

---

---

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОСМИЧЕСКОЙ  
ИНФОРМАЦИИ О ЗЕМЛЕ

---

---

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ ДИНАМИКИ  
МОРФОЛОГИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ АБРАЗИОННЫХ БЕРЕГОВ  
КРИОЛИТОЗОНЫ НА ОСНОВЕ КОМПЛЕКСИРОВАНИЯ  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И КОСМИЧЕСКОЙ СЪЕМКИ

© 2025 г. А. С. Викторов<sup>1</sup> \*

<sup>1</sup>Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт геоэкологии  
им. Е.М. Сергеева Российской академии наук (ИГЭ РАН), Москва, Россия

\*E-mail: vic\_as@mail.ru

Поступила в редакцию 23.05.2024 г.

Статья посвящена изучению закономерностей динамики абразионных берегов криолитозоны на основе комплекса математического моделирования и космической съемки и их значения для получения информации о динамических параметрах идущих процессов по дистанционным данным. Ландшафт абразионных берегов с развитием термоцирков представляет собой сочетание термоцирков, ландшафт находится под действием процессов как появления новых термоцирков, так и частичного или полного стирания существующих термоцирков за счет формирования новых. Характерной особенностью термоцирков является четкая дугообразная граница с прилегающей водораздельной поверхностью, хорошо дешифрируемая на материалах космических съемок. Методика включала создание и анализ математической модели изменения морфологического строения абразионных берегов криолитозоны на основе подходов теории случайных процессов и эмпирические исследования размеров термоцирков в разных физико-географических условиях по материалам космических съемок. Комплекс математического моделирования и космических методов позволил показать, что в разных физико-географических и геокриологических условиях при значительном времени развития на однородных участках формируется устойчивое стационарное распределение размеров термоцирков абразионных берегов криолитозоны Арктики. Различия условий разных участков не влияют на факт существования предельного стационарного распределения. Таким образом, морфологическая структура абразионного берега, находясь в постоянном изменении, тем не менее, имеет стационарное распределение размеров термоцирков, их средний размер и среднюю плотность расположения, то есть находится в состоянии динамического равновесия. Получена зависимость предельного распределения размеров термоцирков абразионных берегов и распределения размеров формирующихся молодых термоцирков. Физико-географические, геолого-геоморфологические и геокриологические условия участков влияют на характер стационарного предельного распределения через распределение размеров формирующихся молодых термоцирков. Полученные результаты позволяют прогнозировать количественные характеристики процесса формирования термоцирков (и соответственно оползней), а именно, распределение размеров возникающих новых термоцирков и оползней, по измерениям по материалам однократной космической съемки высокого разрешения наблюдаемых размеров термоцирков; это существенно при прогнозе развития, в частности, отступления, берегов.

*Ключевые слова:* математическая морфология ландшафта, абразионные берега, криолитозона, математические модели морфологических структур, данные дистанционного зондирования, математическое моделирование

DOI: 10.31857/S0205961425010039, EDN: DHTDJL

## ВВЕДЕНИЕ

Многие исследования посвящены морфологическим особенностям абразионных берегов криолитозоны. Обширная группа работ посвящена исследованию идущих процессов в связи с отступанием берегов (Белова и др., 2001; Новикова, 2002; Пижанкова, Добрынина, 2010; Aleksyutina et al., 2018; Belova et al., 2020), ландшафтным факторам,

влияющим на развитие процессов (Совершаев, 1998; Хомутов, Лейбман, 2008; Кизяков, 2005; Васильев и др. 2001), их связи с климатическими характеристиками (Leibman et al., 2021). Однако большинство исследователей изучает процессы развития абразионных берегов криолитозоны в связи с отступанием, и соответственно выполняется анализ протяженности морфологических элементов (термоцирков) и ее изменения в направлении

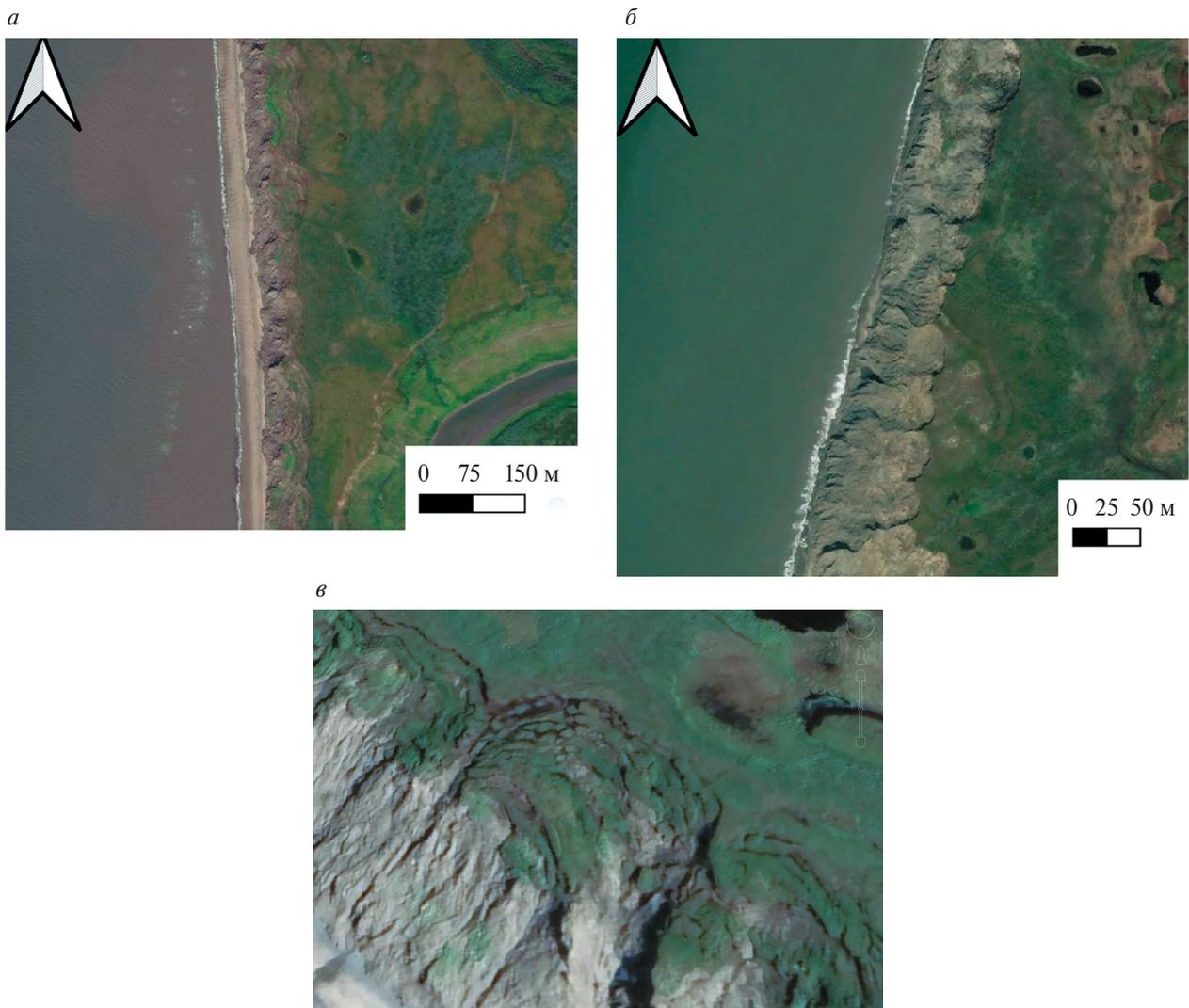
перпендикулярном береговой линии. В то же время, мало внимания уделялось исследованию протяженности термоцирков вдоль берегового склона и ее количественным параметрам.

Целью исследования явилось изучение закономерностей динамики абразионных берегов криолитозоны на основе комплекса математического моделирования и космической съемки и их значения для получения информации об идущих процессах, включая их количественные параметры, по дистанционным данным.

