

ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СУШИ С АТМОСФЕРОЙ И ГИДРОЛОГИЧЕСКИХ ПОСЛЕДСТВИЙ ИЗМЕНЕНИЯ КЛИМАТА

УДК 551.324.63

МИНИМАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ УРЛЕМАНСА КАК ВОЗМОЖНЫЙ ИНСТРУМЕНТ ОПИСАНИЯ ГОРНОГО ОЛЕДЕНЕНИЯ В МОДЕЛЯХ ЗЕМНОЙ СИСТЕМЫ¹

© 2023 г. П. А. Торопов^{a, b, d, *}, А. В. Дебольский^c, А. А. Полухов^a,
А. А. Шестакова^e, В. В. Поповнин^a, Е. Д. Дроздов^{a, b, d}

^aМГУ им. М.В. Ломоносова, Географический факультет, Москва, 119991 Россия

^bИнститут Географии РАН, Москва, 119017 Россия

^cНаучно-исследовательский вычислительный центр МГУ им. М.В. Ломоносова,
Москва, 119234 Россия

^dИнститут Водных проблем РАН, Москва, 119333 Россия

^eИнститут Физики атмосферы РАН, Москва, 119017 Россия

*e-mail: tormet@inbox.ru

Поступила в редакцию 18.02.2023 г.

После доработки 03.05.2023 г.

Принята к публикации 04.05.2023 г.

Выполнен краткий обзор основных подходов к моделированию горных ледников, по итогам которого в качестве ядра параметризации горного оледенения в моделях Земной системы выбрана минимальная модель Урлеманса. Предложенная модель основана на одномерном уравнении баланса массы ледника. Компоненты баланса массы рассчитываются с помощью специально разработанной модели орографических осадков, алгоритма коррекции приходящей солнечной радиации на наклонную ледовую поверхность, схем расчета турбулентного тепло-влаго-обмена на основе теории Мони́на–Обухова. Модель реализована для ледника Джанкуат (Центральный Кавказ), по которому имеется длительный ряд измерений. Продемонстрировано удачное воспроизведение динамики длины ледника за период 1985–2020 гг. на основе измеренных значений баланса массы: –13 м/год, что практически идеально согласуется с натурными данными. Это означает, что модель Урлеманса может использоваться как основа для параметризации в моделях Земной системы. Результаты моделирования с рассчитанным балансом массы показали существенный положительный тренд абляции при мало меняющейся аккумуляции, что также соответствует реальности. Однако при этом значения годового слоя стаивания и сокращения ледника превышают реально наблюдаемые в 2 раза. Дальнейшее развитие модели (добавление блока снежного покрова, учет моренного чехла и горно-долинной циркуляции) позволит устранить эти недостатки.

Ключевые слова: горные ледники, минимальная модель Урлеманса, гляциоклиматология.

DOI: 10.31857/S0321059623600205, EDN: RTBOUB

ВВЕДЕНИЕ

Ледниковая составляющая питания для всех рек Земли $\leq 1\%$ [4]. Тем не менее для рек, берущих начало в высокогорной зоне, ее учет важен для корректного воспроизведения гидрологического режима. Например, годовой сток крупных рек Кыргызстана на 50% состоит из ледникового [56]; доля ледникового питания рек Таджикистана составляет 10–15%, достигая в аномально сухие го-

ды 70% [38]. С учетом существующих оценок средней планетарной величины тренда площади горных ледников (-1% год⁻¹ [36]) можно предположить, что в начале ХХІІ в. горное оледенение Земли может почти полностью исчезнуть. Для ряда государств и областей (Перу, Чили, Монголия, Киргизия, Таджикистан, и др.) это может обернуться острой нехваткой пресной воды и гуманитарной катастрофой. Стремительное уменьшение объемов горного оледенения в ХХ–ХХІ вв. спровоцирует рост природных рисков в высокогорных районах, а также приведет к заметному росту уровня Мирового океана [35]. Поэтому моделирование горных ледников прежде всего необходимо

¹ Часть работы, связанная с моделированием орографических осадков на леднике выполнена в рамках госзадания ИВП РАН (проект FMWZ-2022-0001), моделирование реакции ледника на изменения климата выполнено при поддержке РНФ (проект 22-17-00133).

для оценки снежно-ледовой составляющей питания рек в горных районах как в условиях современного климата [16, 60], так и с учетом климатических прогнозов на рубеже XXI–XXII вв. [35, 36, 55, 61]. При этом проблема обратного влияния горного оледенения на климат традиционно не рассматривается в силу его малости по сравнению с ролью ледниковых щитов Гренландии и Антарктиды. На первый взгляд это очевидно, однако в ряде работ (например, [39]) показано, что изменение площади оледенения крупных горно-ледниковых районов может оказывать ощутимое влияние на такой элемент глобальной циркуляции атмосферы, как индийский муссон. Этот факт, необходимость тщательного описания горной составляющей речного стока и изменения уровня Мирового океана, а также общая тенденция бурного развития блока деятельного слоя суши в ведущих мировых МЗС мотивируют использование той или иной модели горного оледенения в качестве параметризации.

Одно из главных направлений современной гляциологии – развитие так называемых глобальных гляциологических моделей (ГГМ) [15, 62], среди которых особо можно отметить одномерную модель Урлеманса [45]. В данной работе предлагается использовать этот простой и физически обоснованный алгоритм в качестве основы для параметризации горного оледенения в моделях Земной системы (МЗС). Модель реализована для ледника Джанкуат за период 1985–2020 гг. в двух вариантах: 1) с измеренным балансом массы; 2) с балансом массы, рассчитанным с помощью ранее разработанной модели орографической компоненты осадков [19], пересчета солнечной радиации на наклонную поверхность [10], усовершенствованными схемами расчета турбулентных потоков согласно теории Мони-на–Обухова. Предложенная модель представляется эффективным инструментом оценки ледниковой составляющей речного стока и ресурсов пресных вод в высокогорных районах, а также выявления физических механизмов динамики горного оледенения как в минувшие климатические эпохи, так и при различных сценариях глобального потепления.

КРАТКИЙ ОБЗОР ОСНОВНЫХ ПОДХОДОВ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ГОРНЫХ ЛЕДНИКОВ

Подходы к моделированию динамики горных ледников

Проблеме моделирования горных ледников посвящено немало работ: например, в [7] дан интересный обзор подходов от простых статистических алгоритмов до полных моделей; в работах [15, 62] подробно описано современное состояние так называемых глобальных гляциологических моде-

лей (ГГМ). В настоящей статье лишь обобщены основные принципы, лежащие в основе современного моделирования горных ледников, что поможет взвешенно выбрать алгоритм для их описания в рамках МЗС.

Математическая основа полной модели горного ледника в большинстве случаев – система уравнений неньютоновской жидкости, записанная для вязкопластического течения, возникающего под действием силы тяжести. Работа [44] – одна из первых успешных попыток моделирования течения горного ледника в виде кинематической волны, возникающей в результате решения уравнения неразрывности. В дальнейшем метод активно прогрессировал [25], и в настоящее время это основной инструмент для воспроизведения динамики континентальных ледовых щитов [49]. Как показали сравнения с натурными данными, полная математическая модель может неплохо зарекомендовать себя и в случае горного ледника [18, 52]. Однако для этого требуется скрупулезная настройка параметров модели под конкретный объект. Это означает, что использовать полную модель в качестве универсального средства для расчета ледниковой составляющей стока в какой-либо горной стране или как основу для параметризации горного оледенения всей Земли крайне сложно. К недостаткам моделей этого типа можно также отнести недостаточную обоснованность граничных условий и вычислительную дороговизну.

ГГМ состоят из двух основных модулей: 1) модуль инициализации, который формирует стационарную геометрию ледника, соответствующую заданным значениям поверхностного баланса массы; 2) динамический модуль, состоящий из блока расчета баланса массы (зависящего от климатических параметров), и алгоритма, позволяющего рассчитать отклик геометрических характеристик ледника на изменения баланса массы. Полнота динамического модуля ГГМ может варьировать от простых статистических параметризаций [27] или калиброванных моделей границы питания [50] до решения одномерного уравнения мелкого льда [37, 62]. Последний подход оправдан тем, что большая часть горных ледников относится к горно-долинному типу, поэтому их эволюция может упрощенно рассматриваться вдоль осевых линий течения льда [15]. Задача может быть реализована для любого горного ледника Земли благодаря наличию глобальных архивов инвентаризации RGI (Randolph Glacier Inventory) [54], которые используются в качестве начальных данных ГГМ. Эти архивы включают в себя основные геометрические параметры ледников (длина осевой линии, площадь, угол наклона ледовой поверхности, угол наклона ложа и др.), определенные с помощью методов дистанционного зондирования. Отдельная важная пробле-

ма – оценка корректности информации о толщине льда, которая является расчетной характеристикой, поскольку лишь 0.5% горных ледников планеты обеспечены прямыми измерениями этого параметра [33]). В рамках проекта ITMIX (Ice Thickness Models Intercomparison experiment) наиболее развитые алгоритмы объединены в единую универсальную модель оценки толщины льда [32]. В настоящее время в мире насчитывается 15 широко используемых ГГМ, среди которых наиболее развитыми можно считать модели OGGM, GloGEM, GloGEMflow, PyGEM, JULES, NYOGA2 [15].

