рис. 1, по-видимому, принадлежит зоне неминуемого вытягивания вихрей (серой зоне) и ее центральной сердцевине, где, как мы ожидаем, вихри любой формы должны неограниченно вытягиваться. Отметим, что сильное вытягивание вихря приведет к тому, что его вихревое ядро выйдет из области справедливости линейной зависимости фонового течения от координат и в результате слишком длинное ядро начнет изгибаться сообразно реальной зависимости поля фонового течения от координат, приобретая сложную геометрическую форму. Аналогично интересной областью на рис. 1 являются две полуплоскости с безразмерными параметрами, накладываемыми на фоновое течение

$\left| \frac{\gamma}{e} \right| > 1$ (красная зона). Здесь эллипсоидальные вихри не могут вытягиваться, оставаясь ограниченно-локализованными. Причем какие-либо условия на параметры вихря вообще отсутствуют. В этой зоне от вихрей более сложной формы также следует ожидать, что они при деформации останутся локализованными вихревыми образованиями без заметного вытягивания ядра в горизонтальной плоскости.

Наконец, имеет смысл сделать некоторые замечания по поводу баротропности и равнозавихренности фонового течения в реалии. Вихрь влияет на область, окружающую вихревое ядро, на ограниченных расстояниях порядка размеров самого вихря, то есть вверх и вниз на расстояния порядка толщины вихревого ядра и по горизонтали вокруг ядра на расстояние порядка диаметра вихря. Это свойство получено в расчетах полей течений от вихря (см., например, [5]). Аналогично, вихрь “чувствует” влияние фоновых течений на себя примерно на тех же расстояниях. Естественно ожидать, что течения дальней зоны никак на деформации вихря не сказываются. В результате ограничения, которые мы наложили на поле фонового течения, касаются ближней зоны. Как ведет себя фоновое течение вдали от вихря, нам не важно. Однако с математической точки зрения удобно продлить свойства фоновых течений из ближней зоны на дальнюю, чтобы упростить применение математического аппарата. Именно это и было сделано. В результате удобным фоновым течением оказалось баротропное течение в неограниченном пространстве. Реально же нам требуется баротропное течение в окрестности ядра вихря.

График функции $\Phi(K)$

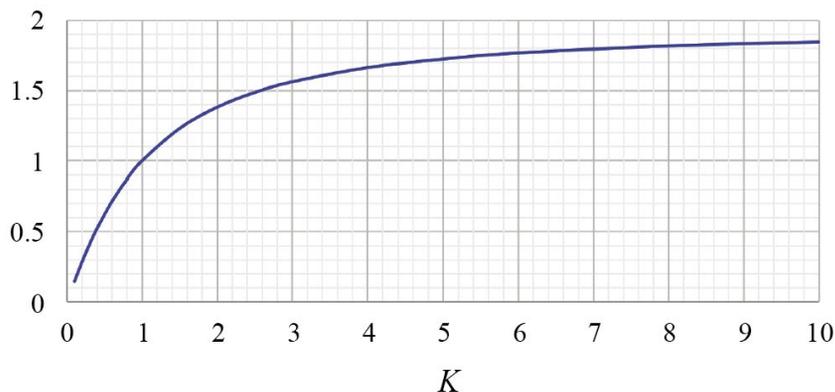


Рис. 2. Коэффициент пропорциональности $\Phi(K)$ для пересчета границ серой и синей зон для разных значений параметра сплюснутости K .

КАКОЙ ВИХРЬ СЧИТАТЬ ИНТЕНСИВНЫМ ПРИ ИЗУЧЕНИИ КОНКРЕТНЫХ ЯВЛЕНИЙ И ПО КАКИМ ПАРАМЕТРАМ СРАВНИВАТЬ ИНТЕНСИВНОСТЬ?