Ландшафт абразионных берегов с развитием термоцирков представляет собой сочетание термоцирков, включающих в себя оползневые тела разного возраста, поверхности с развитием интенсивных термоабразионных, эрозионных,

обвальных-осыпных и термоденудационных процессов. Характерной особенностью термоцирков является четкая дугообразная граница с прилегающей водораздельной поверхностью, хорошо дешифрируемая на материалах космических съемок, возникновение такой границы связано с тем, что формирование термоцирка начинается, как правило, с развития оползневых процессов. Нередко на склоне также наблюдаются дугообразные остаточные участки водораздельной поверхности, отвечающие различным стадиям оползания. Типичный вид берега представлен на рис. 1.

Исследование ориентировано на изучение изменения размеров термоцирков вдоль береговой линии, за размер термоцирка принималась длина хорды, замыкающей дугообразную границу термоцирка с прилегающей водораздельной поверхностью.



**Рис. 1.** Типичное изображение абразионных берегов с развитием термоцирков в криолитозоне на материалах космической съемки высокого разрешения видимого диапазона: *а, б* – общий вид (Викторов и др., 2023), *в* – пример термоцирка.

Развитие берегов происходит под действием комплекса процессов, участвующих в формировании значений размера термоцирка, включающего увеличение числа термоцирков за счет формирования нового термоцирка внутри границ существующего с разбиением более старого термоцирка на две части, уменьшение числа термоцирков за счет полного стирания термоцирков (и соответственно их хорд) при наложении более молодых, частичное стирание уже существующих термоцирков с сохранением их числа за счет наложения более молодых (“боковое стирание”), появление на том или ином участке нового формирующегося термоцирка.

В этом случае граница берегового склона и прилегающей водораздельной поверхности представляет собой систему дуг термоцирков, часть из которых является новыми, незатронутыми последующими стираниями, а другая часть является остаточными, сохранившимися после одно-, двух-, трех- и т.д. кратных частичных стираний существующих термоцирков новыми. Таким образом, в целом на снимке исследователь наблюдает в случайный момент времени (съемка) систему разновозрастных образований, находящуюся в постоянном изменении. В этой ситуации возникает задача – как соотносятся количественные характеристики наблюдаемого на космическом снимке изображения с количественными динамическими параметрами протекающего процесса формирова-

ния термоцирков, и соответственно какую информацию о процессе позволяет извлечь снимок.

## МЕТОДИКА

Методика включала следующие этапы:

- создание и анализ математической модели изменения морфологического строения абразионных берегов криолитозоны,
- исследование размеров термоцирков в разных физико-географических условиях с использованием спутниковых данных.

Математическая модель изменения морфологического строения абразионных берегов криолитозоны базировалась на рассмотрении протекающих изменений как случайного процесса.

Исследование размеров термоцирков в разных физико-географических условиях с использованием спутниковых данных включало:

- выбор ключевых участков,
- измерение размеров термоцирков по материалам космической съемки,
- статистическую обработку полученных характеристик морфологического строения берегового склона и анализ полученных результатов.

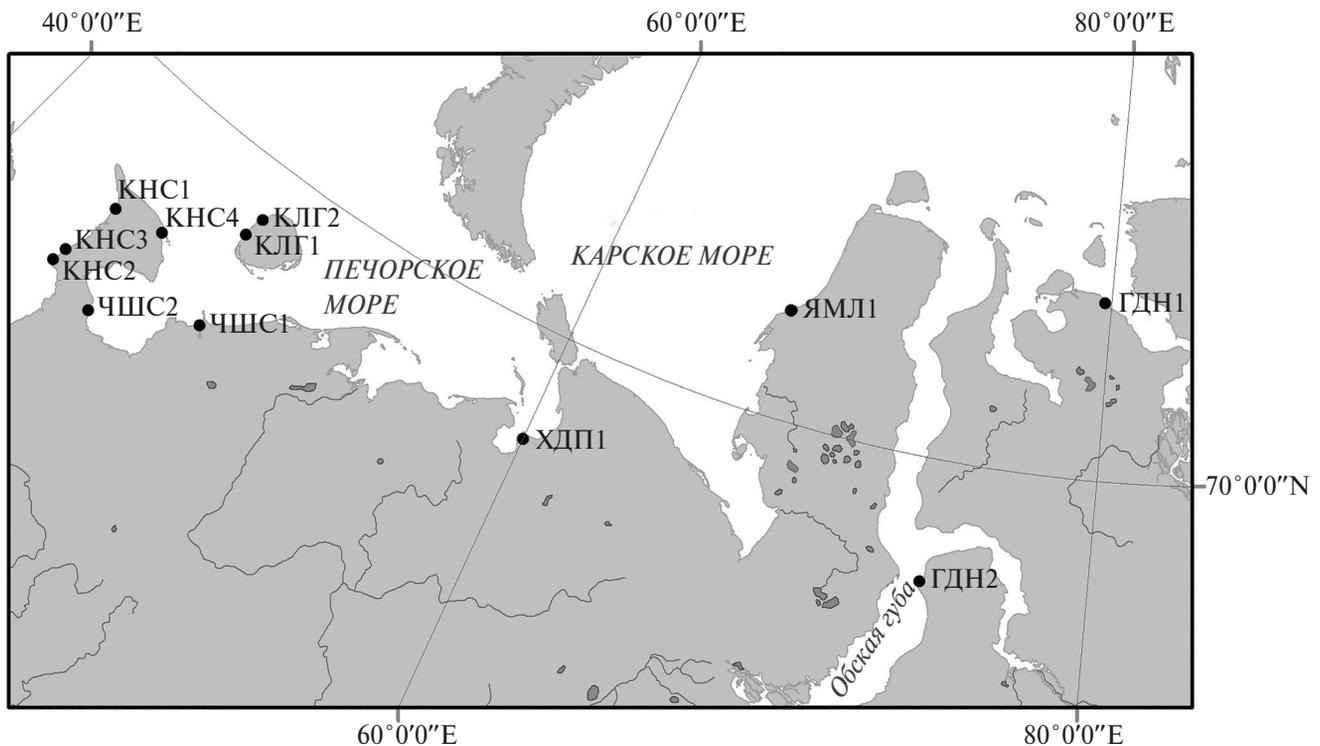


Рис. 2. Схема расположения ключевых участков.

Выбор ключевых участков выполнен на основе требований относительной морфологической однородности участка и однородности физико-географических, прежде всего, геолого-геоморфологических и геокриологических условий. В итоге было выбрано 12 участков протяженностью 2.5–10.1 км, имеющих в целом прямолинейное простирание (рис. 2) и расположенных в пределах береговой линии полуостровов Канин нос, Гыданский, Тазовский и Ямал, острова Колгуев, Хайпудырской губы.

Для анализа морфологических особенностей были использованы космические снимки высокого разрешения со спутников WorldView 3 (разрешение 0.3 м/пикс), GeoEye 1 (разрешение 0.5 м/пикс), WorldView 2 (разрешение 0.5 м/пикс) и ряда других.

## РЕЗУЛЬТАТЫ

Первой частью решения поставленной задачи является определение изменения вероятностного распределения размеров термоцирков во времени для оценки его поведения при значительном времени развития абразионного берега.

Для этого была использована предложенная ранее (Викторов, 2022) модель формирования морфологической структуры прямолинейного длинного абразионного берега ( $L$ ) с однородными физико-географическими и геокриологическими условиями, предполагается также относительное постоянство во времени климатических условий. Модель базируется на следующих допущениях:

– вероятность появления новых термоцирков (в количестве  $k = 1, 2, \dots$ ) за время  $\Delta u$  на отрезке береговой линии<sup>1</sup>  $\Delta l$  определяется только величинами временного интервала и отрезка<sup>2</sup>

$$p_1(\Delta l, \Delta u) = \lambda \Delta l \Delta u + o(\Delta l \Delta u),$$

$$p_k(\Delta l, \Delta u) = o(\Delta l \Delta u), k > 1,$$

где  $\lambda$  – параметр, отвечающий среднему числу термоцирков, формирующихся за единицу времени на единице длины береговой линии;

– размеры (длина хорды дуги) возникающих термоцирков не зависят от места их появления на участке и имеют постоянное вероятностное распределение  $F_0(x)$ , не зависящее от времени<sup>3</sup>.