Подходы к моделированию баланса массы горных ледников

Успех моделирования динамики площади и объема горного оледенения прежде всего зависит от корректности описания баланса массы, поэтому остановимся подробнее на методах его оценки в ГГМ. В настоящее время существует три основных подхода: температурно-индексный, статистический и энерго-балансовый.

Температурно-индексном подход впервые был предложен Р. Финстервальдером и А. Ангстремом более 100 лет назад [22], а среди отечественных исследователей он сформулирован в работе [8]. Преимущество метода – его вычислительная простота, а также возможность выполнить оценки абляции по любым горно-ледниковым районам без детальных метеорологических измерений. Поэтому он достаточно активно развивается и в настоящее время [34, 46, 60], применяется как в целях климатической интерпретации современной деградации горного оледенения, так и для прогноза состояния горных ледников к концу XXI в. по всей планете [36]. В этих случаях подход несколько усложняется: к нему добавляются простые схемы, позволяющие учесть поток тепла в толщу ледника [36], учитывается “радиационный фактор таяния” [34, 60] и т. д. Главный недостаток метода – использование в качестве коэффициентов регрессии произвольных констант, в которые спрятано нелинейное взаимодействие компонент теплового баланса. Логичным развитием и расширением подхода является появление группы статистических моделей, которые в последние 10–20 лет эволюционируют до методов машинного обучения [57]. В рамках этих методов используются статистические взаимосвязи, установленные между рядами баланса массы и предикторов (топографических и климатических).

В основе энергобалансового метода лежит уравнение баланса массы ледника, в котором абляция оценивается как остаточный член упрощенного уравнения теплового бюджета ледовой поверхности, а аккумуляция – как сумма накопленных зимних осадков. Метод базируется на из-

мерениях компонентов баланса массы ледников. Бурное развитие гляцио-климатологии началось в середине XX в. благодаря проведению Международного геофизического года (1957–1958 гг.) [2]. В результате к началу текущего столетия сформировался внушительный архив оценок компонент теплового баланса ледников различных регионов мира: от ледовой шапки Килиманджаро [42] до Кавказа, Полярного Урала, Алтая и Памира [2]. Измерения прежде всего проводились на ледниках, входящих в международную гляциологическую сеть (WGMS), и постепенно совершенствовались. Так, в последние 20 лет появилась возможность прямых измерений турбулентных потоков тепла и влаги (так называемый метод “eddy covariance”) над ледовой поверхностью, что позволило уточнить коэффициенты сопротивления в расчетных алгоритмах [42], подбирать коэффициенты шероховатости [30, 50] – в том числе с учетом особенностей микрорельефа [41]. Автоматизированные измерения радиационных потоков в комплексе с метеорологическими наблюдениями позволяют найти постоянные в формуле Брента для расчета нисходящей длинноволновой радиации, уточнить зависимости приходящей коротковолновой радиации от облачности [28]; оценить альбедо в зависимости от температуры и частоты снегопадов в сезон абляции [41]. В более развитых алгоритмах предпринимаются попытки воспроизведения пространственной изменчивости компонент теплового баланса на основе цифровых моделей рельефа или нескольких точек измерений [42, 60]. Важная часть исследований в рамках этого подхода – прямые измерения слоя абляции на ледниках WGMS, позволяющие корректировать расчетные методы.

Параметризации горных ледников в климатических моделях

В модели численного прогноза погоды и климата параметризации горных ледников, как правило, не включаются в силу предположения об исчезающе малом обратном влиянии горного оледенения как на атмосферу, так и на речной сток в планетарном масштабе. Тем не менее в некоторых моделях (например, REMO) существует простейшее описание горного оледенения, основанное на оценке доли ячейки глобальной модели, попадающей на горную территорию, занятую снегом и льдом [40]. Для этой доли решается уравнение теплового баланса деятельной поверхности, оценивается сумма осадков и в итоге вычисляется баланс массы ледника. В России параметризация горного оледенения впервые включена в модель оперативного прогноза погоды ПЛАВ в виде одномерного уравнения теплопроводности, которое решается для той части модельной ячейки, которая занята снегом и льдом [58]. Од-

нако в упомянутых параметризациях не учитывается угол наклона ледовой поверхности и перепад ее абсолютных высот, а также простейшая динамика ледника. Другой вариант совмещения атмосферной модели с моделью горного оледенения в Южных Андах рассматривается, например, в работе [29]. Эта задача решается с целью оценки чувствительности оледенения к атмосферным форсингам. Расчет стока, а также обратная связь с атмосферой в этих моделях отсутствуют, т. е. схема не используется как параметризация. До конца не решена проблема адаптации результатов расчетов по глобальной атмосферной модели к конкретному леднику, хотя в ряде работ эта задача решается достаточно успешно [11, 47].

ОПИСАНИЕ РАЗРАБОТАННОЙ МОДЕЛИ

Краткое обоснование выбора “минимальной” модели Урлеманса

Анализ существующих подходов к моделированию горных ледников показывает, что использование полных моделей вязкопластического течения нереалистично в рамках МЗС в силу их большой вычислительной дороговизны и чувствительности к геометрическим параметрам. В этом смысле ГГМ выглядит намного реалистичнее, однако применение их ко всем горным ледникам планеты также сопряжено с большими техническими трудностями. Для описания горного оледенения в МЗС можно предложить подход генерализации основных геометрических параметров горных ледников в пределах ячеек глобальной модели. В результате такого обобщения в соответствии с преобладающим в пределах модельной ячейки направлением склона получатся гляциологические объекты, геометрические параметры которых будут близки к типичному горно-долинному леднику. К таким объектам логично применить упрощенный аналог ГГМ, например “минимальную модель” Урлеманса [45], которая сочетает вычислительную простоту с достаточной физической обоснованностью и позволяет вычислять значения основных гляциологических параметров. Сходство результатов расчетов с помощью модели Урлеманса с результатами мониторинга многих горных ледников Земли неоднократно демонстрировалось, в том числе для ледника Джанкуат [9]. Один из интересных вариантов применения этой модели – запись ее основного уравнения в форме Ланжевена, как это сделано в работе [5]: в результате получены реалистичные временные масштабы отклика длины ледника на климатическое воздействие. Важное достоинство модели Урлеманса – сочетание вычислительной простоты с возможностью вычисления баланса массы с привлечением дополнительных модулей для расчета таких параметров, как орографические осадки, турбулентный теп-

лообмен, радиационные потоки, пересчитанные на наклонную поверхность, и др.

Основное уравнение модели

Минимальная модель Урлеманса основана на следующих допущениях [45]:

ледник расположен на склоне постоянной крутизны ν , т. е. высота h точки на склоне над уровнем моря есть $h(x) = h_0 - \nu x$, где x – горизонтальная координата этой точки, h_0 – высота верхней точки ледника, которой соответствует координате $x = 0$;

длина ледника L и средняя по профилю толщина H связаны между собой известной параболической зависимостью [13, 35] следующего вида: $H = \alpha_m L / (1 + \mu \nu)$, где α_m и μ – константы, определяющие упрощенную динамику ледника. Они могут уточняться, но для большей части ледников принимают следующие значения: $\alpha_m = 10$, $\mu = 3 \text{ м}^2$;

баланс массы зависит от высоты: $b = \beta (h - E)$, где E – высота границы питания ледника, на которой аккумуляция и абляция уравновешиваются, β – изменение баланса массы ледника с высотой ($\text{мм в. э. год}^{-1} \text{ м}^{-1}$).

В одномерной постановке задачи объем горного ледника V можно выразить как $V = LH$. Полагая, что изменение объема в первую очередь зависит от суммарного баланса массы B_s , про дифференцируем это выражение:

$$\frac{dV}{dt} = H \frac{dL}{dt} + L \frac{dH}{dt} = B_s. \quad (1)$$

Тогда, учитывая сформулированные выше допущения для b и H , имеем:

$$\frac{dV}{dt} = \int_0^L b dx = -\frac{1}{2} \beta \nu L^2 + \beta \left(\frac{\alpha_m \sqrt{L}}{1 + \mu \nu} + b_0 - E \right) L, \quad (2)$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{2(1 + \mu \nu)}{3\alpha_m} \times \left(-\frac{1}{2} \beta \nu L^{3/2} + \frac{\alpha \beta}{1 + \mu \nu} L + \beta (b_0 - E) L^{1/2} \right). \quad (3)$$

Уравнение (3) описывает изменение во времени длины ледника L , определяемое вариациями высоты границы питания E и градиентом баланса массы β . Оба параметра зависят прежде всего от метеорологических факторов. С учетом того, что большая часть горных ледников характеризуется увеличением их ширины с ростом абсолютной высоты поверхности, основное уравнение модели с учетом соотношений (1)–(3) следует записать с учетом поправки на геометрическую форму ледника.