Ответ на этот простой вопрос не так очевиден. Действительно, мы можем предложить несколько критериев, которые в той или иной степени можем связать с интенсивностью вихря. Ниже приведены физические свойства вихрей, по которым можно судить об их интенсивности:

1. Потенциальная завихренность ядра.
2. Интегральная потенциальная завихренность по объему ядра вихря.
3. Относительная завихренность ядра.
4. Интегральная относительная завихренность по объему ядра вихря.
5. Интенсивность скорости циркуляции.
6. Перепад давления между центром вихря и его периферией.
7. Величина энергии (кинетической, доступной потенциальной, общей).
8. Поток объема воды вихревого ядра, участвующий во вращении.
9. Деформация поля плотности (частоты Вейселя–Брента).

Этот вопрос особенно интересен для геометрически подобных вихрей, т.е. вихрей, у которых совпадают безразмерные геометрические параметры ε и K . Могут ли вихри с позиций теории подобия быть разной интенсивности — один из подобных вихрей слабый, а другой сильный. Сам по себе вопрос об интенсивности вихря возникает при обезразмеривании его характеристик.

1. Рассмотрим функцию тока эллипсоидально-го вихря, представленную соотношением (7). Величина функции тока определяется размерным фактором σab . При совпадении геометрических параметров подобия $\varepsilon u K$ ε и K двух вихрей более интенсивным с позиции функции тока является тот вихрь, у которого размерный множитель σab больше. По своему физическому смыслу разница функции тока в двух точках на одном горизонте равна потоку вектора скорости через линию, соединяющую эти две точки. Например, если в качестве первой точки взять центр вихря, а в качестве второй точки — периферию ядра вихря, причем обе точки — в плоскости главного сечения, то поток скорости больше будет у вихря с большим значением σab . Если мы хотим посчитать поток вращающейся массы по всей толщине ядра,

то придется суммировать вышеуказанные потоки по всем горизонтам. Это приведет к умножению параметра σab на вертикальный размер ядра c . С учетом того, что объем вихревого ядра равен $V = \frac{4}{3}\pi abc$, фактически мы показали, что среди

подобных вихрей наиболее интенсивно “крутит” большие объемы воды вихрь, у которого больше интегральная потенциальная завихренность ядра σV . В данном случае удобной мерой интенсивности служит параметр σV .

2. Рассмотрим вихрь с позиции величины относительной завихренности. Согласно теории эллипсоидальных вихрей, ротор скорости вихря одинаков во всех внутренних точках вихревого ядра:

$$\frac{\text{rot}_z \vec{u}}{\sigma} = \frac{1}{2} K \int_0^\infty \frac{\left(2\tilde{\mu} + \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right) \cdot d\tilde{\mu}}{\left(\tilde{\mu}^2 + \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right)\tilde{\mu} + 1\right)^{3/2} \left(K^2 + \tilde{\mu}\right)^{1/2}}. \quad (26)$$

Правая часть уравнения (26) одинакова у геометрически подобных вихрей. Следовательно, с позиции величины относительной завихренности ядра среди подобных вихрей наиболее интенсивен вихрь с наибольшей потенциальной завихренностью. Поэтому в данном случае мерой интенсивности следует считать потенциальную завихренность σ . Размеры ядра или его объем в данном случае не важны.

3. Для величины средней скорости циркуляции u_τ на периферии главного сечения ядра в работе [6] было получено рабочее соотношение

$$u_\tau = \sqrt{\frac{1}{2}} b \sigma \frac{1 - \frac{1}{2} K \int_0^\infty \frac{d\tilde{\mu}}{\left(\tilde{\mu}^2 + i\tilde{\mu} + 1\right)^{1/2} \left(K^2 + \tilde{\mu}\right)^{3/2}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{i^2}}}. \quad (27)$$

Здесь $i = \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}$, $-b$ малая горизонтальная полюсь вихревого ядра. Для подобных вихрей переменной размерной величиной с позиции скорости циркуляции служит характеристика σL (L — характерный горизонтальный размер). В данном случае важно произведение потенциальной завихренности на характерный горизонтальный размер ядра вихря.

Для сильно длинных вихрей (малых поперечных размеров b) там же получена асимптотика

$$u_\tau = \sqrt{\frac{1}{2}} b \sigma, \quad (28)$$

указывающая на то, что тонкие в поперечном горизонтальном направлении длинные вихри малоэффективны в индуцировании течений вокруг себя и скорее напоминают пассивную примесь. При изучении скорости циркуляционного движения вокруг вихря параметром, определяющим интенсивность вихря и по которому естественно сравнивать подобные вихря, является σL .