<sup>1</sup> За положение термоцирка условно принято положение точки правой границы его хорды (начальная точка).

<sup>2</sup>  $o(\Delta x)$  здесь и далее в соответствии с обычными обозначениями – бесконечно малая более высокого порядка, чем  $\Delta x$ .

<sup>3</sup> Предполагаем, что распределение  $F_0(x)$  и другие распределения в работе имеют конечные среднее и дисперсию.

Анализ позволил показать (Викторов, 2022), что в этом случае появление новых термоцирков отвечает пуассоновскому случайному процессу, то есть вероятность появления  $k$  термоцирков на длине  $l$  за время  $u$  дается выражением

$$P_\mu(k) = \frac{(\lambda ul)^k}{k!} e^{-\lambda ul}. \quad (1)$$

Отсюда, если интересующий отрезок берега имеет размер  $\Delta v$ , вероятность однократного попадания правой границы формирующегося термоцирка внутрь этого отрезка за интервал времени  $\Delta u$ , исходя из предположений модели и пуассоновского характера процесса появления новых термоцирков (1), составляет

$$q = \lambda \Delta v \Delta u + o(\Delta u), \quad (2)$$

а вероятность непопадания правой границы формирующегося термоцирка внутрь этого отрезка равна

$$p_0^1 = e^{-\lambda \Delta v u}. \quad (3)$$

Кроме того, показано, что вероятность того, что рассматриваемый термоцирк не будет ни задет, ни стерт за время  $u$  формирующимся термоцирком с начальной точкой вне рассматриваемого термоцирка дается выражением

$$p_0^2 = e^{-\lambda a u}, \quad (4)$$

где  $a$  – математическое ожидание (средний размер) формирующихся (молодых) термоцирков.

На первом этапе получим уравнение для изменения вероятностного распределения размера термоцирка (длины хорды дуги термоцирка) во времени. Пусть размеры термоцирков в момент  $u$  имеют вероятностное распределение  $F(x, u)$ <sup>4</sup>. Рассмотрим поведение термоцирка за интервал времени  $(u, u + \Delta u)$ , возможны следующие случаи (рис. 2):

а) термоцирк остался без изменений,

б) разбиение более старого термоцирка на два элемента со стиранием некоторой части за счет формирования нового термоцирка внутри границ существующего (“внутреннее стирание”), при этом происходит увеличение общего числа термоцирков,

в) стирание части термоцирка (и соответственно части хорды) за счет наложения более молодых (“боковое стирание”),

г) полное стирание термоцирка (и соответственно хорды) при наложении сформировавшегося более молодого.

<sup>4</sup> Предполагаем, что распределение имеет конечные математическое ожидание и дисперсию, а также частные производные и непрерывные смешанные производные.

Три последних случая сопровождается появлением на том или ином участке нового сформировавшегося термоцирка (д).

Пусть общее число термоцирков в момент  $u$  равно  $n_0$ , и число термоцирков с хордой меньше  $x$  соответственно составляет

$$n_1(x, u) = n_0 F(x, u).$$

Рассмотрим существующий термоцирк, имеющий размер  $y$  (длина хорды), введем систему координат с нулем в правом конце хорды и направленную влево. Определим математическое ожидание числа термоцирков с хордой меньше  $x$  в момент  $u + \Delta u$ .

В случае (а) то, что термоцирк размером  $y$  не будет ни стерт, ни задет за интервал времени  $\Delta u$ , отвечает выполнению условия, состоящего в том, что начальная точка формирующегося термоцирка находится вне существующего термоцирка, но при этом термоцирк не задет (рис. 3а). С учетом пуассоновского характера процесса, формул (3) и (4), а также независимости рассматриваемых событий искомая вероятность дается выражением

$$p_0 = e^{-\lambda(a+y)\Delta u} = 1 - \lambda(a+y)\Delta u + o(\Delta u).$$

Соответственно математическое ожидание числа термоцирков с хордой меньше  $x$  в момент  $u + \Delta u$  при условии числа термоцирков  $n_0$  в момент  $u$  в случае (а) может быть получено путем интегрирования полученной выше вероятности для учета всех возможных размеров термоцирков с последующим умножением на число термоцирков  $n_0$  в момент  $u$ ,

$$N_0(x, u + \Delta u | n_0) = n_0 \int_0^x f(y, u) [1 - \lambda(a+y)\Delta u] dy + o(\Delta u),$$

где  $f(y, u)$  – плотность распределения размера термоцирка в момент  $u$ .

Вероятность внутреннего стирания ((b) см. выше) термоцирка размером  $y$  определяется тем, что как одна, так и вторая граничные точки нового оползня находятся внутри существующего, при этом возможны три варианта b1–b3:

(b1)  $0 < y < x$  (рис. 3б), при этом в любом случае происходит разбиение на два остаточных термоцирка с хордой меньше  $x$ , и с учетом равновероятности расположения начальной точки на любом отрезке  $\Delta y$  хорды (допущение 1) с вероятностью, данной в выражении (2), и учитывая условие, чтобы хорда нового термоцирка при этом не перекрывала конечную точку существующего (чтобы не было бокового стирания), интегрированием получаем вероятность внутреннего стирания за интервал времени  $\Delta u$

$$p_1 = \lambda \Delta u \int_0^y F_0(y-v) dv = \lambda \Delta u \int_0^y F_0(v) dv;$$

соответственно, математическое ожидание числа термоцирков при условии числа термоцирков  $n_0$  в момент  $u$  может быть получено путем интегрирования полученной выше вероятности для учета всех возможных размеров существующего термоцирка ( $y$ ) и с учетом формирования двух новых термоцирков с последующим умножением на число термоцирков  $n_0$  в момент  $u$ ,