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = & \frac{3\alpha_m}{2(1+\mu\nu)} \times \\ & \times L^{1/2} \left(w_0 + \alpha^{-2} \left\{ L^{-1} - \alpha e^{-\alpha L} - L^{-1} e^{-\alpha L} \right\} \right) \frac{dL}{dt} + \\ & + \frac{\alpha_m}{1+\mu\nu} L^{3/2} (\alpha^{-2} L^{-2} + e^{-\alpha L} + \\ & + \alpha^{-2} L^{-2} e^{-\alpha L} + \alpha^{-1} L^{-1} e^{-\alpha L}) \frac{dL}{dt} = B_s. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь α – масштабный параметр ледника (строго говоря, для каждого свой), w_0 – ширина фронта ледника. Остальные переменные те же, что в уравнениях (1)–(3).

Из уравнения (4) видно, что главными параметрами, определяющими баланс массы горного ледника, являются его высотный градиент β (мм в. э. год⁻¹ м⁻¹), а также высота границы питания E . В рамках данного исследования параметры E и β не только берутся из данных гляциологических измерений (как это сделано в [9]), но и рассчитываются за период 1985–2020 гг. с использованием данных реанализа ERA5 с временным разрешением 3 ч с помощью алгоритмов, учитывающих основные компоненты теплового баланса и орографическую составляющую осадков. Полученные значения β суммируются за каждый год, и в итоге уравнение (4) интегрируется с временным шагом 1 год с использованием простейшей численной схемы Эйлера, которую при таком временном разрешении можно считать устойчивой.

Расчет баланса массы

В общем виде уравнение, описывающее приращение массы горного ледника (мм водного эквивалента) за счет аккумуляции можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho_w \iint_S \frac{dW_{acc}}{dt} dS = \\ = \rho_w \iint_S \left(\frac{dW_{pr}}{dt} + \frac{dW_{av}}{dt} - \frac{dW_{subl}}{dt} \pm \frac{dW_{drift}}{dt} \right) dS. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь ρ_w – плотность воды; S – площадь ледника, по которой интегрируются компоненты аккумуляции; W_{acc} – слой аккумуляции; W_{pr} – слой осадков, W_{av} – слой лавинного питания; W_{subl} – слой сублимации ледяных кристаллов с поверхности ледника и во время метелей; W_{drift} – слой метелевого переноса. Все величины приведены в миллиметрах водного эквивалента.

В многочисленных исследованиях показано, что главный фактор питания горных ледников – осадки, вклад которых в аккумуляцию колеблется от 50 до 95%, в среднем составляя ~80% [6]. Средняя величина лавинного питания для горных лед-

ников равна ~5%, а метелевого – 15%. Для ледника Джанкуат суммарный вклад лавинного и метелевого питания составляет ~15% [14, 20], эта оценка принята и в данной работе для уточнения годовой аккумуляции. Отрицательный вклад сублимации ледяных кристаллов в годовую аккумуляцию оценен в ряде работ (например, [23]), на данном этапе исследования принят равным 5% годовой суммы осадков.

Для оценки главного фактора питания – годовых осадков – используется параметризация их орографической составляющей, относящаяся к классу “моделей склонов” и подробно описанная в работе [19]. Данная параметризация основана на вычислении скорости конденсации на наветренном склоне горного хребта по сеточным данным о температуре, парциальном давлении водяного пара и скорости ветра на стандартных изобарических уровнях, взятых из реанализа ERA5. Орографическая составляющая вертикальной компоненты скорости ветра вычисляется из упрощенного варианта уравнения неразрывности, записанного для несжимаемой жидкости. Предполагается, что изменение орографической составляющей вертикальной компоненты скорости с высотой описывается упрощенным вариантом решения уравнения Тейлора–Гольштейна и в первую очередь определяется условиями стратификации, а также высотой блокирования потока, зависящей от числа Фруда. Используя эмпирическую связь между температурой и долей сконденсировавшейся влаги, выпадающей в виде осадков, и проинтегрировав полученные значения влагосодержания по всему столбу тропосферы, можно получить итоговую сумму осадков на наветренной стороне склона за интересующий период времени. В работе [19] показано, что предложенная модель адекватно воспроизводит пространственно-временную изменчивость осадков на горных склонах на примере Эльбруса и может быть использована в рамках параметризации баланса массы горного оледенения.

В основе алгоритма расчета абляции лежит упрощенная форма уравнения теплового баланса, которая записывается при следующих допущениях, уместных для ледника альпийского типа в период активного таяния: 1) поток тепла в толщу ледника за счет молекулярной диффузии отсутствует из-за просачивания талых вод в ледовую толщу и близости температуры к 0°C по всему профилю [6, 46]; 2) температура снежно-ледовой поверхности в период абляции остается равной нулю; 3) потоки тепла от жидких осадков и талых вод в сумме $\leq 2\%$ радиационного баланса [2, 41]. Исходя из этих предположений, полное уравнение теплового баланса ледовой поверхности в упрощенном виде можно записать так:

$$L_i \rho_i \frac{\partial h}{\partial t} = SW_{\downarrow} (1 - A) - (LW^+ - LW^-) + H + LE. \quad (6)$$

Здесь h – конечная толщина ледового слоя; c_i – теплоемкость льда, Дж/кг К; ρ_l – плотность льда, кг/м³; L_i – удельная теплота плавления-замерзания, Дж/кг; SW_{\downarrow} – приходящая коротковолновая радиация; LW^+ – восходящий поток длинноволновой радиации (от ледника); LW^- – нисходящий поток длинноволновой радиации (от атмосферы); $H = c_p \rho k \partial T / \partial z$ – турбулентный поток явного тепла (T – температура воздуха (К) на измерительных уровнях в приземном воздухе); k – коэффициент турбулентного обмена, м²/с; c_p – теплоемкость воздуха, Дж/кг К; ρ – плотность воздуха, кг/м³; $LE = \rho k dq / dz$ – турбулентный поток влаги, или затраты тепла на испарение галой воды (q – массовая доля водяного пара на измерительных уровнях в приземном воздухе; L – удельная теплота парообразования–конденсации, Дж/кг; E – скорость испарения, мм/с). Все компоненты теплового баланса выражены в терминах плотности потока (Вт/м²). Компоненты уравнения (6) оценивались многими исследователями для ледников, расположенных в самых разных горных районах мира. В ряде работ [34, 42, 46, 60] показано, что самыми значимыми оказываются два первых слагаемых: радиационный баланс R (50–85%) и турбулентный теплообмен H (5–50%). Затраты тепла на испарение LE в большинстве случаев $\leq 5\%$.

Корректная оценка слоя абляции горных ледников невозможна без учета распределения приходящей солнечной радиации в зависимости от экспозиции склона, его крутизны и закрытости горизонта. В данной версии модели горного ледника учитываются только геометрические параметры: азимут и средний угол наклона ледовой поверхности, закрытость горизонта. Использована хорошо известная зависимость Кондратьева с некоторыми модификациями, реализованными в работе [43]. В итоге поступление прямой радиации на наклонную поверхность определялось по формуле:

$$S_s = S \text{mask}_{\text{shadow}} \times [\cos \Theta_N \sin \Theta_S + \sin \Theta_N \cos \Theta_S \cos(\phi_S - \phi_N)], \quad (7)$$

где S_s – прямая радиация на наклонную поверхность; S – прямая радиация на площадку, перпендикулярную солнечным лучам; Θ_S – высота Солнца; Θ_N – угол наклона склона; ϕ_S – азимут Солнца; ϕ_N – экспозиция склона. Азимуты были рассчитаны по направлению с Ю по часовой стрелке. При наличии тени значение $\text{mask}_{\text{shadow}}$ задается равным 0, при отсутствии – равным 1.

Оценка рассеянной радиации проводилась с учетом закрытости горизонта:

$$D_s = D \times svf + R(1 - svf), \quad (8)$$

где D_s – рассеянная радиация с учетом закрытости горизонта, D и R – соответственно рассеян-

ная и отраженная солнечная радиация, svf – закрытость горизонта в долях единицы: если $svf = 0$, то горизонт закрыт полностью, при $svf = 1$ он полностью открыт. Расчет приходящей коротковолновой радиации апробирован для массива Эльбруса [10].

Увеличение альbedo ледовой поверхности с высотой в рамках данного подхода задается линейным (на основании данных измерений). Уходящее длинноволновое излучение при условии таяния снежно-ледовой поверхности задается равным 315 Вт/м² (что соответствует температуре 273.15 К). Это грубое допущение: в перспективе радиационная температура поверхности ледника будет рассчитываться строго.

