ВОДНЫЕ РЕСУРСЫ, 2023, том 50, № 5, с. 622–632

ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СУШИ С АТМОСФЕРОЙ И ГИДРОЛОГИЧЕСКИХ ПОСЛЕДСТВИЙ ИЗМЕНЕНИЯ КЛИМАТА

УДК 556.555.4/.5;556.556

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ В МЕЛКОВОДНОМ ОЗЕРЕ ДЛЯ ПЕРИОДОВ ПОДЛЕДНОЙ КОНВЕКЦИИ[1]

© 2023 г. А. А. Смирновский[a, b], С. И. Смирнов[a, *], С. Р. Богданов[a], Н. И. Пальшин[a], Р. Э. Здоровеннов[a], Г. Э. Здоровеннова[a]

[a] *Институт водных проблем Севера КарНЦ РАН, Петрозаводск, 185000 Республика Карелия, Россия*

[b] *Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, 195251 Россия*

**e-mail: sergeysmirnov92@mail.ru*

Поступила в редакцию 24.01.2023 г.
После доработки 20.03.2023 г.
Принята к публикации 20.03.2023 г.

Представлены результаты численного расчета методом Implicit Large Eddy Simulation подледной радиационно-генерированной конвекции, развивающейся в покрытых льдом водоемах умеренной зоны в конце периода ледостава. Важность изучения радиационно-генерированной конвекции обусловлена ролью, которую играет этот феномен в температурном режиме озер и функционировании озерных экосистем в конце периода ледостава. Моделирование проведено с использованием конечно-объемного программного кода SINF/Flag-S, разработанного в СПбПУ. В расчетах использовался алгоритм SIMPLEC со вторым порядком точности по времени. Дискретизация конвективных слагаемых выполнена с использованием схемы QUICK. В результате расчетов изучено изменение температуры и пульсационных компонент скорости с периодически изменяющейся интенсивностью внешней накачки энергии в течение суточного цикла. Проведены оценки диссипации кинетической энергии, базовой потенциальной энергии, потока плавучести, а также рассчитано изменение этих величин в течение суточного цикла радиационного воздействия. Оценена эффективность перемешивания столба воды при развитии радиационно-генерированной конвекции в расчетной области, имитирующей малое озеро, покрытое льдом.

Ключевые слова: Implicit LES, радиационно-генерированная конвекция, температура воды, турбулентные пульсации скорости, базовая потенциальная энергия, поток плавучести, диссипация энергии, эффективность перемешивания.

DOI: 10.31857/S0321059623600047, **EDN:** QVUMIO

ВВЕДЕНИЕ

Подледная конвекция в бореальных озерах в весенний период, возникающая в результате проникающей в толщу воды солнечной радиации, – важный и до сих пор недостаточно изученный феномен гидрофизики озер [7, 9, 14]. Экспериментальные наблюдения показывают, что по мере развития подледной радиационно-генерированной конвекции (РГК) в толще воды возникают крупномасштабные циркуляционные турбулентные движения, в частности конвективные ячейки, вихри, внутренние волны [4, 5, 18, 25]. Эти гидродинамические процессы и явления определяющим образом трансформируют температурный режим озера в конце зимы. РГК также оказывает значительное влияние на экосистему озера, поскольку конвективные движения определяют перенос растворенных и взвешенных веществ и частиц, клеток водорослей по водному столбу, что может стимулировать развитие подледного планктона [18, 21, 24]. Кроме того, возникающие конвективные движения интенсифицируют перенос тепла внутри водной толщи и на границах с донными отложениями и льдом, тем самым ускоряя таяние льда [15, 16]. Все это определяет важность и актуальность изучения особенностей тур-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 21-17-00262 “Перемешивание в бореальных озерах: механизмы и их эффективность”). Расчетные данные получены с использованием вычислительных ресурсов суперкомпьютерного центра СПбПУ.

булентного переноса и перемешивания при развитии РГК в озерах.

Развитие конвективного перемешивания вследствие проникновения солнечной радиации в водную толщу покрытых льдом озер подробно описано в ряде работ [6, 9, 20]. Показано, что в зависимости от толщины снежно-ледяного покрова и его структуры, размеров озер, температурного градиента водной толщи, погодных условий и ряда других факторов РГК может продолжаться несколько недель вплоть до вовлечения в перемешивание всей водной толщи. Температура воды в озерах умеренной зоны в конце ледостава вследствие радиационного прогрева может достигать 4°С [14].

РГК развивается в диапазоне температуры от 0°С до ~4°С – температуры при максимальной плотности пресной воды. При развитой конвекции можно выделить различающиеся по изменению температуры по глубине градиентный подледный слой, конвективный перемешанный слой (КПС), слой вовлечения, нижележащий слой устойчивой стратификации [9, 20]. Характерная черта развития РГК – постепенное увеличение температуры КПС и глубины его нижней границы. Когда температура КПС достигает температуры при максимальной плотности пресной воды, РГК останавливается; дальнейшее радиационное нагревание водного столба способствует его стабилизации и установлению устойчивой стратификации [17].

Определяющие развитие РГК факторы – поток солнечного радиационного тепла, проникающий под лед, прозрачность воды, а также температурный градиент внутри водной толщи до начала конвекции, который формируется в течение зимнего сезона и, в свою очередь, определяется рядом факторов, таких как глубина озера, площадь его поверхности, прозрачность воды, теплообмен с донными отложениями, проточность, ветровая нагрузка в предледоставный период и др.

Полевые исследования РГК в озерах умеренной зоны, покрытых льдом, сопряжены с рядом трудностей. Основная сложность заключается в том, что РГК развивается в конце зимы, когда снег и лед интенсивно тают, и ледяной покров начинает разрушаться, при этом нахождение на льду оборудования и исследователей становится небезопасным. Кроме того, для анализа эволюции величин потоков солнечной радиации в толще льда и воды, температура воды, скорости течений – определяющих скорость развития РГК – требуется максимально высокое пространственно-временно́е разрешение при измерениях, т. е. необходимы большое количество высокочувствительных измерительных датчиков и организация длительных измерений.

Преодолеть указанные трудности позволяет использование методов математического моделирования, которое открывает широкие возможности в исследовании геофизических сред [28]. Методы математического моделирования используются и при изучении подледной конвекции в [19, 27], где на основе метода моделирования крупных вихрей (Large Eddy Simuation (LES)) проведены численные исследования формирования и эволюции КПС.

При изучении геофизических систем в последние десятилетия широко используются так называемые модели второго поколения. Эти модели достаточно хорошо описывают турбулентные напряжения, но есть большие проблемы с расчетом корреляций “давление – скорости деформаций” и диссипативных слагаемых, что и отмечено в статье [1]. В этой связи LES- и DNS-моделирование отдельных геофизических процессов остается весьма актуальным.