4. Перепад давления δP между центром вихря и его периферией можно определить с точностью до постоянного множителя через разницу в тех же точках функции тока (7). Для геометрически подобных вихрей размерный множитель, определяющий численное значение этой величины, равен σab или, что то же самое, σS или σL^2 , где S — площадь главного горизонтального сечения вихря, L — его характерный горизонтальный размер. Таким образом, с точки зрения величины перепада давления важен квадрат горизонтального размера вихря и потенциальная завихренность его ядра.

5. Наличие вихря меняет поле плотности. В частности, при фоновом значении N_0 частоты Вайсяля–Брента в вихревом ядре реализуется новая величина этой N частоты, связанная со свойствами вихря соотношением [6]:

$$N^2 = N_0^2 \left(1 + \frac{1}{f} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{z}^2} \right), \quad (29)$$

где для внутренних точек ядра вихря справедливо уравнение

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{z}^2} = \frac{\sigma}{2} K \int_0^\infty \frac{d\tilde{\mu}}{(\tilde{\mu}^2 + i\tilde{\mu} + 1)^{1/2} (K^2 + \tilde{\mu})^{3/2}}. \quad (30)$$

Как следует из (29), относительное изменение квадрата частоты Вайсяля–Брента в ядре $\frac{N^2 - N_0^2}{N_0^2}$ связано со свойствами вихря соотношением

$$\frac{N^2 - N_0^2}{N_0^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma}{f} K \int_0^\infty \frac{d\tilde{\mu}}{(\tilde{\mu}^2 + i\tilde{\mu} + 1)^{1/2} (K^2 + \tilde{\mu})^{3/2}}, \quad (31)$$

линейным по параметру σ потенциальной завихренности ядра. Отсюда следует, что при оценке эффектов деформации поля плотности вихрем мерой интенсивности вихря может служить потенциальная завихренность ядра. Конечно, нужно учитывать, что для циклонических вихрей (в Северном полушарии $\sigma > 0$) ограничений на величину потенциальной завихренности ядра нет,

в то время как для антициклонов (в Северном полушарии $\sigma < 0$ величина $|\sigma|$ не может превысить некоторый пороговый уровень, так чтобы в (29) выполнялось неравенство $1 + \frac{1}{f} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{z}^2} \geq 0$. В данном случае размер ядра вихря не важен.

6. Рассмотрим с аналогичных позиций энергетику вихря. Согласно работе [6], полная энергия вихря, включающая кинетическую и доступную потенциальную энергию как внутреннего объема ядра, так и его внешней части, выражается соотношением

$$H = \frac{3}{40\pi} \rho_0 \frac{V^2 \sigma^2}{c} K \int_0^\infty \frac{d\tilde{\mu}}{\sqrt{(\tilde{\mu}^2 + i\tilde{\mu} + 1)(K^2 + \tilde{\mu})}}. \quad (32)$$

Для подобных вихрей переменной размерной характеристикой интенсивности вихря служит блок $\frac{V^2 \sigma^2}{c}$. Сюда входит квадрат интегральной

потенциальной завихренности ядра в числителе и вертикальный размер вихря в знаменателе. Этот же блок можно записать в других, возможно более удобных, переменных — $\sigma^2 L^3 c^2$. Последнее соотношение показывает, что интенсивность вихря с позиций полной энергии зависит как от горизонтальных, так и от вертикальных размеров в разных степенях и, что естественно, от потенциальной завихренности ядра.