Для расчета турбулентных потоков на поверхности использовано стандартное приближение приземного слоя и теория подобия Монина–Обухова:

$$H_s = -\rho c_p C_i C_u |U_z| (\theta_z - \theta_s), \quad (9)$$

$$Q_s = -\rho L C_i C_u |U_z| (q_z - q_s), \quad \tau_s = -\rho C_u^2 |U_z|^2.$$

Здесь H_s , Q_s – турбулентные потоки явного и скрытого тепла соответственно; τ_s – турбулентный поток импульса; θ_s , θ_z – температура на поверхности и потенциальная температура на уровне z ; q_s , q_z – отношение смеси вблизи поверхности и на уровне z ; $|U_z|$ – модуль скорости ветра на уровне z ; C_u и C_t – коэффициенты турбулентного обмена теплом и импульсом соответственно; c_p – удельная теплоемкость воздуха при постоянном давлении; ρ – плотность воздуха. Коэффициенты турбулентного обмена определяются по формулам:

$$C_u = \frac{\kappa}{\ln\left(\frac{z}{z_0}\right) - \Psi\left(\frac{z}{L}\right) + \Psi\left(\frac{z_0}{L}\right)}, \quad (10)$$

$$C_t = \frac{\kappa}{\ln\left(\frac{z}{z_{0H}}\right) - \Psi_H\left(\frac{z}{L}\right) + \Psi_H\left(\frac{z_{0H}}{L}\right)},$$

где z_0 , z_{0H} – параметры динамической и температурной шероховатости соответственно; $\Psi(z/L)$, $\Psi_H(z_{0H}/L)$ – универсальные функции для скорости ветра и температуры; L – масштаб Монина–Обухова: $L = -\tau^{3/2} / (\kappa H_s g / \Theta)$. В качестве функций устойчивости использовались стандартные функции Бусингера–Дайера [26, 31], для параметризации динамического параметра шероховатости использовалась схема из работы [21].

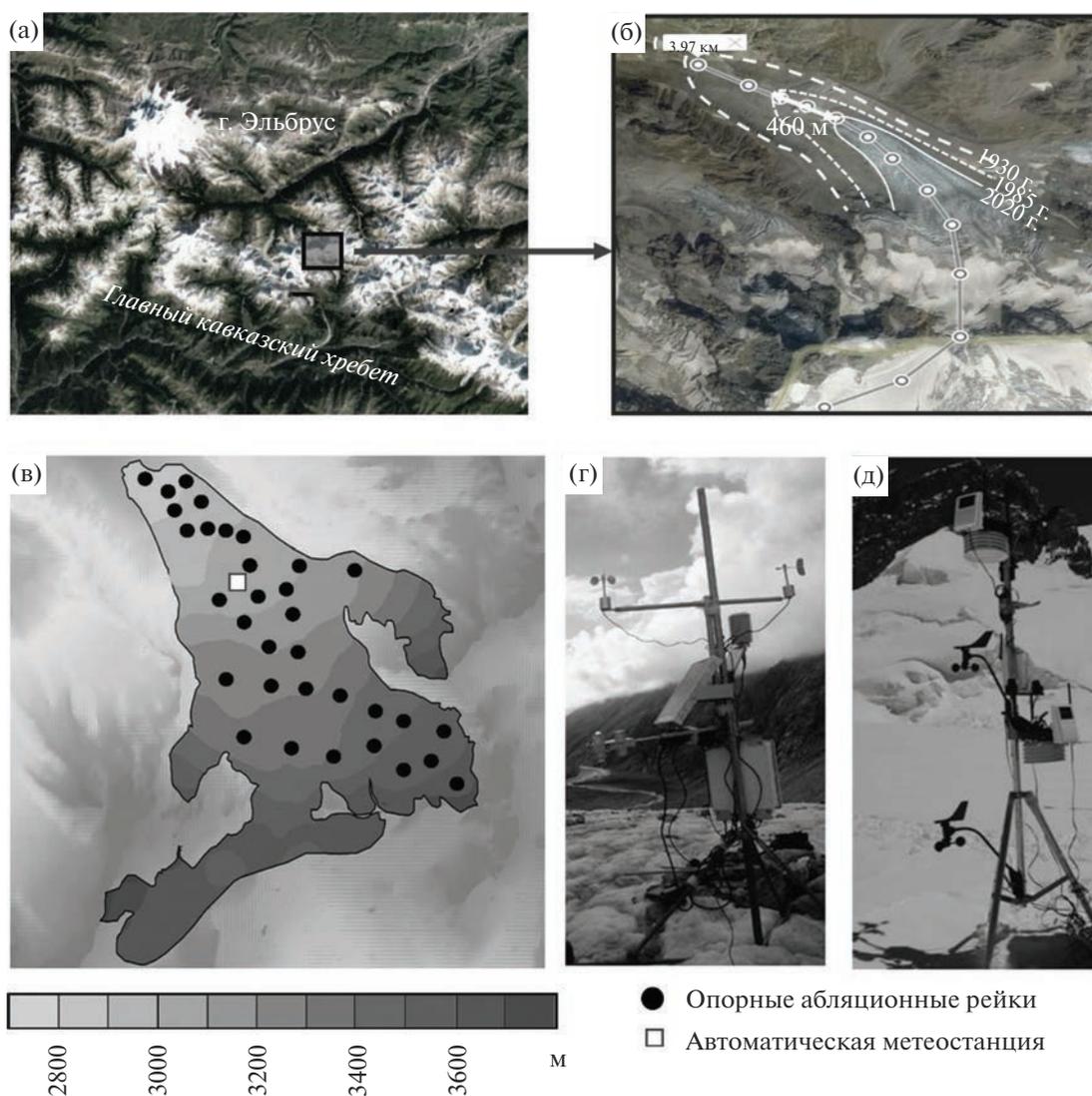


Рис. 1. К описанию ледника Джанкуат: а – географическое положение ледника на Центральном Кавказе (обработанный космический снимок “Google Earth”); б – ледник Джанкуат и верховье долины Адыл-Су (снимок TERRA), сплошной линией показана граница языка ледника в 2020 г., пунктирными – в 1930 и 1985 гг. соответственно, линией с кружками показано направление основного ледового потока, белой стрелкой – отступление фронта языка (460 м) за период 1985–2020 гг.; в – картосхема ледника Джанкуат с опорными абляционными рейками и метеоплощадкой; г, д – примеры автоматизированных метеорологических измерений в IV высотно-морфологической зоне ледника.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСНОВНЫХ ГЛЯЦИОЛОГИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ НА ПРИМЕРЕ ЛЕДНИКА ДЖАНКУАТ ЗА ПЕРИОД 1985–2020 гг.

Ледник Джанкуат как тестовый полигон и используемые данные

Предложенная модель применена для ледника Джанкуат, расположенного на Центральном Кавказе (рис. 1). Данный объект входит в мировую службу мониторинга ледников WGMS и считается репрезентативным для региона [3]. Ежегодные измерения основных компонент баланса массы, а также эпизодические серии гидрологических и

метеорологических наблюдений ведутся на Джанкуате с 1969 г. Объект относится к характерным для Кавказа ледникам долинного типа и имеет ступенчатую морфологию. Физическая площадь поверхности ледника составляет 2.93 км², средний уклон поверхности 23°, экспозиция северо-северо-западная, высотный диапазон 2700–3700 м над уровнем моря. Длина по направлению основного ледового потока составляет 2.95 км (2020 г.), ширина меняется от 500 м на языке до 1.5 км в средних высотно-морфологических зонах.

В этой работе использованы данные изменений компонентов баланса массы ледника за период 1985–2020 гг. [53]. Ежегодно на гляциологическом стационаре МГУ Джанкуат проводятся масс-балансовые работы, включающие измерения максимальной толщины снежного покрова перед началом сезона абляции с точностью 3–7%, плотности снежного покрова в опорных шурфах, а также слоя стаивания снега и льда по опорным рейкам в период с последней декады мая по последнюю декаду сентября [14]. Средняя точность оценки суточной абляции по опорным рейкам составляет 7%, сезонного таяния – 3% [3].

Также привлекались данные метеорологических измерений в сезон абляции за 2007–2018 гг. [53]. Натурные данные использовались для оценки точности данных реанализа ERA5 по району ледника Джанкуат, которые были исходной информацией для моделирования основных параметров ледника Джанкуат. Используются трехчасовые данные о температуре, удельной влажности, скорости ветра, компонентах радиационного баланса и облачности для оценки основных компонент теплого баланса по описанной выше методике, а также основные метеорологические характеристики на стандартных изобарических поверхностях для расчета орографической компоненты осадков за период 1985–2020 гг.

Можно отметить удачное воспроизведение реанализом температуры воздуха над поверхностью ледника (рис. 2а): систематическая ошибка порядка 1.5°C связана с тем, что метеостанция расположена на 200 м ниже ближайшего уровня реанализа. Хорошее соответствие данным наблюдений выявлено для прямой солнечной радиации: коэффициент детерминации составляет 0.8. Однако в среднем реанализ ERA5 завышает входящую коротковолновую радиацию на 24 Вт/м^2 . Это связано с тем, что в реанализе прямая радиация рассчитывается на горизонтальную, а не на наклонную поверхность. Хуже воспроизводится нисходящее длинноволновое излучение: скорее всего из-за недоучета в реанализе местной облачности. В перспективе это может быть исправлено за счет коррекции влагосодержания столба атмосферы и температуры, как это сделано в работе [12] и реализовано для Эльбруса [10]. Очень плохо реанализ ERA5 воспроизводит ветер над поверхностью ледника: глобальная модель не описывает мезомасштабные эффекты, в то время как фены и ледниковый ветер могут играть заметную роль во время сезона абляции, что показано в работе [24].