Один из важных и по-прежнему актуальных вопросов, возникающих как при исследовании подледной конвекции в озерах, так и в случае изучения гидродинамических и теплофизических процессов, происходящих в более крупных геофизических объектах (больших озерах, морях, океанах), – оценка так называемой эффективности перемешивания, под которой обычно понимается та часть внешней энергетической накачки, которая идет на необратимое перемешивание слоев жидкости, а не переходит в тепло за счет вязкой диссипации. В случае РГК внешняя накачка представляет собой радиационный нагрев водного столба.

В недавно опубликованной работе [27] авторов настоящей статьи представлены результаты численного моделирования LES РГК, даны оценки таких параметров развития РГК, как скорость заглубления нижней границы КПС и скорость повышения температуры воды этого слоя. Верификация модельных расчетов проведена по данным многолетних натурных измерений температуры воды в период развития РГК в небольшом оз. Вендюрском (в южной части Карелии). В работе [27] также показано, что в КПС формируются крупномасштабные вихревые структуры – конвективные ячейки, существование которых подтверждается другими авторами как в численных, так и в полевых исследованиях [4, 20]. Кроме того, в [27] рассмотрена эволюция температурного профиля и параметров конвекции при меняющейся интенсивности периодического солнечного теплового потока.

Настоящая работа – продолжение исследований, опубликованных в [27]. Здесь представлены результаты численного моделирования РГК, включая исследование пульсационных характеристик, а также проведен анализ полученной в

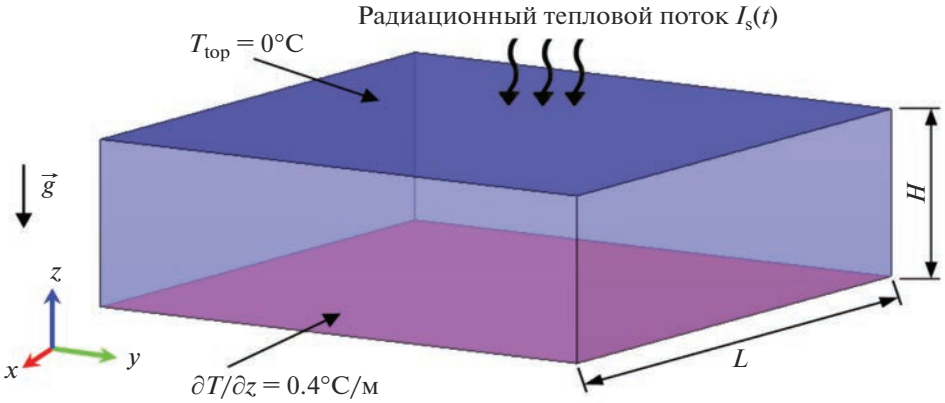

Рис. 1. Геометрия расчетной области и термические граничные условия.

расчетах эффективности перемешивания на основе оценки базовой потенциальной энергии, потока плавучести и скорости диссипации турбулентности.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Численное моделирование подледной конвекции проводилось в прямоугольной области с размерами $L \times L \times H$ (L – размер области в горизонтальных направлениях x и y, H – высота расчетной области, которая задавалась равной $H = 6.4$ м) (рис. 1). Для исследования чувствительности результатов к размеру расчетной области в горизонтальном направлении были рассмотрены два варианта: $L = 9.6$ м и $L = 19.2$ м. На верхней границе задавалась фиксированная температура 0°C, а на нижней – постоянный тепловой поток так, чтобы градиент температуры на дне был равен 0.4°C/м (рис. 1). На боковых поверхностях задавались периодические граничные условия, верхняя и нижняя поверхности – стенки с условиями непроницаемости и прилипания. Начальные поля соответствовали состоянию равновесия: скорость равнялась нулю, для температуры задан линейный профиль по глубине согласно граничным условиям.

Турбулентный тепломассообмен описывается уравнениями Навье–Стокса для несжимаемой жидкости с учетом плавучести в поле силы тяжести в приближении Буссинеска:

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V} \cdot \nabla\right)\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \beta\left(T_0 - T\right)\vec{g} + \nu\nabla^2\vec{V}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \left(\vec{V} \cdot \nabla\right)T = a\nabla^2 T + \frac{\partial I}{\partial z}, \tag{3}$$

здесь $\vec{V}$ – скорость, м/с; t – время, с; p – редуцированное давление, Па; T – температура, K; ρ – плотность, кг/м^3; a – коэффициент температуропроводности, м^2/с; ν – кинематический коэффициент вязкости, м^2/с; β – коэффициент температурного расширения, 1/K; $\vec{g}$ – вектор ускорения свободного падения, м/с^2; T_0 – температура жидкости в случае гидростатического равновесия; $\partial I/\partial z$ – объемный источник тепловыделения за счет поглощения солнечной радиации толщей воды, K/с.

Для коэффициента температурного расширения β использовалась следующая линейная зависимость от температуры, полученная путем аппроксимации зависимости плотности чистой воды от температуры в диапазоне 0–4°C:

$$\beta = b_1\left(T - T_{md}\right), \tag{4}$$

$b_1 = 1.65 \times 10^{-5}$ K^{-2}, $T_{md} = 3.84$°C. Остальные теплофизические свойства задавались постоянными и равными соответствующим значениям для чистой воды при температуре 2°C.

В работе использовался двухпараметрический закон затухания солнечной радиации:

$$I\left(z,t\right) = I_s\left(t\right)[a_1\exp(-\gamma_1 z) + a_2\exp(-\gamma_2 z)], \tag{5}$$

$I(z, t)$ — кинематический поток солнечного излучения, т. е. поток радиационного тепла, деленный на плотность и удельную теплоемкость (единица измерения Км/с). В настоящих расчетах использовались следующие значения параметров: $a_1 = 0.5$, $a_2 = 0.5$, $\gamma_1 = 2.7$ 1/м, $\gamma_2 = 0.7$ 1/м, что соответствует значениям, используемым в работе [20].

Радиационный тепловой поток на границе лед–вода $I_s(t)$ – периодическая функция, оцениваемая путем аппроксимации экспериментальных данных, полученных при исследованиях подледной конвекции в оз. Вендюрском (Карелия) весной 2020 г.:

$$I_s(t) = I_0\max(\sin(2\pi t/T^*), 0), \tag{6}$$

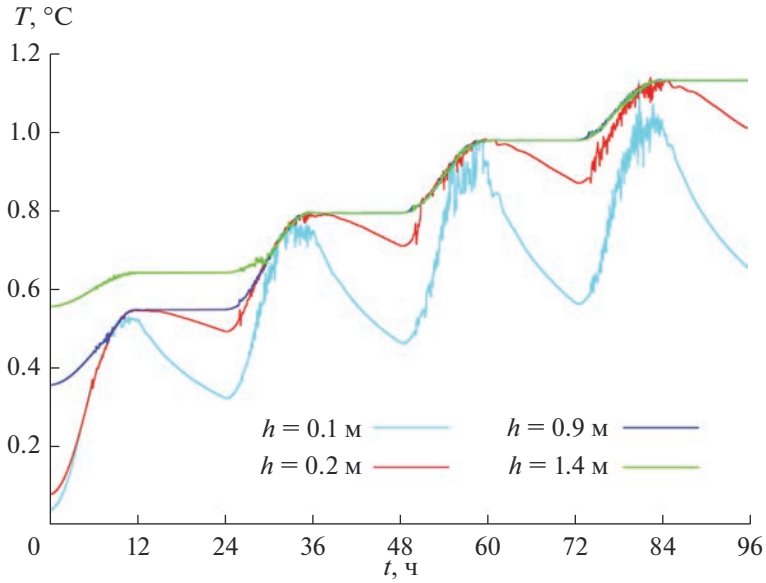

Рис. 2. Эволюция температуры воды на разных глубинах ($t = 0$ соответствует началу расчета, который "стартует" с момента восхода солнца, т. е. с 6 ч).