Отдельно рассмотрим энергию ядра вихря. В той же работе выведены соотношения двух видов энергии — кинетической H_{core}^k и доступной потенциальной H_{core}^p . Расчетные формулы приведены ниже:

$$H_{core}^k = \frac{1}{40} \rho_0 \sigma^2 V_0 ab K^2 \times \left[\varepsilon \left(\int_0^\infty \frac{1}{\varepsilon + \mu} \frac{d\mu}{\sqrt{(\varepsilon + \mu) \left(\frac{1}{\varepsilon} + \mu \right) (K^2 + \mu)}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_0^\infty \frac{1}{\varepsilon + \mu} \frac{d\mu}{\sqrt{(\varepsilon + \mu) \left(\frac{1}{\varepsilon} + \mu \right) (K^2 + \mu)}} \right) \right] \quad (33)$$

$$H_{core}^k = \frac{1}{40} \rho_0 \sigma^2 V_0 ab K^4 \times \left(\int_0^\infty \frac{1}{K^2 + \mu} \frac{d\mu}{\sqrt{(\varepsilon + \mu) \left(\frac{1}{\varepsilon} + \mu \right) (K^2 + \mu)}} \right)^2. \quad (34)$$

Размерный множитель, от которого зависит численное значение энергии H_{core}^k и H_{core}^p геометрически подобных вихрей, одинаков — $\sigma^2 V_0 ab$. Этот блок можно записать в более простом виде $\sigma^2 L^4 c$. Численное значение энергии ядра геометрически подобных вихрей зависит степенным образом от горизонтальных и вертикальных размеров вихревого ядра и от квадрата потенциальной завихренности ядра.

Как показано, различные физические свойства вихрей, на которые можно сослаться при оценке их интенсивности, в общем случае зависят от потенциальной завихренности ядра и двух характерных размеров — горизонтального и вертикального.

Если сравнивать интенсивность геометрически подобных вихрей по относительной завихренности ядра, то единственный размерный параметр, от которого зависит эта характеристика, — это потенциальная завихренность. Размеры ядра не важны. Это же свойство проявляется при сравнении геометрически подобных вихрей по эффекту деформации поля плотности, а именно относительно изменению вихрями частоты Вайсяля–Брента в ядрах.

Если сравнивать интенсивность геометрически подобных вихрей по скорости циркуляционного движения по периферийной границе ядра, то важным размерным параметром станет произведение σL потенциальной завихренности σ и горизонтального размера ядра L . Для геометрически подобных вихрей вертикальный размер не играет роли.

Сравнение подобных вихрей по перепаду давления в центре вихря и на его периферии выводит на первое место параметр σL^2 . При сравнении геометрически подобных вихрей по способности крутить большие объемы воды в своих ядрах параметром сравнения является интегральная потенциальная завихренность ядра σV или $\sigma L^2 c$.

Сравнение энергии геометрически подобных вихрей привело к пониманию, что важными размерными параметрами являются произведение $\sigma^2 L^3 c^2$ различных степеней горизонтального и вер-

тикального размеров ядра вихря (для полной энергии ядра и внешней к ядру вращающейся жидкости) или $\sigma^2 L^4 c$ для кинетической и доступной потенциальной энергии вихревого ядра. Величина указанных параметров $\sigma^2 L^3 c^2$ или $\sigma^2 L^4 c$ может служить мерой интенсивности вихрей при энергетическом сравнительном подходе к вихрям.

В целом во все критерии множителем входит потенциальная завихренность ядра σ в первой или второй степени. Это означает, что интенсивные вихри, по каким бы физическим проявлениям мы их ни сравнивали, должны иметь большую потенциальную завихренность σ . Более детальное рассмотрение физических механизмов воздействия вихрей на конкретные процессы и характеристики вихрей показывает, что интенсивность вихревых структур может измеряться в виде произведения степеней трех характеристик — σ , горизонтального и вертикального размеров L и c .

СТЕПЕНЬ БАРОТРОПНОСТИ ЯДРА БАРОКЛИННОГО ВИХРЯ

Физическая интерпретация основного уравнения (1) — сохранения потенциальной завихренности σ у движущихся частиц, которую можно представить как сумму двух составляющих — эффекта от вращения и эффекта от сжатия по вертикали жидких частиц

$$\sigma = \text{rot}_z \vec{u} + \frac{\partial f^2}{\partial z} \frac{\partial \psi}{N^2 \partial z}. \quad (35)$$