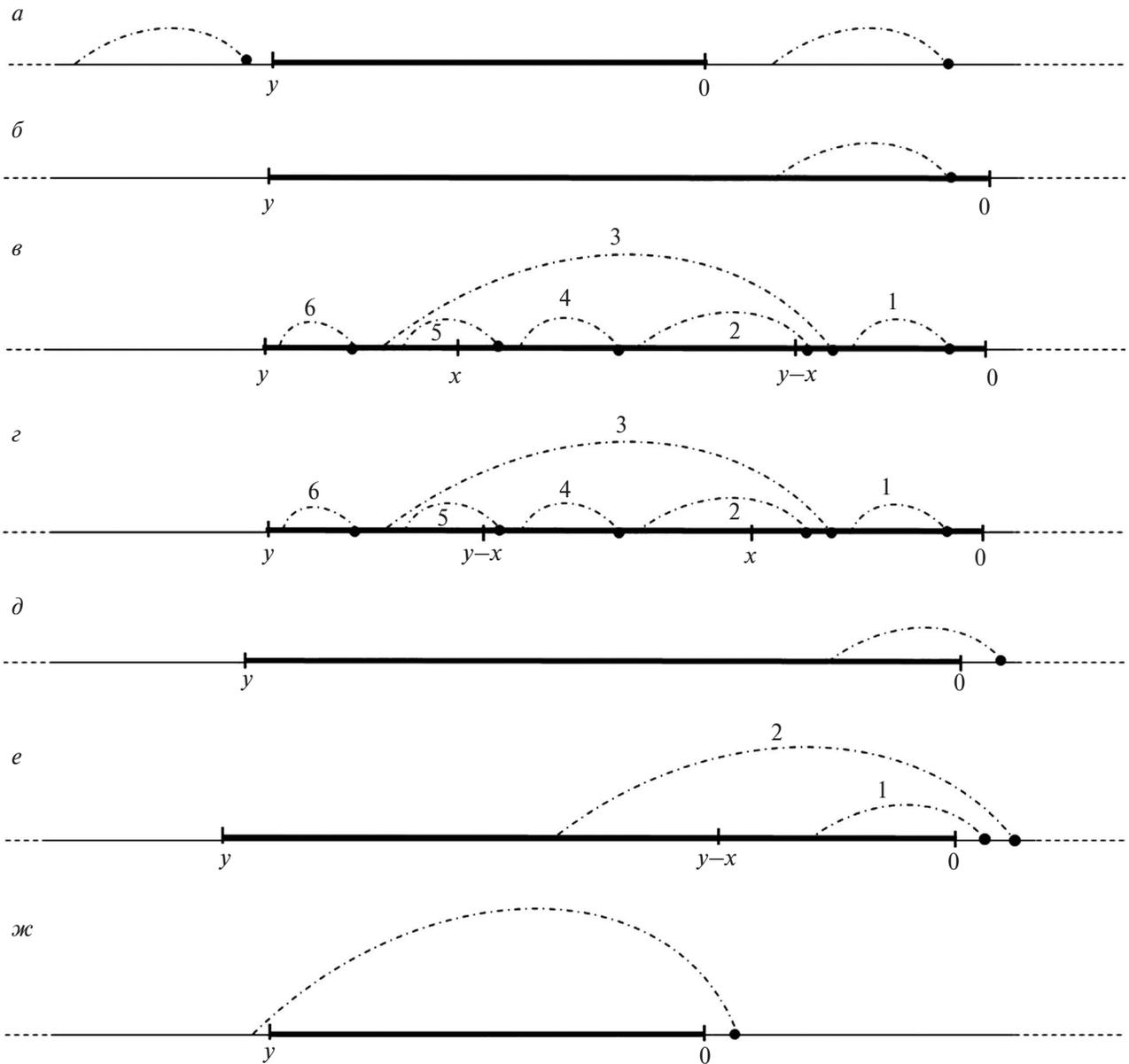
$$N_1^1(x, u + \Delta u | n_0) = 2n_0 \lambda \Delta u \int_0^x f(y, u) \int_0^y F_0(v) dv dy.$$

(b2)  $x < y < 2x$  (при этом  $y - x < x$ ) (рис. 3в), в этом случае, если начальная и конечная точки формирующегося термоцирка находятся на отрезке  $[0, y - x]$  (рис. 3в дуги 1 и 6), или начальная и конечная точки находятся на отрезке  $[x, y]$ , то образуется только один остаточный термоцирк с хордой меньше  $x$ ; если начальная точка находится на отрезке  $[0, x]$  и конечная – на отрезке  $[y - x, y]$  (рис. 3в дуги 2–5), то образуется два термоцирка с хордой меньше  $x$ . Соответственно, определяя перечисленные вероятности интегрированием, далее математическое ожидание числа термоцирков с хордой меньше  $x$  в момент  $u + \Delta u$  при условии числа термоцирков  $n_0$  в момент  $u$  можно получить путем интегрирования полученных вероятностей для учета всех возможных размеров существующего в момент  $u$  термоцирка с последующим умножением на число термоцирков  $n_0$  в момент  $u$ ,

$$N_1^2(x, u + \Delta u | n_0) = n_0 \lambda \Delta u \int_x^{2x} f(y, u) \left\{ 1 \cdot \int_0^{y-x} F_0(y-x-v) dv + 2 \int_0^{y-x} [F_0(y-v) - F_0(y-x-v)] dv \right\} dy +$$

$$+ n_0 \lambda \Delta u \int_x^{2x} f(y, u) \left\{ 2 \int_{y-x}^x F_0(y-v) dv + 1 \int_x^y F_0(y-v) dv \right\} dy + o(\Delta u).$$

<sup>5</sup> Напомним, в соответствии с принятым выше конечная точка хорды расположена всегда левее начальной.



**Рис. 3.** Различные виды взаимодействия существующего термоцирка и нового формирующегося термоцирка (по-яснения в тексте); случаи взаимодействия: *a* – отсутствие стирания, *б*, *в*, *г* – внутреннее стирание, *д*, *е* – боковое стирание, *ж* – полное стирание. Условные обозначения: тонкая линия – береговая линия, толстая линия – хорда существующего рассматриваемого термоцирка, черная точка – начальная точка дуги формирующегося термоцирка, штриховая дуга – дуга формирующегося термоцирка, цифры – различные варианты взаимного расположения термоцирков.

Преобразуя и упрощая, получаем

$$N_1^2(x, u + \Delta u | n_0) = n_0 \lambda \Delta u \int_x^{2x} f(y, u) \left[ 2 \int_{y-x}^y F_0(v) dv \right] dy + o(\Delta u).$$

(b3)  $2x < y$  (при этом  $x < y - x$ ) (рис. 3г), в этом случае, если начальная точка формирующегося термоцирка находится на отрезке  $[0, x]$ , и конечная

точка – на отрезке  $[0, y - x]$  (рис. 3г дуги 1 и 2), или начальная точка находится на отрезке  $[x, y]$ , и конечная точка находится на отрезке  $[y - x, y]$  (рис. 3г дуги 5 и 6), то образуется только один остаточный термоцирк с хордой меньше  $x$ ; в случае, если начальная точка формирующегося термоцирка находится на отрезке  $[0, x]$ , и конечная точка – на отрезке  $[y - x, y]$  (рис. 3г дуга 3), то образуется два остаточных термоцирка с хордой меньше  $x$ ; на-конец в случае, если начальная и конечная точки

формирующегося термоцирка находятся на отрезке  $[x, y - x]$  (рис. 3г дуга 4), то не образуется остаточных термоцирков с хордой меньше  $x$ . Соответственно, определяя перечисленные вероятности интегрированием, далее математическое ожидание числа термоцирков с хордой меньше  $x$  в момент

$u + \Delta u$  при условии числа термоцирков  $n_0$  в момент  $u$  можно получить путем интегрирования полученных вероятностей для учета всех возможных размеров существующего в момент  $u$  термоцирка с последующим умножением на число термоцирков  $n_0$  в момент  $u$ ,

$$N_1^3(x, u + \Delta u | n_0) = n_0 \lambda \Delta u \int_{2x}^{+\infty} f(y, u) \left\{ 1 \cdot \int_0^x F_0(y - x - v) dv + 2 \cdot \int_0^x [F_0(y - v) - F_0(y - x - v)] dv \right\} dy +$$

$$+ n_0 \lambda \Delta u \int_{2x}^{+\infty} f(y, u) \left\{ 1 \cdot \int_x^{y-x} [F_0(y - v) - F_0(y - x - v)] dv + 1 \cdot \int_{y-x}^y F_0(y - v) dv \right\} dy + o(\Delta u).$$

Преобразуя и упрощая, получаем

$$N_1^3(x, u + \Delta u | n_0) =$$

$$= n_0 \lambda \Delta u \int_{2x}^{+\infty} f(y, u) \left[ 2 \int_{y-x}^y F_0(v) dv \right] dy + o(\Delta u).$$

Суммируя математическое ожидание числа термоцирков с хордой меньше  $x$  при условии числа термоцирков  $n_0$  в момент  $u$  по всем трем вариантам и упрощая, получаем для внутреннего стирания величину математического ожидания числа термоцирков с хордой меньше  $x$

$$N_1(x, u + \Delta u | n_0) = n_0 2 \lambda \Delta u \int_0^x f(y, u) \int_0^y F_0(v) dv dy +$$

$$+ n_0 2 \lambda \Delta u \int_x^{+\infty} f(y, u) \int_{y-x}^y F_0(v) dv dy + o(\Delta u).$$

Вероятность бокового стирания ((с) см. выше) термоцирка размером  $y$  определяется тем, что одна концевая точка нового формирующегося термоцирка находится вне существующего, а вторая – внутри существующего, при этом возможны следующие варианты (с1–с2):