$T^* = 24$ ч – суточный период, выбрано значение $I_0 = 1.9 \times 10^{-5}$ Км/с (рис. 2 в [27]).

Для проведения расчетов использовался конечно-объемный программный код SINF/Flag-S, разработанный в СПбПУ. В работе использовался алгоритм SIMPLEC со вторым порядком точности по времени. Дискретизация конвективных слагаемых выполнена с использованием схемы QUICK (интерполяция на грань третьего порядка точности). Диффузионные слагаемые аппроксимировались по центрально-разностной схеме второго порядка точности. В расчетах использовался метод Implicit LES (ILES). В отличие от классического метода LES, где влияние турбулентного пульсационного движения на масштабах, меньших или сопоставимых с размерами ячейки сетки, описывается некоторой полуэмпирической моделью подсеточной вязкости (например, моделью Смагоринского), в методе ILES подсеточная турбулентная вязкость в явном виде не присутствует, ее роль играет так называемая схемная вязкость, обусловленная диссипативными свойствами противопоточной численной схемы аппроксимации конвективных слагаемых в уравнении движения (в данном случае схемы QUICK, обладающей относительно малой численной диссипацией).

Используемые расчетные сетки состояли из гексагональных элементов. Количество элементов варьировало от 0.5 до 27 млн. Для исследования влияния размеров расчетной области на получаемое решение проведены расчеты для двух областей – Г1 (9.6 м × 9.6 м × 6.4 м) и Г2 (19.2 м × × 19.2 м × 6.4 м) на сетках с 4.5 и 18 млн ячеек соответственно. На основании анализа полей скорости и температуры, а также флуктуаций компонент скорости в КПС область Г1 использована для проведения основного расчета на сетке, состоявшей из 27 млн ячеек (300 × 300 × 300 ячеек).

Для оценки качества численного моделирования при помощи подхода ILES вычислены значения диссипации турбулентности на разных расчетных сетках по следующей формуле:

$$\varepsilon = \nu \left\langle \frac{\partial V_j'}{\partial x_k} \frac{\partial V_j'}{\partial x_k} \right\rangle, \tag{7}$$

где $\langle ... \rangle$ обозначает осреднение по времени, V_j' – пульсация j-й компоненты скорости, x_k – пространственные координаты. При этом подразумевается следующее соответствие: $x_k = x, y, z$ при $k = 1, 2, 3$. Вычисленная по формуле (7) ε далее использовалась для оценки Колмогоровского масштаба турбулентности δ_K:

$$\delta_K = \left(\nu^3/\varepsilon\right)^{0.25}. \tag{8}$$

Проанализированы поля отношений характерного сеточного масштаба Vol, рассчитываемого как кубический корень из объема вычислительной ячейки, к Колмогоровскому масштабу: $\mathrm{Vol}^{1/3}/\delta_K$. Максимальное значение этого отношения достигало 10, в среднем ~2. Отметим, что максимальное значение скорости диссипации турбулентности ε составляло порядка 10^{-9} м^2/с^3, что коррелирует со значениями, полученными при натурных наблюдениях для оз. Вендюрского

[30]. Тем не менее, как следует из анализа сеточной сходимости, в расчетах даже на самой мелкой сетке получаются заниженные значения диссипации турбулентности; для более точного определения ε следует проводить расчеты на более мелких сетках либо использовать другие подходы (например, метод структурных функций [12] или методы на основе баланса кинетической энергии турбулентных пульсаций).

Используемый в расчетах на самой мелкой сетке шаг по времени, равный 2.5 с, оказывается существенно меньше, чем колмогоровский масштаб времени $t_K = (\nu/\varepsilon)^{0.5}$, во всей расчетной области на протяжении всего времени расчета.

РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Как показано в статье [27], численный расчет достоверно воспроизводит эволюцию температуры воды на разных глубинах водного столба. В качестве иллюстрации на рис. 2 приведены значения температуры в точках мониторинга, расположенных на разных глубинах, в зависимости от времени. Согласно численным расчетам, в первые несколько часов воздействия радиации подледный слой нагревается, пока не возникнет “обрушение” профиля вследствие гравитационной неустойчивости. В результате этого формируется КПС, характеризующийся интенсивным турбулентным движением; температура этого слоя почти постоянна по глубине. Глубина нижней границы КПС и его температура постепенно увеличиваются с течением времени, пока действует радиационный нагрев (первые 12 ч счета). Когда радиационный нагрев отсутствует (12–24 ч счета), конвективное движение постепенно замедляется и практически останавливается. Подледный слой воды постепенно охлаждается, верхняя часть КПС рестратифицируется. В тонком градиентном подледном слое и в верхней части КПС до глубины 0.3 м в ночные часы наблюдается уменьшение температуры (рис. 2). В то же время температура на других глубинах внутри КПС практически не изменяется. На следующий день от начала радиационного нагрева температура подледного слоя увеличивается, ближайшие к КПС слои жидкости вновь вовлекаются в конвективное движение. Этот цикл изменения температуры вблизи границы вода–лед повторяется каждую ночь. Аналогичная картина изменения температуры воды в ночное время наблюдалась на границе подледного слоя и в верхней части КПС при измерениях в Петрозаводской губе Онежского озера весной 2017 г. (рис. 7 в [6]). Эти суточные изменения можно интерпретировать как баланс между вертикальной диффузией и потоком плавучести [6, 17].

Как показано в [27], температура КПС достигает 1.2°C, а глубина его нижней границы достигает 3 м за 120 ч счета (~ 5 сут). Таким образом, средняя температура КПС увеличивается на ~0.25°C/сут, а глубина его нижней границы увеличивается на 0.6 м/сут. Полученные в численном моделировании скорости эволюции КПС хорошо согласуются с результатами натурных измерений на небольших озерах умеренной зоны [2, 3].