Относительная завихренность $\text{rot}_z \vec{u}$ связана с вращением частиц, а второе слагаемое в (35) описывает вертикальное сжатие (растяжение) частиц. В первом слагаемом $\text{rot}_z \vec{u}$ зависимость поля скорости от вертикальной координаты неважна, но важна зависимость от горизонтальных координат. Во втором слагаемом, наоборот, важна зависимость функции тока именно от вертикальной координаты. Наличие в (35) слагаемого $\frac{\partial f^2}{\partial z} \frac{\partial \psi}{N^2 \partial z}$

определяет тот факт, что рассматриваемый вихрь бароклинный. При отсутствии в (35) члена $\frac{\partial f^2}{\partial z} \frac{\partial \psi}{N^2 \partial z} \equiv 0$ изучаемый вихрь окажется баротропным. Таким образом, с позиции потенциальной завихренности бароклинный вихрь состоит из баротропной и бароклинной составляющих, в то время как баротропный вихрь является чисто баротропным. При $N = \text{const}$ в предположении эллипсоидальности вихревых ядер обе составляющие вычисляются аналитически для точек вну-

три ядра, являются функциями от параметров ε и K и одинаковы по всему объему ядра:

$$\frac{\text{rot}_z \vec{u}}{\sigma} = \frac{1}{2} K \int_0^\infty \frac{(2\mu + i)d\mu}{(K^2 + \mu)^{1/2} (\mu^2 + i\mu + 1)^{3/2}}, \quad (36)$$

$$i = \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial z} \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} =$$

$$= \frac{1}{2} K \int_0^\infty \frac{d\mu}{(K^2 + \mu)^{3/2} (\mu^2 + \nu\mu + 1)^{1/2}}. \quad (37)$$

При этом справедлива связь

$$\frac{\text{rot}_z \vec{u}}{\sigma} + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 1, \quad (38)$$

позволяющая утверждать, что вклад обеих составляющих в потенциальную завихренность ядра меняется при вытягивании или утолщении вихрей. В частности, при увеличении ε и сохранении K увеличивается доля баротропной составляющей.

Минимальное значение $\frac{\text{rot}_z \vec{u}}{\sigma}$ при фиксированном вертикальном размере ядра соответствует круглому в плане вихрю, при этом интегралы (36), (37) вычисляются в элементарных функциях. В частности, из (36) при $\varepsilon = 1$ следуют соотношения:

$$\frac{\text{rot}_z \vec{u}}{\sigma} = \begin{cases} \frac{K}{(1-K^2)^2} \left[\arccos K - K\sqrt{1-K^2} \right] & \text{при } 0 < K < 1 \\ \frac{2}{3} & \text{при } K = 1 \\ \frac{K^2}{K^2-1} + \frac{K}{(K^2-1)^{3/2}} \ln(K - \sqrt{K^2-1}) & \text{при } K > 1. \end{cases} \quad (39)$$

На рис. 3 изображена зависимость $\frac{\text{rot}_z \vec{u}}{\sigma}$ от параметра K согласно (39), указывающая, что для круглых тонких вихрей $K < 0.6$ бароклиническая составляющая превосходит вклад от баротропной составляющей $\frac{1}{\sigma} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} > \frac{\text{rot}_z \vec{u}}{\sigma}$. Наоборот, для относительно «толстых» вихрей $K > 0.6$ наблюдается обратный эффект. Неограниченное увеличение

$K \rightarrow \infty$ как параметра приведет к предельному соотношению $\frac{\text{rot}_z \vec{u}}{\sigma} \rightarrow 1$, что соответствует плоской

гидродинамике и тому, что относительная завихренность $\text{rot}_z \vec{u}$ сама станет лагранжевым инвариантом. Следует отметить, что значения параметра K для вихрей в реальном океане небольшие, порядка 0.1–0.3 и вряд ли превысят 0.4. Поэтому потенциальная завихренность как вихрей верхнего деятельного слоя океана, так и внутритермоклинных линз в основном определяется бароклинической составляющей. Однако в морях Северного Ледовитого океана параметр K может приблизиться к единице. Для таких вихрей баротропная и бароклиническая составляющие в потенциальной завихренности ядра примерно одинаковые.