Краткое описание экспериментов

Реализовано два вычислительных эксперимента, в ходе которых решалось основное уравнение модели (4). В рамках первого эксперимента оценивалась реакция ледника Джанкуат на изме-

ренные за период 1985–2020 гг. вариации баланса массы. Второй эксперимент нацелен на моделирование реакции ледника на рассчитанные вариации баланса массы согласно подходам, описанным выше, с использованием в качестве входной информации срочных данных реанализа ERA5. Геометрия ледника Джанкуат была описана следующими характеристиками: масштабный параметр $\alpha = 0.00045$, ширина фронта ледника $w_0 = 400 \text{ м}$, длина от крайней нижней точки языка до верхней части границы питания 3400 м (по состоянию на стартовый 1981 г.); средний угол уклона ледовой поверхности 23° , экспозиция северо-северо-западная (при известной для каждого из 16 румбов закрытости горизонта). Результаты двух экспериментов позволили сравнить изменения основных параметров ледника Джанкуат при заданном и рассчитанном балансе массы.

Результаты моделирования компонентов баланса массы ледника Джанкуат

В целом можно отметить неплохое воспроизведение слоя абляции на леднике Джанкуат за период 1985–2020 гг. на качественном уровне: модель воспроизвела статистически значимый положительный тренд абляции (рис. 3а): коэффициент корреляции между двумя рядами модельных и натурных данных равен 0.65 (рис. 3б). При этом по данным наблюдений величина тренда составляет 20 мм/год , в то время как по результатам моделирования он вдвое меньше ($\sim 10 \text{ мм/год}$). Также заметно систематическое завышение моделью летнего таяния: в период 1985–2000 гг. среднее многолетнее значение абляции по данным наблюдений составило 2550 мм в. э. , в то время как по результатам моделирования 3100 мм в. э. . В 2000–2020 гг. величина годовой абляции увеличилась до 3020 мм/год по данным наблюдений и до 3325 мм/год по данным моделирования. В среднем ошибка воспроизведения абляции составляет $350 \pm 150 \text{ мм в. э.}$, т. е. весьма велика и близка к величине межгодовой изменчивости.

Слой аккумуляции воспроизводится предложенной моделью успешно на масштабах многолетних трендов и средних величин (рис. 3в, 3г). Коэффициент корреляции между модельным и измеренным годовым слоем аккумуляции составляет 0.68. Величина отрицательного тренда аккумуляции по данным наблюдений составила $10 \text{ мм в. э. год}^{-1}$. Она связана с общей тенденцией уменьшения годовой суммы осадков на Центральном Кавказе и подтверждается как данными метеорологических наблюдений на окрестных метеостанциях, так и результатами анализа ледового ядра Эльбруса [19]. По результатам моделирования величина тренда получилась несколько больше ($14 \text{ мм в. э. год}^{-1}$). В среднем за рассматриваемый период ошибка моделирования со-

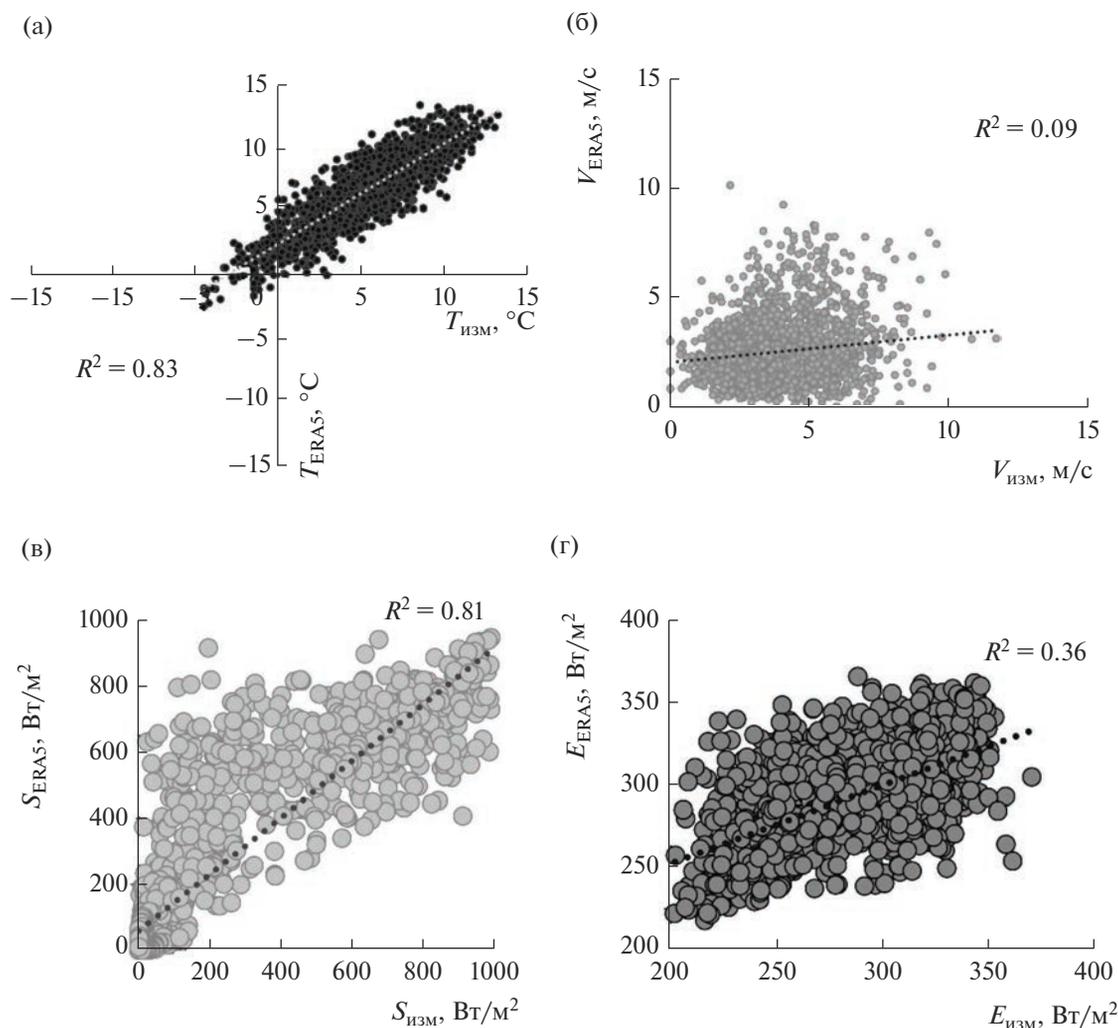


Рис. 2. Сопоставление срочных данных реанализа ERA5 с данными метеорологических измерений на леднике Джанкуат за сезоны абляции 2007–2009 гг.: температура воздуха T (а), скорость ветра V (б), приходящая коротковолновая радиация S (в), нисходящая длинноволновая радиация E (г).

ставляет всего 10 мм. Однако в отдельные годы (например, 2003 г.) величина ошибки годовой аккумуляции может составлять 800 мм. Это — основная проблема воспроизведения слоя аккумуляции. По всей видимости, она связана с необходимостью неформально учитывать лавинную составляющую питания. Для ледника Джанкуат эта величина принята равной 5% годовой аккумуляции [14], однако в отдельные годы она может достигать 30%. Также в отдельные годы значительную роль могут играть метелевый перенос и сублимация ледяных кристаллов.