Согласно расчету, турбулентные колебания температуры в дневное время (рис. 2) увеличиваются изо дня в день вследствие увеличения интенсивности турбулентного движения. На рис. 3 приведена эволюция горизонтальной и вертикальной компонент скорости в трех точках мониторинга, находящихся в центре расчетной области на разной глубине. Как и на рис. 2 с колебаниями температуры, на рис. 3 видно, что турбулентное движение практически затухает в ночное время с постепенным увеличением интенсивности пульсаций в течение первых дней расчета. Как показано в работе [27], в развитом КПС амплитуды пульсаций компонент скорости близки по всей толще КПС (рис. 3). Точка мониторинга на глубине 0.2 м попадает в область подледного градиентного слоя, поэтому пульсации в этой точке несколько ниже, чем в оставшейся части КПС. Подобное поведение пульсаций скорости подтверждается и в экспериментальных наблюдениях. Следует отметить, что амплитуда пульсаций компонент скорости в первые дни растет заметно, а затем меняется слабо; радиационный нагрев идет в основном на изменение глубины нижней границы КПС (в результате вовлечения в движение верхних слоев устойчивого стратифицированного слоя), а также на увеличение его температуры, не приводя при этом к заметному увеличению интенсивности пульсационного движения в КПС.

На рис. 4 приведены мгновенные картины распределений пульсаций компонент скорости в вертикальном сечении. Видно, что пульсации имеют место исключительно внутри КПС, в градиентном подледном и нижележащем стратифицированном слоях движение отсутствует. В работе [27] отмечено, что конвективное движение в КПС характеризуется наличием крупномасштабных ячеек. Наличие этих ячеек иллюстрируется на рис. 5а, где приведено трехмерное распределение изоповерхностей двух (положительного и отрицательного) значений вертикальной компоненты скорости (вид сверху). Видно, что восходящее течение занимает бóльшую область, а нисходящее локализуется в гораздо более узких участках; нисходящее течение более интенсивное, что подтверждается распределением пульсаций вертикальной скорости внутри КПС в горизонтальном сечении (рис. 5б); т. е. наибольшая пульсация наблюдается в областях нисходящего течения, в зонах вос-

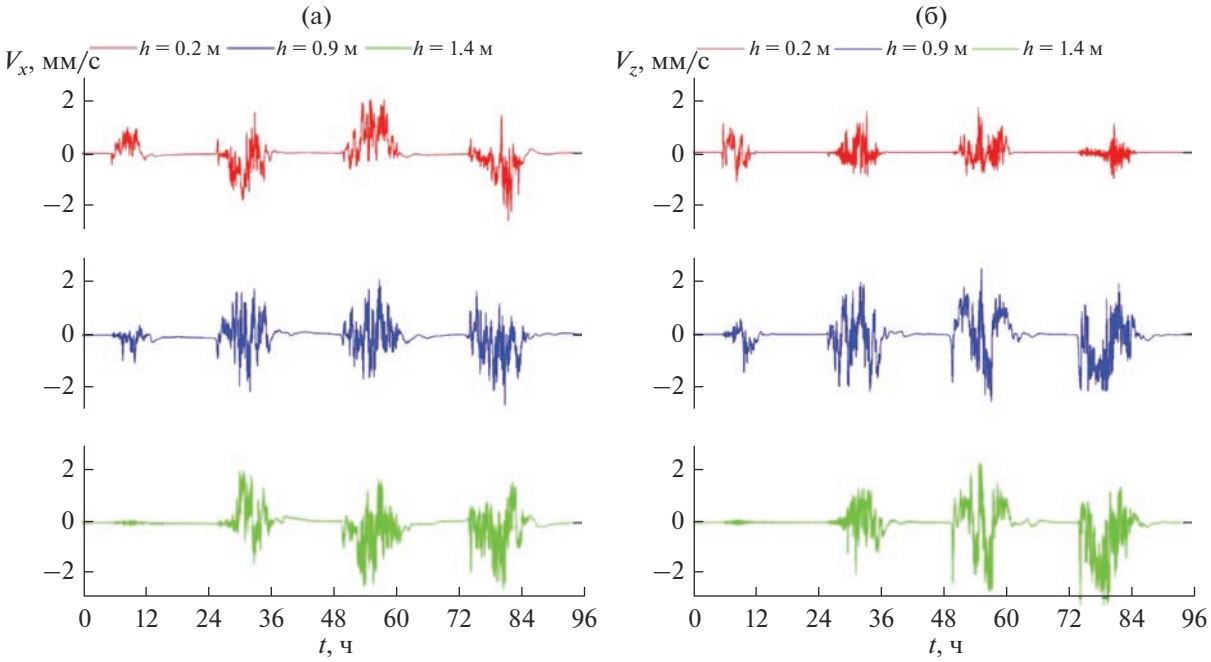

Рис. 3. Колебания горизонтальной (а) и вертикальной (б) компонент скорости на разных глубинах.

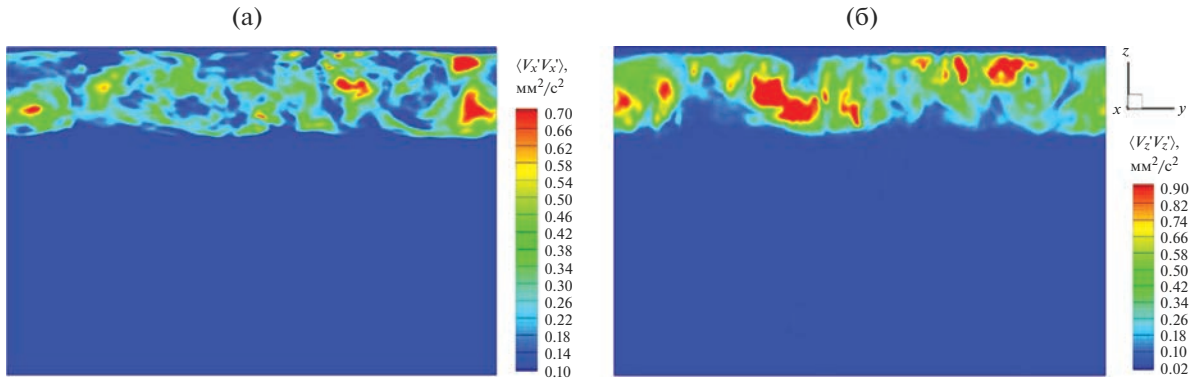

Рис. 4. Поля пульсаций горизонтальной (а) и вертикальной (б) компонент скорости в вертикальном сечении (осреднение проводилось с 14:00 до 15:00 ч второго дня расчета).

ходящего течения пульсации вертикальной компоненты скорости практически отсутствуют. При этом распределение горизонтальных пульсаций скорости (рис. 5в) выглядит более хаотичным, что говорит о наличии определенной анизотропии турбулентных пульсаций внутри КПС (подробнее – ниже). Тем не менее здесь также прослеживается наличие конвективных ячеек.