(с1)  $0 < y < x$  (рис. 3д), при этом, если начальная точка находится справа от существующего термоцирка, то вероятность бокового стирания определяется выполнением условия, что размер формирующегося термоцирка должен быть достаточен, чтобы задеть существующий термоцирк, но при этом не перекрывать его конечную точку, чтобы не было полного стирания. С учетом пуассоновского характера процесса появления новых термоцирков и большой длины берега, а также равной вероятности бокового стирания как справа, так и слева, упрощая, с последующим умножением на число термоцирков  $n_0$  в момент  $u$ , получаем математическое ожидание числа термоцирков с хордой меньше  $x$  при условии числа термоцирков  $n_0$  в момент  $u$

$$N_2^1(x, u + \Delta u | n_0) = 2n_0 \lambda \Delta u \int_0^x f(y, u) \int_0^{+\infty} [F_0(y + v) - F_0(v)] dv dy =$$

$$= 2n_0 \lambda \Delta u \int_0^x f(y, u) \int_0^y [1 - F_0(v)] dv dy + o(\Delta u)$$

(с2)  $x < y$  (рис. 3е), в этом варианте при выполнении названных условий, если конечная точка находится на отрезке  $[y - x, y]$ , то образуется только один термоцирк с хордой меньше  $x$ , в противном случае не

образуется остаточных термоцирков с хордой меньше  $x$ . Аналогично предыдущему получаем математическое ожидание числа термоцирков с хордой меньше  $x$  при условии числа термоцирков  $n_0$  в момент  $u$

$$N_2^2(x, u + \Delta u | n_0) = 2n_0 \lambda \Delta u \int_x^{+\infty} f(y, u) \int_0^{+\infty} [F_0(y + v) - F_0(y - x + v)] dv dy = 2n_0 \lambda \Delta u \int_x^{+\infty} f(y, u) \int_{y-x}^y [1 - F_0(v)] dv dy + o(\Delta u).$$

Суммируя, получаем для бокового стирания математическое ожидание числа термоцирков с хордой меньше  $x$  при условии числа термоцирков  $n_0$  в момент  $u$

$$N_2(x, u + \Delta u | n_0) = 2n_0 \lambda \Delta u \int_0^x f(y, u) \int_0^y [1 - F_0(v)] dv dy + + 2n_0 \lambda \Delta u \int_x^{+\infty} f(y, u) \int_{y-x}^y [1 - F_0(v)] dv dy + o(\Delta u).$$

В случае (г) (рис. 3ж) полного стирания математическое ожидание числа термоцирков равно нулю.

В случае (д) появления новых термоцирков математическое ожидание числа термоцирков с хордой меньше  $x$  при условии числа термоцирков  $n_0$  в момент  $u$ , появившихся за рассматриваемый интервал времени на всей длине берега  $L$ , в соответствии с пуассоновским характером процесса равно

$$N_4(x, u + \Delta u | n_0) = \lambda L \Delta u F_0(x).$$

Суммируя по всем случаям, и по всем значениям  $n_0$  с учетом их вероятностей и упрощая, получаем математическое ожидание числа термоцирков с хордой меньше  $x$  в момент времени  $u + \Delta u$

---


$$N(x, u + \Delta u) = N(u) \left[ F(x, u) - \lambda a F(x, u) \Delta u + \lambda \Delta u \int_0^x y f(y, u) dy + 2\lambda \Delta u x [1 - F(x, u)] \right] + \lambda L \Delta u F_0(x) + o(\Delta u),$$


---

где  $N(u)$  – математическое ожидание общего числа термоцирков в момент  $u$ .

Переходя к пределу при  $x \rightarrow +\infty$ , учитывая равенство для среднего размера термоцирка

$$h(u) = \frac{L}{N(u)} = \int_0^{+\infty} y f(y, u) dy = \frac{1}{\gamma(u)}, \tag{5}$$

где  $\gamma(u)$  – средняя линейная плотность расположения термоцирков вдоль береговой линии, а также следующее из конечности момента второго порядка функции распределения размера термоцирка равенство

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [x [1 - F(x, u)]] = 0,$$

получаем математическое ожидание общего числа термоцирков в момент времени  $u + \Delta u$

$$N(u + \Delta u) = N(u) - N(u) \lambda a \Delta u + + 2N(u) \lambda \Delta u \int_0^{+\infty} y f(y, u) dy + o(\Delta u).$$

Отсюда, деля на  $L$  и  $\Delta u$  и переходя к пределу при  $\Delta u \rightarrow 0$ , нетрудно получить с учетом (5) дифференциальное уравнение для изменения средней линейной плотности расположения термоцирков

$$\frac{d\gamma(u)}{du} = 2\lambda - \lambda a \gamma(u).$$

После его решения стандартными методами для начального условия  $\gamma(0) = \frac{1}{a}$  (так как в начальный момент нет наложения и стирания термоцирков, и средний размер равен среднему размеру формирующихся термоцирков) изменение математического ожидания размера термоцирка со временем дается следующим выражением

$$h(u) = \frac{a}{2 - e^{-\lambda a u}}. \tag{6}$$

Примем за вероятность термоцирка размера не более  $x$  в момент  $u + \Delta u$  при большом количестве термоцирков отношение математического ожидания числа термоцирков с размером меньше  $x$  к математическому ожиданию общего числа термоцирков в момент  $u + \Delta u$

---


$$F(x, u + \Delta u) = \frac{N(u) \left[ F(x, u) - \lambda a F(x, u) \Delta u + \lambda \Delta u \int_0^x y f(y, u) dy + 2\lambda \Delta u x [1 - F(x, u)] \right] + \lambda L \Delta u F_0(x) + o(\Delta u)}{N(u) - N(u) \lambda a \Delta u + 2N(u) \lambda \Delta u \int_0^{+\infty} y f(y, u) dy + o(\Delta u)}$$


---

Вычитая значение вероятности  $F(x, u)$  в момент  $u$ , упрощая, деля на  $\Delta u$ ,  $N(u)$  и переходя к пределу

при  $\Delta u \rightarrow 0$ , получаем уравнение для распределения размера термоцирка

$$\frac{1}{\lambda} \frac{\partial F(x, u)}{\partial u} = \int_0^x y f(y, u) dy + 2x[1 - F(x, u)] + F_0(x)h(u) - 2F(x, u)h(u)$$

с условиями в начальный момент  $F(x, 0) = F_0(x)$  и  $F(0, u) = 0$ , вытекающими из того, что размер не может быть отрицательным, в начальный момент термоцирки не перекрываются, и в этот момент распределение отвечает распределению размеров формирующихся новых термоцирков.

Следующим этапом является решение полученного уравнения. Переходя к новой неизвестной функции  $\phi(x, u)$

$$\phi(x, u) = \int_0^x F(v, u) dv, \tag{7}$$

меняя порядок дифференцирования в получившихся смешанных производных<sup>6</sup> и интегрируя по  $x$ , сводим уравнение к следующему

$$\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \phi(x, u)}{\partial u} + [x + 2h(u)]\phi(x, u) = x^2 + h(u)I(x) + C(u),$$

где

$$I(x) = \int_0^x F_0(v) dv,$$

$C(u)$  – некоторая функция, зависящая только от  $u$ . Это уравнение можно рассматривать как линейное неоднородное дифференциальное уравнение по  $u$ , и при решении стандартным способом с учетом условий начальный момент окончательно получаем

$$\phi(x, u) = \exp(-\lambda x u - 2\lambda \int_0^u h(v) dv) \left[ \lambda \int_0^u [x^2 + h(s)I(s)] \exp(\lambda x s + 2\lambda \int_0^s h(v) dv) ds + \int_0^x F_0(v) dv \right].$$

Искомое вероятностное распределение размеров термоцирков может быть сформировано в со-

ответствии с (7) дифференцированием полученного решения

$$F(x, u) = \varepsilon(x, u) \left[ -\lambda^2 u \int_0^u \frac{x^2 + h(s)I(s)}{\varepsilon(x, s)} ds + \lambda \int_0^u \frac{2x + h(s)F_0(x) + \lambda s x^2 + \lambda s h(s)I(s)}{\varepsilon(x, s)} ds \right] + \varepsilon(x, u) \left[ -\lambda u \int_0^x F_0(v) dv + F_0(x) \right], \tag{8}$$

где  $\varepsilon(x, u) = \exp[-\lambda x u - 2\lambda \int_0^u h(v) dv]$ .