ОБСУЖДЕНИЕ

Согласно предложенной теории, для описания идентичности квазигеострофических вихрей на течениях в природе и лабораторном (вычислительном) эксперименте требуется от четырех до двух безразмерных параметров. При дополнительных физических условиях по сравнению с условиями нашей теории могут возникнуть и другие безразмерные числа подобия. Рассмотрим несколько экспериментальных работ по близкой тематике. В работах [3, 4] моделировался процесс периодического вихреобразования (образования цепочек вихрей) за мысами и полуостровами в невращающейся и вращающейся средах. В качестве главного исследуемого безразмерного числа подобия выступает число Струхалия и отмечается, что вихреобразование сильнейшим образом связано со свойствами течения. Однако подобие по течениям в эксперименте и природе в работе не анализируется. Использование параметра подобия течений позволило бы от качественного описания явления перейти к их количественным характеристикам.

В работе [12] изучалась устойчивость первоначально осесимметричных вихрей. Согласно нашей теории, такое явление следовало бы описывать в рамках двух безразмерных чисел — безразмерной интенсивности вихря и числа Бургера (он же — параметр вертикальной сплюснутости ядра). В указанной статье тоже два безразмерных параметра — число Фруда и число Бургера, эквивалентных нашим безразмерным числам. В этом смысле авторы работы [12] использовали все возможности безразмерного подхода. При внесении в эксперимент дополнительного качества — уклона дна бассейна (аналог β -эффекта), в их анализе должен был бы появиться еще один безразмерный параметр. Однако авторы ограничились

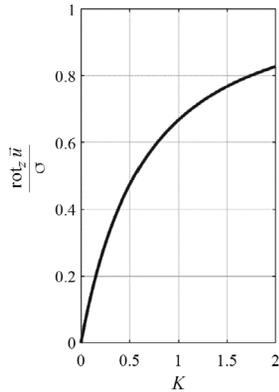


Рис. 3. Баротропная составляющая $\frac{\text{rot}_z \vec{u}}{\sigma}$ осесимметричного бароклинного вихря в зависимости от параметра вертикальной сплюснутости K . График заимствован из работы [18], где он использовался для других целей.

качественным описанием влияния уклона дна на устойчивость вихрей.

Таким образом, рассмотренные немногочисленные примеры показывают, что в ряде экспериментальных работ можно более эффективно использовать аппарат подобия явлений, позволяющий от качественного описания перейти к количественному. Кроме того, в предложенной нами теории присутствует безразмерный параметр геометрического подобия течений $\frac{\gamma}{e}$, где $\gamma = \frac{1}{2} \text{rot}_z \vec{u}$, $\vec{u} = (u, v)$ — горизонтальный вектор скорости фонового течения, а e — коэффициент деформации. В физической океанологии, как практической, так и теоретической, $\text{rot}_z \vec{u}$ (относительная завихренность) используется активно, в то время как коэффициент деформации $e = \frac{1}{l} \frac{dl}{dt}$ (l — размер жидкой частицы в направлении удлинения), как правило, не рассматривается, за редким исключением [5, 7–11, 19].

Предложенная теория подобия не претендует на всеобщность, хотя бы из-за того, что в физической постановке отсутствует β -эффект, а число Россби предполагается малым. В случае учета обоих факторов число безразмерных параметров, описывающих более общие явления, увеличится как минимум на два: число Россби и безразмерное число, привязанное к β -эффекту. Роль последнего может выполнять следующие безразмерные комбинации: $\beta L / \Gamma$ (L — характерный горизонтальный размер явления, Γ — величина характерного горизонтального градиента фоновой скорости)

или $\beta L^2 / U$ (U — характерная скорость фонового потока). Последним вариантом пользовались К. Н. Федоров и А. И. Гинзбург [15], при оценке роли β -эффекта и нелинейности в динамике локализованных вихрей океана.

ВЫВОДЫ

В работе изложены критерии подобия для квазигеострофических 3D-вихрей на фоне крупномасштабных баротропных течений в стратифицированной по плотности вращающейся жидкости.