Эволюция пульсаций компонент скорости на глубине 1.5 м, осредненных за 1 ч и в горизонтальных направлениях, проиллюстрирована на рис. 6 (приведены результаты, полученные на последовательно сгущенных сетках: сетка 1 содержит 0.5 млн ячеек, сетка 2 – 4.5 млн ячеек, сетка 3 – 27 млн ячеек). Можно отметить, что на сетке 3 пульсационные характеристики уже слабо зависят от степени сеточного разрешения. Видно, что в первые несколько часов после начала радиационного нагрева слоя пульсационное движение слабое; в частности, временна́я задержка возникновения интенсивных пульсаций скорости после начала радиационного нагрева для второго и третьего дня составляет 1.5–2 ч. Наиболее интенсивные пульсации наблюдаются днем с 14 до 15 ч. Затем в связи с уменьшением радиационного нагрева происходит затухание пульсаций, а в ночное время они практически отсутствуют. Отметим, что между вторым и третьим днем наблюдается заметная разница максимальной амплитуды пульсаций в течение дня, тогда как между третьим

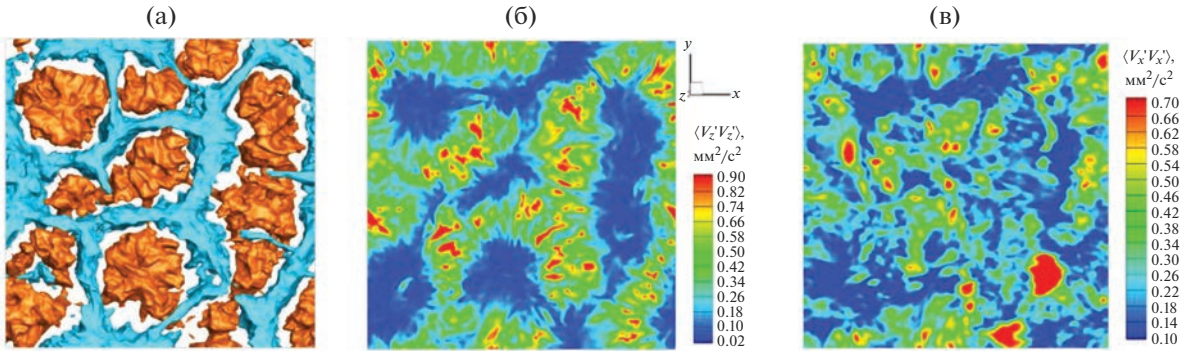

Рис. 5. Изоповерхности вертикальной составляющей скорости (а), $|\langle V_z \rangle| = 0.5$ мм/с, оранжевые структуры соответствуют восходящим течениям, голубые – нисходящим; поля пульсаций вертикальной (б) и горизонтальной (в) компонент скорости на глубине 1.5 м (осреднение проводилось с 14:00 до 15:00 ч второго дня).

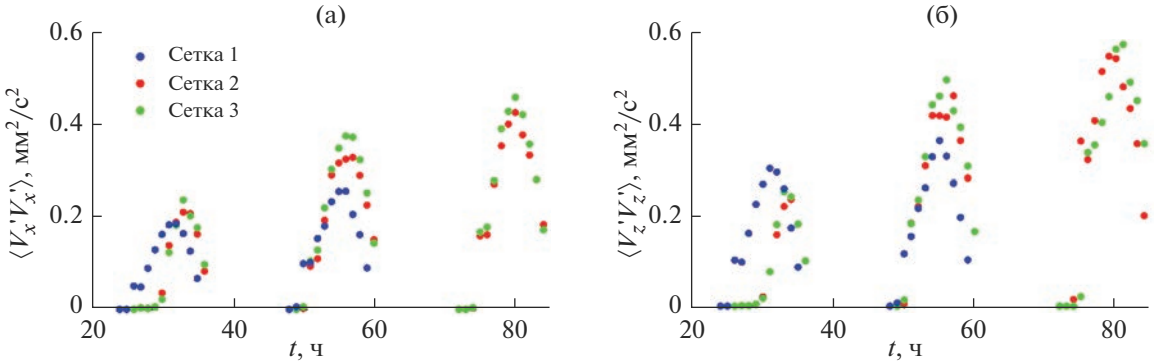

Рис. 6. Эволюция горизонтальных (а) и вертикальных (б) турбулентных пульсаций на глубине 1.5 м (со второго по четвертый дни); осреднение проводилось по времени в течение 1 ч и по пространству в горизонтальных направлениях.

и четвертым днем различие максимальных пульсаций уже достаточно мало. Таким образом, можно ожидать, что выход на установившийся режим максимальных пульсаций в течение дня происходит несколько дней (по крайней мере при сохранении интенсивности внешней накачки, что имеет место в данных расчетах; в реальности внешняя накачка может сильно меняться день ото дня, что, естественно, может приводить к увеличению продолжительности времени выхода на установившийся режим).

Во всех расчетах получено, что амплитуда пульсаций вертикальной составляющей скорости оказывается несколько выше амплитуды горизонтальных пульсаций (в горизонтальных направлениях пульсации изотропны), что говорит о наличии некоторой анизотропии турбулентности в КПС. Это противоречит результатам натурных наблюдений, в которых, наоборот, горизонтальные пульсации преобладают над вертикальными, а также присутствует анизотропия в горизонтальных направлениях. По-видимому, такое несоответствие обусловлено неучтенным в расчете средним течением в горизонтальном направлении, которое присутствовало в натурных исследованиях. С другой стороны, преобладание вертикальных пульсаций над горизонтальными в течениях рэлей-бенаровского типа отмечено во многих исследованиях и также подтверждено авторами настоящей статьи в работе [26]. Вопрос о влиянии среднего горизонтального движения на анизотропию пульсационного движения в КПС планируется исследовать в дальнейшем.

Рассмотрим оценку эффективности перемешивания η. Предварительно следует отметить некоторые особенности РГК, связанные в первую очередь с характером внешней энергетической накачки и, соответственно, с генерацией турбулентности и интенсификацией перемешивания.

В отличие от механического (ветрового) перемешивания, когда турбулентность возникает за счет непосредственной генерации кинетической энергии внешними силами, в случае РГК само возникновение турбулентности – результат неоднородного по вертикали прогрева водного столба. При этом энергетическая накачка турбулентности осуществляется в форме генерации доступной потенциальной энергии (той части потенци-

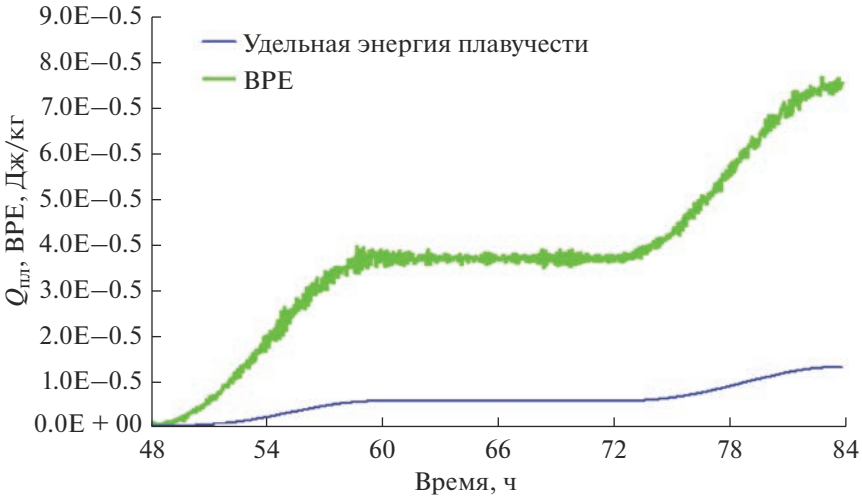

Рис. 7. Расчетные приращения удельной энергии плавучести $Q_{пл}$ и базовой потенциальной энергии BPE в период с 6:00 третьего дня до 18:00 четвертого дня.