Наконец, последним этапом в соответствии с поставленной задачей является оценка поведения полученного распределения при большом времени развития. Переходя к пределу при  $u \rightarrow +\infty$  в выраже-

нии (8), дважды используя правило Лопиталья (условия, как нетрудно видеть, соблюдаются (Фихтенгольц, т. 1, 1970. п. 151)) и изменение среднего размера термоцирка со временем (6), окончательно получаем, что существует предел вероятностного распределения размеров термоцирков, и он равен

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} F(x, u) = F(x) = 1 - \frac{a[1 - F_0(x)]}{[x + a]} - \frac{a - \int_0^x [1 - F_0(v)] dv}{[x + a]^2}, \tag{9}$$

где  $a, F_0(x)$  – соответственно математическое ожидание (средний размер) и распределение размера формирующихся молодых термоцирков.

<sup>6</sup> Необходимые условия (Фихтенгольц, т. 1, 1970, п.190) соблюдаются (см. сноску 3).

**Таблица 1.** Результаты оценки соответствия выборок размеров термоцирков на ключевых участках различным видам теоретических распределений

Участок	Объем выборки	Нормальное распределение			Логнормальное распределение			Гамма-распределение		
		среднее м	стандарт м	$p$	среднее логарифма	стандарт логарифма	$p$	$\lambda$	$\alpha$	$p$
КНС1	183	50	43	0.000	3.675	0.666	0.288	22.66	2.22	0.015
КНС2	181	60	43	0.000	3.881	0.639	0.241	23.18	2.57	0.010
КНС3	181	23	15	0.000	2.951	0.586	0.782	7.63	2.99	0.131
КНС4	159	46	27	0.000	3.678	0.529	0.339	12.40	3.68	0.153
ЯМЛ1	108	18	11	0.000	2.751	0.504	0.574	4.71	3.81	0.314
КЛГ1	113	24	89	0.057	3.108	0.156	0.254	3.51	6.87	0.331
КЛГ2	108	25	105	0.020	3.16	0.151	0.923	3.74	6.80	0.640
ХПД1	111	31	118	0.309	3.36	0.14	0.694	3.93	7.82	0.842
ЧШС1	290	22	115	0.000	3.004	0.235	0.015	4.91	4.60	0.037
ЧШС2	278	15	100	0.000	2.532	0.312	0.545	4.622	3.21	0.113
ГДН1	190	14	40	0.000	2.564	0.195	0.658	2.637	5.42	0.305
ГДН2	319	22	344	0.000	2.832	0.449	0.235	9.56	2.25	0.006

Примечание.  $\lambda$  – масштабный параметр,  $\alpha$  – параметр формы,  $p$  – параметр согласия распределений (разница эмпирического и теоретического распределений статистически значима на уровне 0.99 в случае  $p < 0.01$ ).

Второй частью решения поставленной задачи явилось выполнение исследований размеров термоцирков (длин хорд) на конкретных участках, включающее получение выборок длин хорд для термоцирков каждого участка и их сопоставление с теоретическими распределениями для выявления характерных особенностей распределений<sup>7</sup>. Выбор ключевых участков выполнен, как упоминалось выше, на основе требований относительной морфологической однородности участка и однородности физико-географических, прежде всего геолого-геоморфологических, условий; таким образом, внутри каждого участка отсутствуют существенные физико-географические отличия.

На снимках были отдешифрированы бровки склонов и выделены дугообразные границы термоцирков с прилегающей водораздельной поверхностью, а также проведены хорды дуг. Измерение хорд выполнялось с помощью средств геоинформационной системы ArcGIS. Полученные выборки сопоставлялись с теоретическими распределениями различных видов; сопоставление выполнялось с использованием критерия согласия хи-квадрат (критерия Пирсона) в программе Statistica с соблюдением стандартных требований методики по объему выборки и по величине интервалов разбиения.

Участки значительно различаются по условиям. Так, например, разные ключевые участки по данным государственных геологических карт мас-

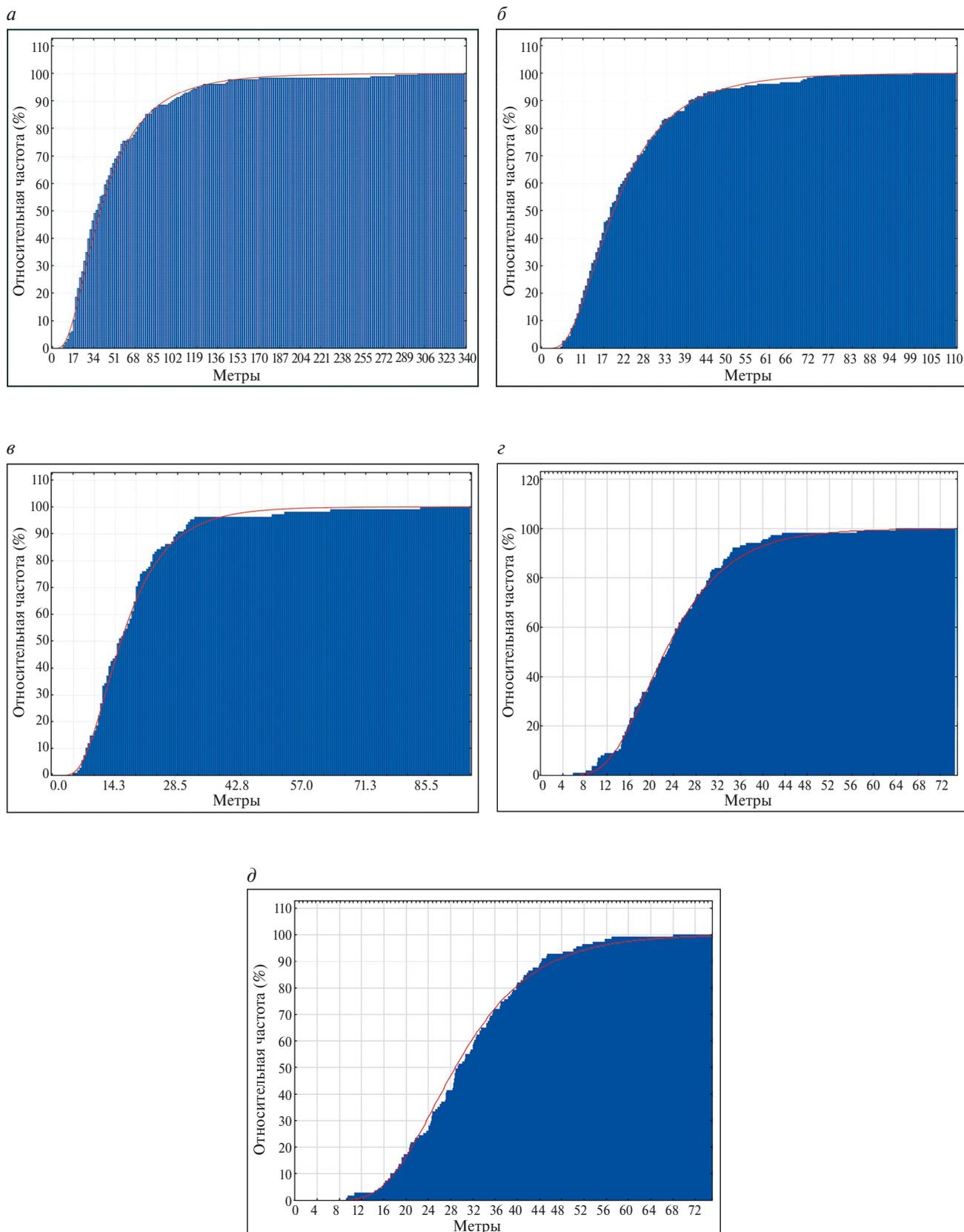
штаба 1:200 000 сложены с поверхности морскими, ледниковыми, озерно-ледниковыми, аллювиально-морскими и озерно-аллювиальными отложениями, отложения представлены как песками, так и алевритами, гравийно-галечными отложениями, супесями и суглинками с валунами и галькой, а также отложениями алевритово-мелко-тонкопесчаного состава; многолетнемерзлые породы имеют как прерывистое, так и массивно-островное и сплошное распространение. В климатическом отношении участки относятся как к арктическому, так и субарктическому поясам.