Показано, что в общем случае в условиях задачи существует четыре критерия подобия, три из которых связаны с геометрическим подобием (два — с геометрическим подобием вихревых ядер, один — с геометрическим подобием фоновых течений) и один критерий относится к относительной интенсивности вихря — подобие интенсивностей вихрей. Число Бургера, входящее в основное уравнение при описании вихрей, также является одним из критериев подобия, но в нашем случае мы его трактуем как одно из безразмерных параметров геометрического подобия. Несколько неожиданным оказалось, что в критерии геометрического подобия как элемент входит фоновая частота Вьяйсяля-Брента. Полный набор безразмерных параметров подобия для бароклинных вихрей в баротропных течениях — $(\frac{\sigma}{e}; \frac{\gamma}{e}; \varepsilon; K)$.

Параметр $\frac{\sigma}{e}$ ответственен за подобие по интенсивности вихрей, параметр $\frac{\sigma}{e}$ отвечает за подобие течений, параметр ε — геометрическое подобие в горизонтальной плоскости, параметр K (он же число Бургера) отвечает за подобие по вертикали.

Для описания подобия баротропных вихрей под воздействием баротропных течений необходимы три параметра подобия $(\frac{\sigma}{e}; \frac{\gamma}{e}; \varepsilon)$.

Для осесимметричных вихрей, как бароклинных, так и баротропных, один из геометрических параметров подобия вихрей ε из рассмотрения выпадает и остается для бароклинных вихрей три критерия подобия — геометрическое подобие вихря по вертикали, геометрическое подобие течений и подобие интенсивностей вихрей $(\frac{\sigma}{e}; \frac{\gamma}{e}; K)$,

а для описания подобия баротропных вихрей под воздействием баротропных течений необходимы два параметра подобия $(\frac{\sigma}{e}; \frac{\gamma}{e})$.

Применительно к эллипсоидальным вихрям предложена новая трактовка карты зон различного типа поведения вихрей в безразмерных координатах параметров подобия. Продемонстрирована автомодельность границ вышеуказанных зон.