альной энергии, которая может быть конвертирована в кинетическую энергию) в объеме КПС [13]. Количественной мерой этой генерации служит удельный поток плавучести $q_{пл}$ (Вт/кг):

$$q_{пл} = \frac{g}{\rho}\left\langle \rho' V_z' \right\rangle, \tag{9}$$

ρ' и V_z' – пульсации плотности и вертикальной компоненты скорости.

Еще одна особенность заключается в распределении потока плавучести по объему КПС. В случае радиационной конвекции, обусловленной поверхностным выхолаживанием, величина $q_{пл}$ практически линейно изменяется с глубиной в толще КПС, и, соответственно, среднее по слою значение потока плавучести составляет половину его значения на поверхности. В данной работе рассматривается другой тип РГК, при котором происходит неоднородный радиационный прогрев водного столба. В этом случае среднее по слою значение потока плавучести определяется формулой [20]:

$$q_{пл} = \frac{g}{2}\left(\beta(T(\delta))\, I(\delta,t) + \beta(T(h))\, I(h,t)\right) - \\ - \frac{g}{h-\delta}\int_{\delta}^{h} \beta(T(z))\, I(z,t)\, dz. \tag{10}$$

Здесь $I(z, t)$ определяется по формуле (5), $h(t)$ – глубина КПС, $\delta(t)$ – толщина подледного слоя, β вычисляется по формуле (4) с учетом зависимости температуры от глубины. Скорость генерации кинетической энергии турбулентных пульсаций внутри всего КПС определяется при этом величиной $(h - \delta)q_{пл}$, а удельная (на единицу массы всего слоя в целом) генерация – величиной $(h - \delta)q_{пл}/H$.

Переходя к количественной оценке эффективности перемешивания, следует отметить, что в литературе используются различные определения этой величины [10], основанные на использовании различных энергетических параметров. В настоящей работе в качестве таких параметров используются скорость диссипации кинетической энергии ε (определяемая формулой (7)) и та часть ε_p поступающего потока энергии, которая связана с энергозатратами на необратимую перестройку профилей плотности и температуры в процессе перемешивания. При этом величина η определяется как отношение ε_p к внешней накачке энергии [23]:

$$\eta = \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_p + \varepsilon}. \tag{11}$$

Для вычисления потока ε_p используется подход, основанный на введении понятия удельной базовой потенциальной энергии BPE (Background Potential Energy) (Дж/кг) [22, 31]. BPE представляет собой такую потенциальную энергию, которой обладал бы столб жидкости после адиабатического перераспределения его слоев до состояния с равновесным устойчивым профилем. Как показано в работах [22, 31], приращение BPE в единицу времени как раз соответствует потоку энергии ε_p и служит наиболее адекватной мерой той части необратимо конвертируемой энергии, которая связана, собственно, с перемешиванием.

В расчетах в данной работе использован алгоритм вычисления BPE, основанный на “сортировке” температуры по вертикали в каждый момент времени таким образом, чтобы получился профиль с устойчивой стратификацией, т. е. с увеличивающейся с глубиной плотностью. Затем

в каждый момент времени по профилю температуры рассчитывались значения актуальной плотности $\rho(t)$ в соответствии с формулой (4) для расчета коэффициента температурного расширения (ρ_0 – плотность воды при температуре T_{md}):

$$\rho(t) = \rho_0\left(1 - b_1(T - T_{md})^2/2\right). \quad (12)$$

После этого BPE вычислялось по следующей формуле:

$$\mathrm{BPE}(t) = \frac{\int_0^H \rho g z dz}{\int_0^H \rho dz} - \frac{\bar{\rho}(t) - \bar{\rho}(t_0)}{\bar{\rho}(t_0)}\frac{gH}{2}, \quad (13)$$

здесь интегрирование осуществляется по всей высоте расчетной области H, а второе слагаемое введено для учета изменения BPE в связи с постепенным прогревом столба воды начиная с некоторого момента времени t_0 (черта над ρ означает осреднение по вертикали). Рассчитываемая по формуле (13) BPE – функция времени; в дальнейшем будем рассматривать только приращение BPE по отношению к некоторому моменту времени t_0, т. е. $\Delta\mathrm{BPE} = \mathrm{BPE}(t) - \mathrm{BPE}(t_0)$.

Вторая величина, определяющая эффективность перемешивания по формуле (11), связана с необратимой вязкой диссипацией кинетической энергии. При этом, как отмечено выше, вычисление диссипации турбулентности ε по формуле (7) приводит к сильно заниженным значениям. В этой связи для оценки ε была использована альтернативная энергетическая характеристика – поток плавучести $q_{пл}$, определяющий скорость генерации кинетической энергии. Эту величину можно рассматривать как верхнюю оценку скорости диссипации ε [13]. Расчет $q_{пл}$ выполнялся непосредственно по формуле (10). При этом следует отметить, что для определения входящих в (10) параметров h и δ использовались величины, вычисленные в процессе расчета и сглаженные при помощи регрессионного анализа для получения более монотонной зависимости $q_{пл}(t)$. В дальнейшем будем использовать приращение удельной энергии плавучести для всей толщи воды $Q_{пл}$ (Дж/кг), определяемое как интеграл от удельного потока плавучести по интересующему интервалу времени $[t_0, t]$:

$$Q_{пл}(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{h - \delta}{H} q_{пл} dt. \quad (14)$$

Для оценки эффективности перемешивания был проведен расчет приращений базовой потенциальной энергии BPE и удельной энергии плавучести $Q_{пл}$ для периода с 6 ч третьего дня до 18 ч четвертого дня. Результаты представлены на рис. 7. Отметим следующие характерные особенности изменения этих величин со временем: в течение дня, когда присутствует внешняя накачка энергии, обе эти удельные энергии растут со временем, причем BPE растет значительно быстрее $Q_{пл}$. В ночной период энергия плавучести не меняется, поскольку накачки энергии нет, и BPE также практически постоянна. С наступлением следующего периода нагрева обе энергии начинают расти.