Изменение длины ледника Джанкуат по данным наблюдений и моделирования

На рис. 4а, 4б показана межгодовая изменчивость годового баланса массы ледника Джанкуат: после 2005 г. как по данным измерений, так и по

результатам моделирования он ни разу не был положительным. Модель воспроизвела отрицательный тренд баланса массы (–30 мм/год), хорошо соответствующий реально наблюдаемому (–35 мм/год). Коэффициент корреляции между модельным и наблюдаемым рядами баланса массы составил 0.6. Эффект учета орографической составляющей осадков, угла наклона ледовой поверхности и физически обоснованных оценок турбулентных потоков тепла хорошо виден на рис. 4а: использование нескорректированных данных реанализа ERA5 приводит к нереалистичным значениям годового баланса массы. Если бы они наблюдались в реальности, то к 2020 г. ледник Джанкуат прекратил бы свое существование. Как видно, предложенная модель дает более реалистичный результат. Вместе с тем проблема систематического завышения слоя абляции проявляется в значительной ошибке воспроизведения

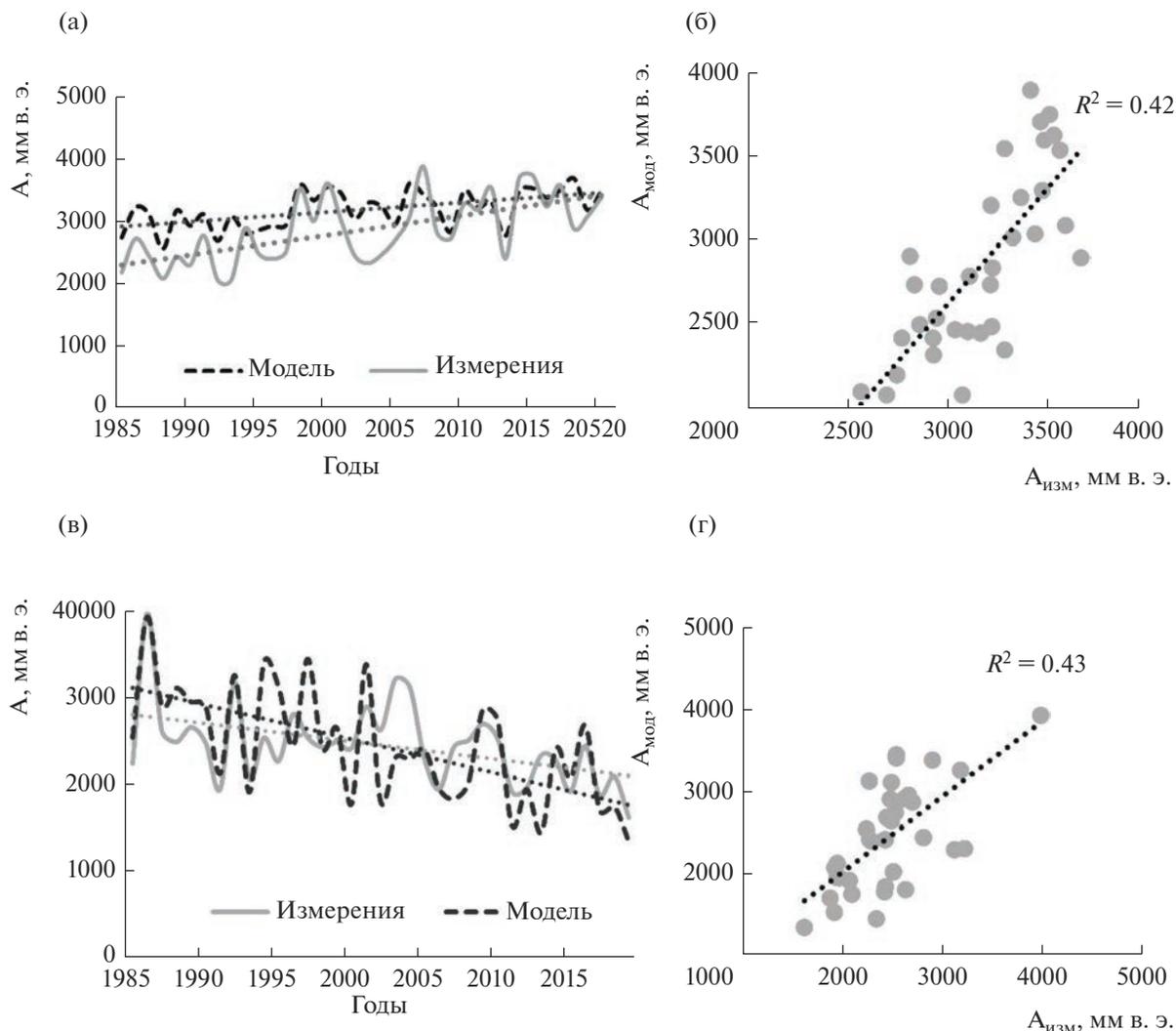


Рис. 3. Компоненты баланса массы ледника Джанкуат по данным наблюдений и моделирования за 1985–2020 гг.: временной ход годового слоя абляции A (а), диаграмма рассеяния годового слоя абляции A по данным наблюдений и моделирования (б), временной ход годового слоя аккумуляции A (в), диаграмма рассеяния годового слоя аккумуляции A по данным наблюдений и моделирования (г). На диаграммах указан коэффициент детерминации.

длины ледника. Результаты расчетов по уравнению (4) приведены на рис. 4в. Использование в расчетах измеренного баланса массы дало средние темпы сокращения длины ледника Джанкуат за период 1985–2020 гг. на уровне 13 м/год, или 455 м за весь период. На рис. 16 показаны границы ледника Джанкуат в 1985 и 2020 гг., восстановленные по спутниковым снимкам TERRA. Хорошо видно, что реальное отступление ледника за рассматриваемый период составило 460 м, что практически идеально соответствует модельным значениям (рис. 4в). В период максимального таяния (2000–2020 гг.) темпы отступления Джанкуата увеличились до 20 м/год. В случае расчетного баланса массы тренд длины ледника равен -28 м/год (1985–2020 гг.) и -45 м/год (2000–2020 гг.), т. е. значения завышены в 2.2 раза (рис. 4в).

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Обзор основных подходов к моделированию горных ледников показал, что одним из наиболее оптимальных вариантов для их описания в МЗС – ГГМ, причем минимальная модель Урлеманса [45] видится авторам статьи удачным подходом. При этом можно использовать не измеренный, а расчетный баланс массы. Некоторые исследователи выражают скепсис относительно необходимости учета горных ледников в МЗС. Однако с учетом вклада ледниковой составляющей в речной сток [56], обратной связи муссонной циркуляции с площадью, покрытой снегом в Гималаях [39], а также вклада таяния горных ледников в изменения уровня Мирового океана [35] этот скепсис может уступить место разработке соответствующих параметризаций.

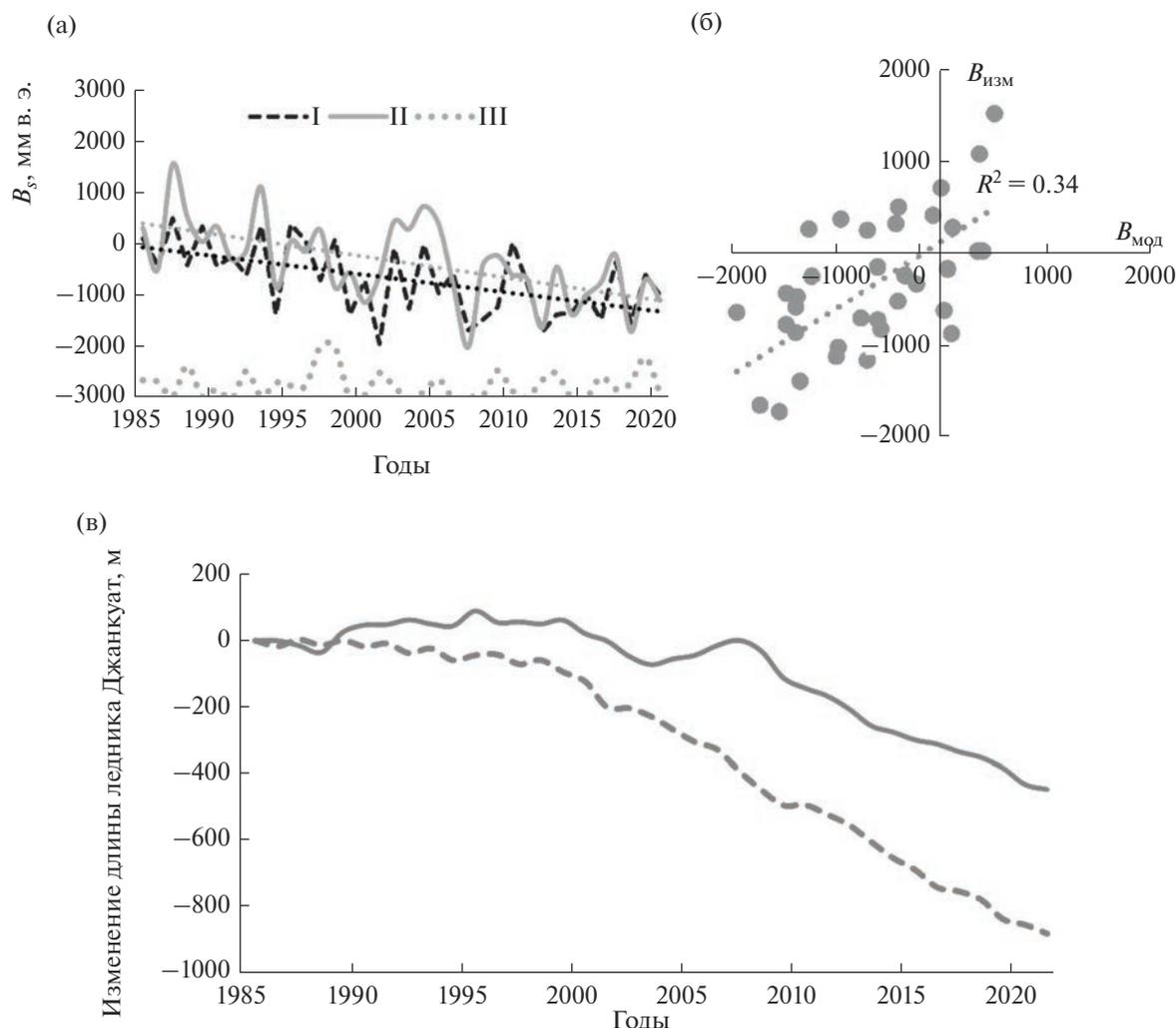


Рис. 4. Динамика баланса массы и длины ледника Джанкуат в 1985–2020 гг.: временной ход баланса B массы ледника по данным наблюдений (II), моделирования (I) и моделирования без учета орографического добавления осадков и коррекции радиации (III) (а); диаграмма рассеяния баланса B массы по данным наблюдений и моделирования (б); изменение длины ледника по данным наблюдений (сплошная кривая) и моделирования (пунктир) (в).