Источник финансирования. Работа выполнена при финансовой поддержке государственного задания Института океанологии РАН им. П. П. Ширшова FMWE-2023-0002 (исследование подобия вихрей, первая часть статьи) и гранта РНФ № 22-17-00267 (изучение сопутствующих явлений, вторая часть статьи).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баренблатт Г. И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Теория и приложения к геофизической гидродинамике. Л.: Гидрометеиздат, 1982. 256 с.
2. Голицын Г. С. Статистика и динамика природных процессов и явлений: Методы, инструментарий, результаты. М.: Из-во «Красанд», 2012. 400 с.
3. Елкин Д. Н., Зацепин А. Г. Лабораторное исследование механизма периодического вихреобразования за мысами в прибрежной зоне моря // *Океанология*. 2013. Т. 53. № 2. С. 259–268.
4. Елкин Д. Н., Зацепин А. Г. Лабораторное исследование механизма сдвиговой неустойчивости морского вдольберегового течения // *Океанология*. 2014. Т. 54. № 5. С. 614–621.
5. Жмур В. В. Мезомасштабные вихри в океане. М.: ГЕОС, 2011. 290 с.
6. Жмур В. В., Арутюнян Д. А. Перераспределение энергии при горизонтальном вытягивании океанских вихрей баротропными течениями // *Океанология*. 2023. Т. 63, № 1. С. 3–19. <https://doi.org/10.31857/S0030157423010185>
7. Жмур В. В., Белоненко Т. В., Новоселова Е. В. и др. Эволюции мезомасштабных вихрей океана в неоднородных баротропных течениях // *ФАО*. 2023 (в печати).
8. Жмур В. В., Белоненко Т. В., Новоселова Е. В., Суетин Б. П. Прямой и обратный каскад энергии при вытягивании вихрей в океане // *Доклады Российской академии наук. Науки о Земле*. 2023. Т. 508. № 2. С. 270–274. <https://doi.org/10.31857/S2686739722602113>
9. Жмур В. В., Белоненко Т. В., Новоселова Е. В., Суетин Б. П. Условия трансформации мезомасштабного вихря в субмезомасштабную вихревую нить при вытягивании его неоднородным баротропным течением // *Океанология*. 2023. Т. 63. № 2. С. 200–210. <https://doi.org/10.31857/S0030157423020144>
10. Жмур В. В., Белоненко Т. В., Новоселова Е. В., Суетин Б. П. Приложение к реальному океану теории трансформации мезомасштабного вихря в субмезомасштабную вихревую нить при вытягивании его неоднородным баротропным течением // *Океанология*. 2023. Т. 63. № 2. С. 211–223. <https://doi.org/10.31857/S0030157423020156>
11. Жмур В. В., Панкратов К. К. Динамика эллипсоидального приповерхностного вихря в неоднородном потоке // *Океанология*. 1989. Т. 29. № 2. С. 205–211.
12. Зацепин А. Г., Елкин Д. Н., Шварцман Д. Р. Предварительные результаты лабораторных исследований эволюции нефронтальных вихрей в двуслойной вращающейся жидкости // *Океанологические исследования*. 2023. Т. 51. № 1. С. 5–35.
13. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Т. 2. ОГИЗ. М., Л.: Гостехиздат, 1948. 612 с.
14. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1977. 736 с.
15. Fedorov K. N., Ginsburg A. I. “Mushroom-like” currents (vortex dipoles) in the ocean and in a laboratory tank // *Annales Geophys.* 1986. V. 4B, № 5. P. 507–516.
16. Meacham S. P. Quasigeostrophical ellipsoidal vortices in stratified fluid // *Dynamics of Atmospheres and Oceans*. 1992. V. 16. № 3–4. P. 189–223.
17. Meacham S. P., Pankratov K. K., Shchepetkin A. F., Zhmur V. V. The interaction of ellipsoidal vortices with background shear flows in a stratified fluid // *Dynamics of Atmospheres and Oceans*. 1994. V. 21. № 2–3. P. 167–212. [https://doi.org/10.1016/0377-0265\(94\)90008-6](https://doi.org/10.1016/0377-0265(94)90008-6).
18. Zhmur V. V., Novoselova E. V., Belonenko T. V. Peculiarities of formation of the density field in mesoscale eddies of the Lofoten Basin: Part 1 // *Oceanology*. 2021. V. 61. № 6. P. 830–838. <https://doi.org/10.1134/S0001437021060333>
19. Zhmur V. V., Pankratov K. K. Dynamics of desingularized quasigeostrophic vortices // *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*. 1991. V. 3. № 5. P. 1464–1464. <https://doi.org/10.1063/1.857998>.

THE SIMILARITY OF QUASI-GEOSTROPHIC VORTICES AGAINST THE BACKGROUND OF LARGE-SCALE BAROTROPIC CURRENTS

V. V. Zhmur[#]

Shirshov Institute of Oceanology of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

[#]*e-mail: zhmur-vladimir@mail.ru*

The paper proposes a theory of similarity of quasi-geostrophic vortices against the background of large-scale flows. This information is useful when planning laboratory and numerical experiments to study mesoscale and submesoscale vortex dynamics of vortices interacting with currents. Special attention is paid to the study of geometric similarity of phenomena. It is revealed that the complete set of dimensionless similarity numbers of baroclinic vortices includes four dimensionless parameters: the dimensionless intensity of the vortex, the geometric similarity of the background flow (the ratio of relative vorticity to the deformation coefficient of the background flow), the coefficient of horizontal elongation of the vortex core and the coefficient of vertical oblateness of the vortex core coinciding with the Burger number. To describe the similarity of barotropic vortices against the background of barotropic flows, the number of necessary dimensionless parameters is reduced by one number — the coefficient of vertical oblateness of the vortex core is eliminated from consideration. When studying axisymmetric vortices or vortex structures close to axisymmetric, another geometric parameter of the vortex is eliminated from consideration — the coefficient of horizontal elongation of the vortex core. As a result, the maximum possible set of similarity parameters includes four dimensionless numbers, and the minimum is two.

Keywords: vortex, vortex core, background flow, potential vorticity, relative vorticity, dimensionless similarity numbers, geometric similarity