Проведем оценку эффективности перемешивания, которую в рассматриваемом случае можно рассчитать по следующей формуле:

$$\eta = \frac{\Delta\mathrm{BPE}}{\Delta\mathrm{BPE} + Q_{пл}}. \quad (15)$$

Для этого построим графики зависимости ΔBPE от суммы $\Delta\mathrm{BPE} + Q_{пл}$ и для каждого дня проведем регрессионные прямые для оценки средней эффективности перемешивания в течение дня (рис. 8). Видно, что, во-первых, зависимость BPE($Q_{пл}$) для каждого дня с хорошей точностью описывается уравнением прямой. Во-вторых, полученные в расчете значения эффективности перемешивания для каждого дня заметно отличаются друг от друга, причем эффективность перемешивания уменьшается по мере развития КПС. Что касается значения η, то для третьего дня оно составляет примерно 0.88, а для четвертого – 0.86. Следует ожидать, что с течением времени эффективность перемешивания выйдет на постоянное значение. В целом, полученные значения η неплохо коррелируют со значениями, которые были получены при изучении конвекции, генерируемой гравитационной неустойчивостью [8, 11], в частности в случае подледной конвекции [29]. В работе [29] приведены экспериментально полученные оценки эффективности перемешивания в результате радиационного нагрева покрытого льдом Онежского озера весной 2017 г.; разброс значений весьма высок, среднее за восемь дней значение составляет 0.65, тогда как среднее в течение дня равняется 0.75 со стандартным отклонением 0.19. Полученные в настоящей работе значения эффективности перемешивания превосходят натурные значения этого параметра, что связано, возможно, с “идеализированной” расчетной постановкой, не учитывающей переменность амплитуды радиационной накачки в разные дни, влияние горизонтальных течений, возникновение внутренних волн и пр., а также может быть связано с погрешностями расчета из-за недостаточно подробной сетки. Отметим также, что абсолютные значения приращения BPE за день, полученные в расчете и приведенные в [29], также находятся в неплохом соответствии друг с другом при соизмеримой внешней накачке: в расчете получено ежедневное приращение BPE ~4×10^{-5} Дж/кг (рис. 7–8), тогда как в [29] сред-

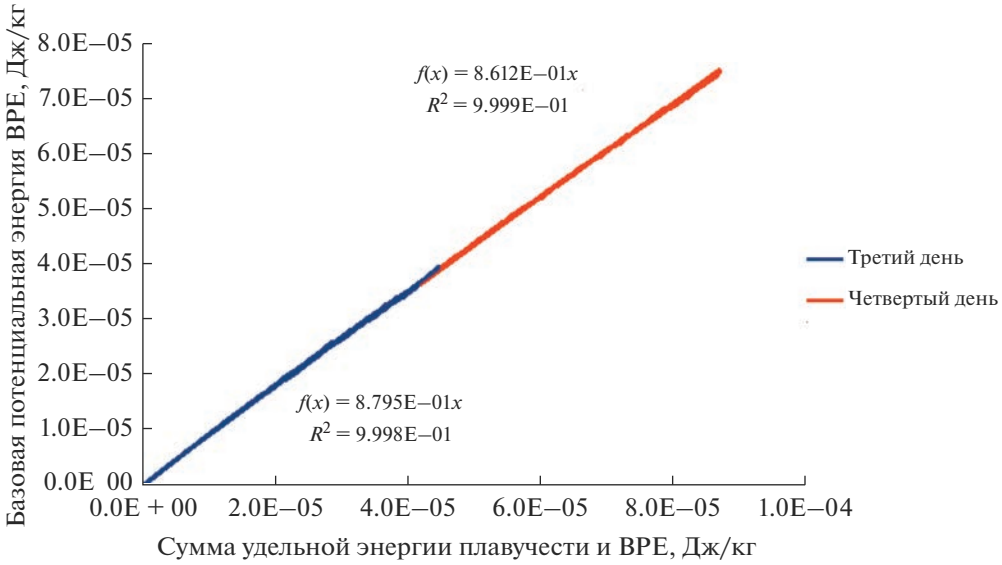

Рис. 8. Зависимость BPE от потока плавучести для третьего (синяя линия) и четвертого (красная линия) дней; на графике также приведены регрессионные прямые и их уравнения со значениями коэффициентов детерминации R^2.

нее приращение BPE за день составляет ~7×10^{-5} Дж/кг.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлены результаты численного моделирования подледной конвекции, вызванной неоднородным по вертикали солнечным радиационным нагревом столба воды; такой тип конвекции характерен для покрытых льдом озер умеренной зоны в конце зимы – начале весны. Моделирование проводилось для периодической радиационной накачки, которая имитировала суточные вариации солнечного излучения в подледном слое озер весной.

Проведено исследование пульсационных характеристик скорости, выявлена анизотропия турбулентности в КПС. По результатам расчетов на разных сетках оценены такие параметры, как скорость диссипации кинетической энергии, базовая потенциальная энергия, поток плавучести, а также рассчитано изменение этих величин в течение суточного цикла радиационного воздействия. Оценена эффективность перемешивания столба воды при развитии РГК в расчетной области, имитирующей малое озеро, покрытое льдом.

Полученные в расчете значения диссипации турбулентности оказываются несколько меньше, а значения эффективности перемешивания – несколько больше, чем наблюдаемые в натурных условиях. Недооценка диссипации может быть связана с недостаточным сеточным разрешением. Переоценка эффективности перемешивания может быть обусловлена тем, что в настоящей работе рассчитывался еще только формирующийся КПС, когда, возможно, бóльшая часть закачиваемой радиационной энергии идет на увеличение BPE и наблюдается бóльшая эффективность перемешивания, чем в натурных наблюдениях, когда исследовался уже сформировавшийся конвективный слой. Также остается открытым вопрос о вычислении потока плавучести в рассматриваемом случае начального этапа формирования КПС. Для уточнения расчетных данных по диссипации турбулентности и эффективности перемешивания необходимо дальнейшее проведение численных исследований с увеличением расчетного периода и изменением характера внешней радиационной накачки.

Хорошее согласие параметров турбулентности и их изменений в течение суточного цикла радиационного воздействия, оцененных по результатам численного моделирования и по данным натурных измерений, дает основание предполагать, что используемая численная модель может рассматриваться как полезный инструмент для изучения проникающей конвекции в покрытых льдом озерах. Дальнейшие численные эксперименты будут направлены на выявление некоторых важных аспектов структуры и параметров турбулентности, в частности ее природы и анизотропии, на выявление разницы между спектрами вертикальных и горизонтальных флуктуаций, функций передачи энергии и пр.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мортиков Е.В., Глазунов А.В., Дебольский А.В., Лыкосов В.Н., Зилитинкевич С.С.* О моделировании скорости диссипации кинетической энергии турбулентности // ДАН. 2019. Т. 489. № 4. С. 414–418.

2. *Bai Q., Li R., Li Z., Lepparanta M., Arvola L., Li M.* Time-series analyses of water temperature and dissolved oxygen concentration in Lake Valkea-Kotinen (Finland) during ice season // Ecol. Inform. 2016. V. 36. P. 181–189.