Показано, что учет орографической составляющей осадков и простого алгоритма распределения приходящей солнечной радиации по поверхности ледника существенно улучшает результаты расчета баланса массы по сравнению с прямым использованием данных реанализа ERA5 (рис. 4а). Модель продемонстрировала отрицательный тренд баланса массы, обусловленный в первую очередь увеличением абляции (~ 10 мм/год). Эти тенденции прежде всего связаны с ростом приходящей коротковолновой радиации, который ярко проявляется на Кавказе и может быть следствием увеличения повторяемости антициклонов летом [59] и причиной уменьшения концентрации атмосферного аэрозоля в последние 20–25 лет [48].

Вместе с тем следует отметить существенные ошибки расчета компонент баланса массы (особенно абляции), которые в итоге приводят к не-

реалистичному отступанию языка ледника Джанкуат в 1985–2020 гг. Причины завышения таяния следующие: 1) отсутствие хотя бы простого описания теплоизолирующей роли моренного чехла, роль которого особенно велика в нижних высотных-морфологических зонах ледника [17]; 2) простая эмпирическая зависимость альбедо от высоты и времени года [45] без учета выпадения свежего снега; 3) занижение баллов облачности в данных ERA5, отчасти связанное с отсутствием описания горно-долинной циркуляции в глобальной модели; 4) завышение реанализом нисходящей длинноволновой радиации, выявленное на основе сравнения с натурными данными (рис. 2г). Не исключено, что уменьшение ошибки моделирования слоя абляции в XXI в. (рис. 4а) связано с эволюцией радиационного блока глобальной мо-

дели Европейского центра среднесрочных прогнозов погоды.

Несмотря на значительные упрощения, принятые в ходе разработки модели, предложенная параметризация удачно воспроизводит временную динамику длины ледника за период 1985–2020 гг. по измерениям значений баланса массы. Это говорит об адекватности модели и обосновывает ее использование в качестве ядра параметризации горного оледенения в рамках МЗС ИВМ РАН [1]. В перспективе каждая ячейка глобальной модели будет содержать информацию об основных гляциологических и геодезических параметрах для каждого из 16 румбов: угол наклона и азимут ледниковой поверхности, закрытость горизонта, распределение площади, занятой льдом с высотой и т. д. Это позволит для каждой модельной ячейки по каждому румбу сформировать “статистически обобщенный ледник”, для которого можно реализовать предложенную модель. Важно отметить, что значительная часть нынешних недоработок модели может быть сравнительно легко устранена. В будущем будет добавлен блок снежного покрова с корректным расчетом температуры его поверхности и альбедо, модель катабатических ветров над ледником, учет суточного хода облачности в летние месяцы, упрощенный учет так называемого “моренного чехла”. Это позволит улучшить результаты расчета компонентов баланса массы и эволюции основных гляциологических параметров.

ВЫВОДЫ

В ходе данного исследования показано, что подход так называемых минимальных моделей (на примере модели Урлеманса) может использоваться для физико-математического описания горных ледников. Продемонстрировано удачное воспроизведение динамики длины ледника за период 1985–2020 гг. на основе измеренных значений баланса массы: -13 м/год, что практически идеально согласуется с натурными данными. В качестве начальных данных использована информация глобального реанализа ERA5. Это означает, что модель Урлеманса потенциально может быть использована в качестве ядра параметризации горного оледенения в МЗС. Результаты моделирования на основе рассчитанного баланса массы показали существенный положительный тренд абляции при мало меняющейся аккумуляции, что также соответствует реальности. Однако при этом годовой слой стаивания и длина сокращения ледника превышают реально наблюдаемые в 2 раза. Дальнейшее развитие модели (добавление блока снежного покрова, учет моренного чехла и горно-долинной циркуляции, усовершенствование параметризации орографи-

ческих осадков) позволит устранить эти недостатки.

Авторы выражают благодарность О.О. Рыбаку (ИВП РАН), а также А.Ф. Глазовскому и Д.В. Туркову (ИГ РАН) за полезные обсуждения работы и ценные рекомендации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Володин Е.М., Галин В.Я., Грицун А.С. и др.* Математическое моделирование Земной системы // М.: МАКС Пресс, 2016. 324 с.
2. *Волошина А.П.* Метеорология горных ледников // МГИ. 2001. Вып. 92. С. 3–138.
3. *Голубев Г.Н., Дюргеров М.Б., Маркин В.А. и др.* Ледник Джанкуат (Центральный Кавказ) / Под ред. *И.Я. Боярского*. Л.: Гидрометеоздат, 1978. 184 с.
4. *Догановский А.М.* Гидрология суши (общий курс). СПб.: РГГМУ, 2012. 524 с.
5. *Кислов А.В., Морозова П.А.* Стохастический анализ динамики горного ледника // Вестн. Московского ун-та. Сер. 5, География. 2013. № 4. С. 9–13.
6. *Котляков В.М.* Мир снега и льда. М.: Наука, 1994. 286 с.
7. *Кренке А.Н., Ананичева М.Д., Демченко П.Ф., Кислов А.В., Носенко Г.А., Поповнин В.В., Хромова Т.Е.* Ледники и ледниковые системы // Методы оценки последствий изменения климата для физических и биологических систем. М.: Планета, 2012. 508 с.
8. *Кренке А.Н., Ходаков В.Г.* О связи поверхностного таяния ледников с температурой воздуха // МГИ. 1966. Вып. 12. С. 153–164.
9. *Кунахович М.Г., Макаров А.В., Поповнин В.В.* Отклик ледника Джанкуат на ожидаемые изменения климата (по модели Эрлеманса) // Вестн. Московского ун-та. Сер. 5, География. 1996. № 1. С. 31–37.
10. *Михаленко В.Н., Кутузов С.С., Лаврентьев И.И., Торопов П.А., и др.* Ледники и климат Эльбруса. СПб.: Нестор-История, 2020. 372 с.
11. *Морозова П.А., Рыбак О.О.* Регионализация данных глобального климатического моделирования для расчета баланса массы горных ледников // Лед и снег. 2017. Вып. 57. № 4. С. 437–452.
12. *Незваль Е.И., Чубарова Н.Е., Гребнер Ю., Омур А.* Влияние атмосферных параметров на длинноволновую нисходящую радиацию и особенности ее режима в Москве // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2012. Т. 48. № 6. С. 682–690.
13. *Патерсон У.С.* Физика ледников. Изд. 2. М.: Мир, 1984. 472 с.
14. *Поповнин В.В., Сергиевская Я.Е.* Об обратной связи доли лавинного питания с аккумуляцией ледника // Лед и снег. 2018. Т. 58. № 4. С. 437–447.
15. *Постникова Т.Н., Рыбак О.О.* Глобальные гляциологические модели: новый этап в развитии методов прогнозирования эволюции ледников. Ч. 1. Общий подход и архитектура моделей // Лед и снег. 2021. Т. 62. № 2. С. 620–636.
16. *Рец Е.П., Фролова Н.Л., Поповнин В.В.* Моделирование таяния поверхности горного ледника // Лед и снег. 2011. Т. 116. № 4. С. 24–31.