Результаты статистической обработки по всем участкам приведены в табл. 1.

Анализ сходства эмпирических распределений длин хорд с различными видами теоретических распределений (нормальное, логнормальное и гамма-распределение) дает интересные результаты. На всех двенадцати участках на уровне значимости 0.99 наблюдается согласие с одним и тем же видом распределения – логнормальным. Это выполняется при значительной разнице значений параметров распределения на разных участках. Гамма-распределение также соответствует эмпирическим данным, но несколько хуже; это можно объяснить общим сходством логнормального распределения и гамма-распределения. Нормальное распределение не согласуется с эмпирическими данными ни на одном участке.

На рис. 4 показаны примеры соответствия эмпирических распределений и теоретических логнормальных распределений для разных участков.

<sup>7</sup> Выполнено совместно с М.В. Архиповой, В.В. Бондарь, Т.В. Гониковым (Викторов и др., 2023).



**Рис. 4.** Примеры соответствия эмпирических распределений (синий контур) и теоретических логнормальных распределений (красная линия) по ключевым участкам (*a* – КНС1, *б* – КНС3, *в* – ЯМЛ1, *г* – КЛГ1, *д* – ХПД1).

## ОБСУЖДЕНИЕ

Таким образом, математическое моделирование процесса изменения морфологической структуры абразионных берегов криолитозоны показало, что в разных физико-географических и геокриологических условиях при значительном времени развития формируется устойчивое стационарное распределение размеров термоцирков. Это распределение формируется в условиях постоянного возникновения новых термоцирков, а также полного или частичного (внутреннего и бокового) стирания уже существующих; в силу этого наблюдаемое в каждый момент, прежде всего, на материалах космической съемки, распределение размеров термоцирков не совпадает с распределением размеров формирующихся новых термоцирков. Таким образом, полученный результат позволяет сделать вывод, что морфологическая структура абразионного берега, находясь в постоянном изменении, тем не менее, при значительном времени развития имеет стационарное распределение размеров термоцирков, их постоянный средний размер и среднюю плотность расположения, то есть, находится в состоянии динамического равновесия. Интересно, что, как показывает проведенный анализ, предельное распределение не зависит от распределения размеров термоцирков в начальный момент  $F(x, 0)$ .

Физико-географические, геолого-геоморфологические и геокриологические условия не влияют на факт существования предельного распределения, но влияют на характер этого распределения через распределение размеров формирующихся молодых термоцирков, взаимосвязь описывается выражением (9). В то же время, плотность генерации термоцирков ( $\lambda$ ) не оказывает влияния на предельное распределение размеров, видимо, влияя только на скорость сходимости к предельному распределению.

Следует подчеркнуть, что нами ранее уже был предложен вариант модели развития морфологической структуры абразионных берегов (Викторов, 2022), однако в ней использовалось существенное упрощение – в ней пренебрегалось внутренним стиранием, что очень облегчало анализ, но делало его менее точным. Таким образом, настоящая модель является новой и значительно более совершенной.

Сопоставление эмпирических распределений наблюдаемых размеров термоцирков с результатами математического моделирования позволяет сделать вывод, что для разных физико-географических, в частности геолого-геоморфологических и геокриологических условий, характерен один и тот же вид распределения размеров формирующихся молодых термоцирков. Это вытекает из од-

нотипности наблюдаемых распределений размеров термоцирков (логнормальные распределения) и установленной зависимости между распределением размеров формирующихся молодых термоцирков и наблюдаемыми распределениями размеров термоцирков, описываемой выражением (9). Это же выражение позволяет при более детальном анализе прогнозировать по измерениям наблюдаемых размеров по материалам однократной космической съемки высокого разрешения и, соответственно, по вероятностному распределению этих размеров количественные характеристики процесса формирования термоцирков (и, соответственно, оползней, с образования которых начинается формирование термоцирка), а именно, распределение размеров возникающих новых термоцирков и оползней.

Полученные результаты представляются существенными и в практическом отношении при прогнозе развития, в частности, отступания, берегов, вследствие установленных ранее корреляций размеров термоцирков и стрелок ограничивающих их дуг (Викторов и др., 2023), которые тесно связаны со скоростью отступания.

## ВЫВОДЫ

Абразионные берега криолитозоны развиваются под действием комплекса процессов, включающего как увеличение, так и уменьшение числа термоцирков за счет и формирования новых термоцирков, и в той или иной мере стирания существующих; в силу этого наблюдаемое в каждый момент, прежде всего, на материалах космической съемки, распределение размеров термоцирков в общем случае не совпадает с распределением размеров формирующихся новых термоцирков.

Комплекс математического моделирования и космических методов позволил показать, что в разных физико-географических и геокриологических условиях при значительном времени развития на однородных участках формируется устойчивое стационарное распределение размеров термоцирков абразионных берегов криолитозоны Арктики. Различия условий разных участков не влияют на факт существования предельного стационарного распределения. Таким образом, морфологическая структура абразионного берега, находясь в постоянном изменении, тем не менее, имеет стационарное распределение размеров термоцирков, их постоянные средний размер и среднюю плотность расположения, то есть находится в состоянии динамического равновесия.

Получена зависимость устойчивого стационарного распределения размеров термоцирков

абразионных берегов от распределения размеров формирующихся молодых термоцирков. Физико-географические, геолого-геоморфологические и геокриологические условия участков влияют на характер стационарного предельного распределения через распределение размеров формирующихся молодых термоцирков.

Сопоставление эмпирических распределений наблюдаемых по материалам космической съемки размеров термоцирков с результатами математического моделирования позволяет сделать вывод, что для разных физико-географических, в частности, геолого-геоморфологических и геокриологических, условий характерен один и тот же вид распределения размеров формирующихся молодых термоцирков; условия влияют только на значения параметров распределения.

Полученные результаты позволяют прогнозировать по измерениям по материалам однократной космической съемки высокого разрешения наблюдаемых размеров термоцирков, количественные характеристики процесса формирования термоцирков, а именно, распределение размеров возникающих новых термоцирков; это существенно при прогнозе развития, в частности, отступления, берегов вследствие существующей корреляции размеров термоцирков и стрелок ограничивающих их дуг.

## ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено в рамках госзадания тема № FMWM-2022-0010.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Белова Н.Г., Шабанова Н.Н., Огородов С.А., Камалов А.М., Кузнецов Д.Е., Баранская А.В., Новикова А.В.* Динамика термоабразионных берегов Карского моря в районе мыса Харасавэй (Западный Ямал) // Криосфера Земли. 2017. Т. 21. № 6. С. 85–96.
- Васильев А.А., Покровский С.И., Шур Ю.Л.* Динамика термоабразионных берегов западного Ямала // Криосфера Земли. 2001. С. 44–52.
- Викторов А.С.* Моделирование морфологических особенностей абразионных берегов с развитием оползневых процессов в криолитозоне // Геоэкология. Инженерная геология. Гидрогеология. Геокриология. 2022. № 6. С. 28–36.
- Викторов А.С., Орлов Т.В., Архипова М.В., Капралова В.Н., Бондарь В.В.* Количественные закономерности морфологического строения абразионных берегов с развитием оползневых процессов в пределах криолитозоны (на примере побережий полуостровов Канин и Ямал) // Геоморфология и палеогеография. 2023. Т. 54. № 3. С. 124–137. <https://doi.org/10.31857/S294917892303012X>; <https://elibrary.ru/WETHFU>.
- Новикова А.В.* Морфология и динамика термоабразионных берегов Карского моря: автореф. дис. ... кан. геогр. наук. — М.: МГУ 2022. 26 с.
- Кизяков А.И.* Динамика термоденудационных процессов на побережье Югорского полуострова // Криосфера Земли, 2005. Т. IX. № 1. С. 63–67.
- Пижанкова Е.И., Добрынина М.С.* Динамика побережья Ляховских островов (результаты дешифрирования аэрокосмических снимков) // Криосфера Земли. 2010. Т. XIV. 4. С. 66–79.
- Совершаев В.А.* Криогенные процессы и явления на побережье и шельфе арктических морей // Динамика арктических побережий России. М., Изд-во МГУ, 1998. С. 12–18.
- Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М., Наука, 1970. 608 с.
- Хомутов А.В., Лейбман М.О.* Ландшафтные факторы изменения скорости термоденудации на побережье Югорского полуострова // Криосфера Земли, 2008. Т. XII. № 4. С. 24–35.
- Aleksyutina D.M., Shabanova N.N., Kokin O.V., Vergun A.P., et al.* Monitoring and modelling issues of the thermoabrasive coastal dynamics // In IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science, 2018. № 193. No. 012003.
- Belova N.G., Novikova A.V., Günther F., Shabanova N.N.* Spatiotemporal variability of coastal retreat rates at Western Yamal Peninsula, Russia, based on remotely sensed data // J. of Coastal Research. 2020. № 95. P. 367–371.
- Leibman M., Kizyakov A., Zhdanova Y., Sonyushkin A., Zimin M.* Coastal Retreat Due to Thermodenudation on the Yugorsky Peninsula, Russia during the Last Decade, Update since 2001–2010. // Remote Sensing. 2021. 13. 4042. P. 21.

## Study of Dynamics Regularities for Morphological Pattern of Abrasion Shores of Cryolithozone Based on Complexing Mathematical Modeling and Space Imagery

A. S. Victorov<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Federal State Budgetary Institution of Science Sergeev Institute of Environmental Geoscience of Russian Academy of Science (IEG RAS) Moscow, Russia

The article is devoted to the study of dynamics regularities of abrasion shores of the cryolithozone based on complex mathematical modeling and space imagery and their significance for obtaining information on dynamic parameters of ongoing processes based on remote sensing data. The studied landscape of abrasion shores is a combination of thermal cirques of different ages and preservation, it develops under the action of processes of both the appearance of new thermal cirques and partial or complete erasure of existing ones due to the formation of new ones. The characteristic feature of thermal cirques is a clear arc-shaped boundary with the adjacent watershed surface, which is well detected on remote sensing data. The technique includes creating and analyzing a

mathematical model of the morphological pattern changes of abrasion shores within the cryolithozone. The model uses the approach of the random process theory and empirical measurement of thermal cirques in different physiographic conditions on space imagery. The combination of mathematical modeling with space imagery interpretation allowed us to show that in different physiographic and geocryological conditions, a stable stationary distribution of thermal cirque sizes of abrasion shores of the Arctic cryolithozone is formed with a significant development time in homogeneous areas. The physiographic and geocryological variety of different sites does not prevent the existence of the limiting stationary distribution. Thus, the morphological pattern of the abrasion shore, being in constant change, nevertheless has a stationary distribution of thermal cirque sizes, their average size, and average location density, i.e., it is in a state of dynamic balance. The research gave a mathematical dependence between the limiting thermal cirque size distribution for abrasion shores and the size distribution for forming young thermal cirques. The sites' physical-geographical, geological-geomorphological, and geocryological conditions influence the character of the stationary limit distribution through the size distribution of forming young thermal cirques. The results obtained allow us to predict quantitative characteristics of the thermal cirques (and consequently landslides) formation process, namely, the size distribution of emerging new thermal cirques and landslides, based on measurements of the observed thermal cirque sizes using high-resolution single-shot remote sensing data. This is essential in predicting the development, in particular, of shore retreat.

*Keywords:* mathematical morphology of landscapes, abrasion shores, cryolithozone, mathematical models of landscape morphological patterns, remote sensing data, mathematical modeling

## REFERENCES

- Aleksyutina D.M., Shabanova N.N., Kokin O.V., Vergun A.P., et al.* Monitoring and modelling issues of the thermoabrasive coastal dynamics // In IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science, 2018. № 193. No. 012003.
- Belova N.G., Novikova A.V., Günther F., Shabanova N.N.* Spatiotemporal variability of coastal retreat rates at Western Yamal Peninsula, Russia, based on remotely sensed data // J. of Coastal Research. 2020. № 95. P. 367–371.
- Belova N.G., Shabanova N.N., Ogorodov S.A., Kamalov A.M., Kuznetsov D.E., Baranskaya A.V., Novikova A.V.* Dynamics of thermal abrasion coasts of the Kara Sea in the area of Cape Kharasavey (Western Yamal) // Kriosfera Zemli. 2017. V. 21. No. 6. P. 85–96. [https://doi.org/10.21782/KZ1560-7496-2017-6\(85-96\)](https://doi.org/10.21782/KZ1560-7496-2017-6(85-96)). (In Russian).
- Fikhtengolts G.M.* Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya (Course of differential and integral calculus). V. 1. Moscow, Nauka, 1970. 608 p. (In Russian).
- Khomutov A.V., Leibman M.O.* Landscape controls of thermodenudation rate change on Yugorsky peninsula coast // Kriosfera Zemli. 2008. V. XII. No. 4. P. 24–35. (In Russian).
- Kizyakov A.I.* The dynamics of thermodenudation processes at the yugorsky peninsula coast // Kriosfera Zemli. 2005. V. IX. No. 1. P. 63–67. (In Russian).
- Leibman M., Kizyakov A., Zhdanova Y, Sonyushkin A., Zimin M.* Coastal Retreat Due to Thermodenudation on the Yugorsky Peninsula, Russia during the Last Decade, Update since 2001–2010. // Remote Sensing. 2021. 13. 4042. P. 21. <https://doi.org/10.3390/rs13204042>.
- Novikova A.V.* Morphology and dynamics of thermal abrasion coasts of the Kara Sea: PhD thesis. – Moscow.: 2022. 26 p. (In Russian).
- Pizhankova E.I., Dobrynina M.S.* Dynamics of the coast of the Lyakhovsky Islands (results of interpretation of aerospace images). // Kriosfera Zemli. 2010. Vol. XIV. 4. S. 66–79. (In Russian).
- Sovershayev V.A.* Cryogenic processes and phenomena on the coast and shelf of the Arctic seas // Dinamika arkticheskikh poberezhnykh Rossii (Dynamics of the Arctic coasts of Russia.) Moscow, Izd-vo MGU, 1998. P. 12–18. (In Russian).
- Vasiliev A.A., Pokrovsky S.I., Shur Yu.L.* Dynamics of thermal abrasion shores of the western Yamal // Kriosfera Zemli, 2001. P. 44–52. (In Russian).
- Victorov A.S.* Modeling Morphological Features of Abrasion Landslide Coasts in Cryolithozone // Geoekologiya. Inzhenernaya geologiya. Gidrogeologiya. Geokriologiya. 2022. No. 6. P. 28–36.
- Victorov A.S., Orlov T.V., Arkhipova M.V., Kapralova V.N., Bondar V.V.* Quantitative lows of a morphological pattern for abrasion slopes with a landslide process within the cryolithozone (the coasts of the Kanin and Yamal peninsulas as examples) // Geomorfologiya i paleogeografiya. 2023. T. 54. № 3. P. 124–137. <https://doi.org/10.31857/S294917892303012X>; <https://elibrary.ru/WETHFU>.