3. *Bengtsson L., Malm J., Terzhevik A., Petrov M., Boyarinov P., Glinsky A., Palshin N.* Field investigation of winter thermo- and hydrodynamics in a small Karelian lake // Limnol. Oceanogr. 1996. V. 41. P. 1502–1513.

4. *Bogdanov S., Zdorovennova G., Volkov S., Zdorovennov R., Palshin N., Efremova T., Terzhevik A., Bouffard D.* Structure and dynamics of convective mixing in Lake Onego under ice-covered conditions // Inland Waters. 2019. V. 9. P. 177–192.

5. *Bouffard D., Zdorovennov R., Zdorovennova G., Pasche N., Wüest A., Terzhevik A.* Icecovered Lake Onega: Effects of radiation on convection and internal waves // Hydrobiologia. 2016. V. 780. P. 21–36.

6. *Bouffard D., Zdorovennova G., Bogdanov S., Efremova T., Lavanchy S., Palshin N., Terzhevik A., Råman Vinnå L., Volkov S., Wüest A., Zdorovennov R., Ulloa H.N.* Under-ice convection dynamics in a boreal lake // Inland Waters. 2019. V. 9. P. 142–161.

7. *Bouffard D., Wüest A.* Convection in lakes // Annu. Rev. Fluid Mech. 2019. V. 51. P. 189–215.

8. *Davies Wykes M.S., Hughes G.O., Dalziel S.B.* On the meaning of mixing efficiency for buoyancy-driven mixing in stratified turbulent flows // J. Fluid Mech. 2015. V. 781. P. 261–275.

9. *Farmer D.M.* Penetrative convection in the absence of mean shear // Q. J. R. Meteorol. Soc. 1975. V. 101. P. 869–891.

10. *Gregg M.C., D'Asaro E.A., Riley J.J., Kunze E.* Mixing Efficiency in the Ocean // Annual Rev. Marine Sci. 2018. V. 10. P. 443–473.

11. *Hughes G.O., Gayen B., Griffiths R.W.* Available potential energy in Rayleigh–Bénard convection // J. Fluid Mech. 2013. V. 729. P. R3.

12. *Jabbari A., Rouhi A., Boegman L.* Evaluation of the structure function method to compute turbulent dissipation within boundary layers using numerical simulations // JGR Oceans. 2016. V. 121. P. 5888–5897.

13. *Jonas T., Terzhevik A.Y., Mironov D.V., Wüest A.* Radiatively driven convection in an ice-covered lake investigated by using temperature microstructure technique // J. Geophys. Res. 2003. V. 108. P. 3183.

14. *Kirillin G., Leppäranta M., Terzhevik A., Granin N., Bernhardt J., Engelhardt C., Efremova T., Golosov S., Palshin N., Sherstyankin P., Zdorovennova G., Zdorovennov R.* Physics of seasonally ice-covered lakes: A review // Aquat. Sci. 2012. V. 74. P. 659–682.

15. *Kirillin G., Aslamov I., Leppäranta M., Lindgren E.* Turbulent mixing and heat fluxes under lake ice: The role of seiche oscillations // Hydrol. Earth Syst. Sci. 2018. V. 22. P. 6493–6504.

16. *Kirillin G., Aslamov I., Kozlov V., Zdorovennov R., Granin N.* Turbulence in the stratified boundary layer under ice: Observations from Lake Baikal and a new similarity model // Hydrol. Earth Syst. Sci. 2020. V. 24. P. 1691–1708.

17. *Kirillin G., Terzhevik A.* Thermal instability in freshwater lakes under ice: Effect of salt gradients or solar radiation? // Cold Reg. Sci. Technol. 2011. V. 65. P. 184–190.

18. *Kelley D.* Convection in ice-covered lakes: Effects on algal suspension // J. Plankton Res. 1997. V. 19. P. 1859–1880.

19. *Mironov D.V., Danilov S.D., Olbers D.J.* Large-eddy simulation of radiatively-driven convection in ice covered lakes // Proc. Sixth Workshop Phys. Processes Natural Waters / Ed. *X. Casamitjana*. Girona, Spain: Univ. Girona, 2001. P. 71–75.

20. *Mironov D., Terzhevik A., Kirillin G., Jonas T., Malm J., Farmer D.* Radiatively driven convection in ice-covered lakes: Observations, scaling, and a mixed layer model // J. Geophys. Res. 2002. V. 107. P. 7-1–7-16.

21. *Palshin N., Zdorovennova G., Zdorovennov R., Efremova T., Gavrilenko G., Terzhevik A.* Effect of Under-Ice Light Intensity and Convective Mixing on Chlorophyll a Distribution in a Small Mesotrophic Lake // Water Resour. 2019. V. 46. P. 384–394.

22. *Peltier W.R., Caulfield C.P.* Mixing efficiency in stratified shear flows // Annu. Rev. Fluid Mech. 2003. V. 35. P. 135–167.

23. *Salehipour H., Peltier W.R.* Diapycnal diffusivity, turbulent Prandtl number and mixing efficiency in Boussinesq stratified turbulence // J. Fluid Mech. 2015. V. 775. P. 464–500.

24. *Salmi P., Salonen K.* Regular build-up of the spring phytoplankton maximum before ice-break in a boreal lake // Limnol. Oceanogr. 2016. V. 61. P. 240–253.

25. *Salonen K., Pulkkanen M., Salmi P., Griffiths R.* Interannual variability of circulation under spring ice in a boreal lake // Limnol. Oceanogr. 2014. V. 59. P. 2121–2132.

26. *Smirnov S., Smirnovsky A., Bogdanov S.* The Emergence and Identification of Large-Scale Coherent Structures in Free Convective Flows of the Rayleigh-Bénard Type // Fluids. 2021. V. 6. P. 431.

27. *Smirnov S., Smirnovsky A., Zdorovennova G., Zdorovennov R., Palshin N., Novikova I., Terzhevik A., Bogdanov S.* Water Temperature Evolution Driven by Solar Radiation in an Ice-Covered Lake: A Numerical Study and Observational Data // Water. 2022. V. 14. P. 4078.

28. *Stepanenko V., Mammarella I., Ojala A., Miettinen H., Lykosov V., Vesala T.* LAKE 2.0: a model for temperature, methane, carbon dioxide and oxygen dynamics in lakes // Geosci. Model Development. 2016. V. 9. P. 1977–2006.

29. *Ulloa H.N., Wüest A., Bouffard D.* Mechanical energy budget and mixing efficiency for a radiatively heated ice-covered waterbody // J. Fluid Mech. 2018. V. 852. P. R1.

30. *Volkov S., Bogdanov S., Zdorovennov R., Zdorovennova G., Terzhevik A., Palshin N., Bouffard D., Kirillin G.* Fine scale structure of convective mixed layer in ice-covered lake // Environ. Fluid Mech. 2019. V. 19. P. 751–764.

31. *Winters K.B., Lombard P.N., Riley J.J., D'Asaro E.A.* Available potential energy and mixing in density-stratified fluids // J. Fluid Mech. 1995. V. 289. P. 115–228.