17. Рыбак О.О., Рыбак Е.А., Корнева И.А. Модельные расчеты подморенного таяния на леднике Джанкуат // Системы контроля окружающей среды. 2018. № 12. С. 86–92.
18. Рыбак О.О., Рыбак Е.А., Кутузов С.С., Лаврентьев И.И., Морозова П.А. Калибровка математической модели динамики ледника Марух, Западный Кавказ // Лед и снег. 2015. Т. 55. № 2. С. 9–20.
19. Торопов П.А., Шестакова А.А., Ярынич Ю.И., Кутузов С.С. Моделирование орографической составляющей осадков на примере Эльбруса // Лед и снег. 2022. Т. 62. № 4. С. 485–503.
20. Турчанинова А.С., Лазарев А.В., Марченко Е.С., Селиверстов Ю.Г., Сократов С.А. и др. Методика оценки лавинного питания (на примере трех ледников Тянь-Шаня) // Лед и снег. 2019. Т. 59. № 4. С. 460–474.
21. Andreas E.L. A theory for the scalar roughness and the scalar transfer coefficients over snow and sea ice // Boundary-Layer Meteorol. 1987. V. 38. P. 159–184.
22. Barry R.G. Mountain Weather and Climate. 3rd edition. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2008. 506 p.
23. Bintanja R. Snowdrift Sublimation in a Katabatic Wind Region of the Antarctic Ice Sheet // J. Appl. Meteorol. 2001. V. 40. P. 1952–1966.
24. Broeke M.R. Momentum, heat and moisture budgets of katabatic wind layer over midlatitude glacier in summer // J. Appl. Meteorol. 1997. V. 36. № 6. P. 763–774.
25. Budd W.F., Jenssen D. Numerical modeling of glacier systems // IAHS Publ. 1975. V. 104. P. 267–291.
26. Businger J.A., Wyngaard J.C., Izumi Y., Bradley E.F. Flux-Profile Relationships in the Atmospheric Surface Layer // J. Atmos. Sci. 1971. V. 28. P. 181–189.
27. Carlson B.Z., Georges D., Rabatel A., Randin C.F., Renaud J., Delestrade A., Zimmermann N.E., Choler P., Thuiller W. Accounting for tree line shift, glacier retreat and primary succession in mountain plant distribution models // Diversity and Distributions. 2014. V. 20. P. 1379–1391.
28. Chen J., Xiang Q., Shichang K., Wentao D. Effects of clouds on surface melting of Laohugou glacier No. 12, western Qilian Mountains, China // J. Glaciol. 2018. V. 64. № 243. P. 89–99.
29. Cook K.H., Yang X., Carter C.M., Belcher B.N. A Modeling System for Studying Climate Controls on Mountain Glaciers with Application to the Patagonian Icefields Department of Earth and Atmospheric Sciences Cornell University Ithaca // Climatic Change. 2003. V. 56. № 3. P. 339–367.
30. Cullen J., Molg T., Kaser G., Steffen K., Hardy D. Energy-balance model validation on the top of Kilimanjaro, Tanzania, using eddy covariance data Nicolas // Annals Glaciol. 2007. V. 46. P. 227–233.
31. Dyer A.J. A Review of Flux-Profile Relationships // Boundary-Layer Meteorol. 1974. V. 7. P. 363–372.
32. Farinotti D., Huss M., Furst J.J., Landmann J., Machguth H., Maussion F., Pandit A. A consensus estimate for the ice thickness distribution of all glaciers on Earth // Nature Geosci. 2019. V. 12. № 3. P. 168–173.
33. GlaciThiDa Consortium: Glacier Thickness Database 3.0.1. Zurich, Switzerland: World Glacier Monitoring Service, 2019. <https://doi.org/10.5904/wgms-glathida-2019-03>
34. Hock R. Temperature index melt modelling in mountain areas // J. Hydrol. 2003. V. 282. № 1–4. P. 104–115.
35. Huss M., Hock R. A new model for global glacier change and sea-level rise // Frontiers Earth Sci. 2015. V. 3. № 54. P. 664–682.
36. Huss M., Hock R. Global-scale hydrological response to future glacier mass loss // Nature Climate Change. 2018. V. 8. № 2. P. 135–140.
37. Hutter K. The application of the shallow-ice approximation // Theoretical Glaciol. 1983. V. 1. P. 256–332.
38. Ibatullin S., Yasinskiy V., Mironenkov A. The impact of climate change on water resources in Central Asia // Republic of Kazakhstan, Almaty: Eurasian Development Bank Sector report № 6. 2009. 43 p.
39. Jin L., Ganopolski A., Chen F., Claussen M., Wang H. Impacts of snow and glaciers over Tibetan Plateau on Holocene climate change: Sensitivity experiments with a coupled model of intermediate complexity // Geophys. Res. Lett. 2005. V. 32. № 17. 360–390.
40. Kotlarski S., Jacob D., Podzun R., Frank P. Representing glaciers in a regional climate model // Climate Dynamic. 2010. V. 34. P. 27–46.
41. MacDougall A.H., Flowers G.E. Spatial and temporal transferability of a distributed energy-balance glacier melt-model // J. Climate. 2011. V. 24. № 5. P. 1480–1498.
42. Mölg T., Cullen N.J., Hardy D.R., Kaser J., Klok L. Mass balance of a slope glacier on Kilimanjaro and its sensitivity to climate // Int. J. Climatol. 2008. V. 28. P. 881–892.
43. Muller M.D., Scherer D. A grid-and subgrid-scale radiation parameterization of topographic effects for meso-scale weather forecast models // Monthly Weather Rev. 2005. V. 133. № 6. P. 1431–1442.
44. Nye J.F. A theory of wave formation on glaciers // IAHS Publ. 1958. V. 47. P. 139–154.
45. Oerlemans J. Minimal Glacier Models. Utrecht: Igitur, 2008. 91 p.
46. Ohmura A. Physical basis for the temperature-based melt-index method // J. Appl. Meteorol. 2001. V. 40. P. 753–761.
47. Østby T.I., Vikhamar T.S., Hagen J.O., Hock R., Kohler J., Reijmer C.H. Diagnosing the decline in climatic mass balance of glaciers in Svalbard over 1957–2014 // The Cryosphere. 2017. V. 11. P. 191–215.
48. Philipona R. Greenhouse warming and solar brightening in and around the Alps // Int. J. Climatol. 2013. V. 33. P. 1530–1537.
49. Pritchard H.D., Arthern R.J., Vaughan D.G., Edwards L.A. Extensive dynamic thinning on the margins of the Greenland and Antarctic ice sheets // Nature. 2009. V. 461. P. 971–975.
50. Radić V., Menounos B., Shea J., Fitzpatrick N., Mekdes A., Tessema M.A., Déry S.J. Evaluation of different methods to model near-surface turbulent fluxes for a mountain glacier in the Cariboo Mountains, BC, Canada // The Cryosphere. 2017. V. 11. P. 2897–2918.

51. *Raper S.C.B., Braithwaite R.J.* Glacier volume response time and its links to climate and topography based on a conceptual model of glacier hypsometry // *The Cryosphere*. 2009. V. 3. № 2. P. 183.
<https://doi.org/10.5194/tc-3-183-2009>
52. *Reichert B.K., Bengtsson L., Oerlemans J.* Recent glacier retreat exceeds internal variability // *J. Climate*. 2002. V. 15. P. 3069–3081.
53. *Rets E.P., Popovnin V.V., Toropov P.A. et al.* Djankuat glacier station in the North Caucasus, Russia: a database of glaciological, hydrological, and meteorological observations and stable isotope sampling results during 2007–2017 // *Earth Syst. Sci. Data*. 2019. V. 11. P. 1463–1481.
54. RGI Consortium. Randolph Glacier Inventory (RGI) – A dataset of global glacier outlines: Version 6.0. Technical Report. Global Land Ice Measurements from Space. Boulder, Colorado, USA, 2017.
<https://doi.org/10.7265/N5-RGI-60>.
55. *Shannon S., Smith R., Wiltshire A., Payne T., Huss M., Betts R., Caesar J., Koutroulis A., Jones D., Harrison S.* Global glacier volume projections under high-end climate change scenarios // *The Cryosphere*. 2019. V. 13. P. 325–350.
56. *Sorg A., Bolch T., Stoffel M., Solomina O., Beniston M.* Climate change impacts on glaciers and runoff in Tien Shan (Central Asia) // *Nature Climate Change*. 2012. V. 2. № 10. P. 725–731.
57. *Steiner D., Walter A., Zumbuhl H.J.* The application of a non-linear back-propagation neural network to study the mass balance of Grosse Aletschgletscher, Switzerland // *J. Glaciol.* 2005. V. 51. № 173. P. 313–323.
58. *Tolstykh M.A., Fadeev R.Y., Shashkin V.V., Goyman G.S.* Improving the Computational Efficiency of the Global SL-AV Numerical Weather Prediction Model // *Supercomputing Frontiers and Innovations*. 2021. V. 8. № 4. P. 11–23.
59. *Toropov P.A., Aleshina M.A., Grachev A.M.* Large-scale climatic factors driving glacier recession in the Greater Caucasus, 20th–21st century // *Int. J. Climatol.* 2019. V. 39. P. 4703–4720.
60. *Wheler B.A., Flowers G.E.* Glacier subsurface heat-flux characterizations for energy-balance modeling in the Donjek Range, southwest Yukon, Canada // *J. Glaciol.* 2011. V. 57. № 201. P. 121–133
61. *Zekollari H., Huss M., Farinotti D.* Modelling the future evolution of glaciers in the European Alps under the EURO-CORDEX RCM ensemble // *The Cryosphere*. 2019. V. 13. P. 1125–1146.
62. *Zekollari H., Huss M., Farinotti D., Lhermitte S.* Ice-Dynamical Glacier Evolution Modeling—A Review // *Rev. Geophys.* 2022. V. 60. № 2. P. e2021RG000754.