

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ГИДРОЛОГИИ СУШИ

УДК 556.5

### ОПЫТ ЧИСЛЕННОГО ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОТЯЖЕННЫХ УЧАСТКОВ РЕК<sup>1</sup>

© 2023 г. В. В. Беликов<sup>a, \*</sup>, А. И. Алексюк<sup>a, b</sup>, Н. М. Борисова<sup>a</sup>,  
Е. С. Васильева<sup>a, \*\*</sup>, А. В. Глотко<sup>a, c</sup>

<sup>a</sup> Институт водных проблем РАН, Москва, 119333 Россия

<sup>b</sup> МГУ им. М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, 119991 Россия

<sup>c</sup> «Национальный исследовательский Московский Государственный строительный университет»,  
Москва, 129337 Россия

\*e-mail: belvv@bk.ru

\*\*e-mail: vasilevaes@yandex.ru

Поступила в редакцию 29.09.2022 г.

После доработки 30.01.2023 г.

Принята к публикации 30.01.2023 г.

Сформулированы основные требования к численным алгоритмам для гидродинамического 2D-моделирования протяженных и гиперпротяженных участков рек и речных долин длиной до тысяч километров. Главным является применение адаптивных неструктурированных сеток, а также алгоритмов, дающих правильные значения отметок водной поверхности на “грубых” сетках с учетом резких перепадов отметок дна. Представлена гидродинамическая модель р. Амур общей протяженностью >3 тыс. км, основанная на численном решении двумерных уравнений мелкой воды (Сен-Венана) по оригинальному высокоточному алгоритму с учетом дорожных и защитных сооружений на пойме. Описаны этапы построения модели, ее верификации и результаты расчетов экстраординарного наводнения в 2013 г. и высокого наводнения в 2020 г. Приведены отметки уровней (с оценкой погрешности) и величины расходов воды на водопостах, скоростные поля течения, зоны затопления пойменных территорий.

**Ключевые слова:** численные алгоритмы, задача Римана, гидродинамическая модель протяженного участка, наводнение, зона затопления, р. Амур.

**DOI:** 10.31857/S032105962304003X, **EDN:** QKDSWC

#### ВВЕДЕНИЕ

В связи с постоянно увеличивающейся производительностью ЭВМ и быстрым развитием методов дистанционного зондирования Земли (ДЗЗ) все большее число исследователей обращается к разработке численных гидродинамических моделей протяженных участков рек. Если на заре численного моделирования открытых потоков (в 1960–1970-х гг.) ограничивались сотнями метров или несколькими километрами, то затем это стали десятки, сотни и наконец тысячи километров. В настоящей статье рассматриваются одномерные и двумерные гидродинамические модели, позволяющие одновременно получать значения расходов

и уровней воды в любом створе области течения (в отличие от гидрологических, позволяющих определить только величину расходов воды). Модели, основанные на трехмерных уравнениях Навье–Стокса или уравнениях турбулентного движения Рейнольдса, для протяженных участков рек оказываются избыточными, труднореализуемыми, не обеспеченными исходной информацией с нужной степенью детализации и поэтому в настоящее время не применяются.

Для определенности дальнейшего изложения введем следующую простую классификацию гидродинамических моделей участков рек по их длине:

0 км < очень короткие < 1 км;

1 км < короткие < 10 км;

10 км < средней длины < 100 км;

100 км < протяженные < 1000 км;

Гиперпротяженные (сверхпротяженные) > 1000 км.

<sup>1</sup> Работа выполнена в рамках Государственного задания ИВП РАН (тема FMWZ-2022-0003 “Разработка численных моделей гидрологических, гидродинамических и гидромеханических процессов в водных объектах и их водосборных бассейнах, создание на основе разработанных моделей технологий поддержки решений в сфере водной безопасности для информационной модернизации водохозяйственной отрасли России”).

В дальнейшем ограничимся рассмотрением только протяженных и гиперпротяженных участков рек.

Стремление к численному моделированию таких задач вызвано рядом причин.

Во-первых, физическое моделирование долин рек протяженностью тысячи километров невозможно из-за масштабного эффекта. Крупнейшая физическая модель такого рода, известная авторам, находится в Китае и расположена в специальном здании длиной 1 км, по которому сотрудники передвигаются на автомобилях. Это модель нижнего участка р. Хуанхэ длиной ~400 км, выполненная в горизонтальном масштабе 1 : 600 и вертикальном 1 : 60, т. е. с искажением вертикального масштаба в 10 раз. В математическом моделировании масштабный эффект отсутствует, но требуется достаточная для получения приемлемых результатов густота расчетной сетки, от которой сильно зависит время расчетов.

Во-вторых, на протяженных моделях зачастую намного проще задавать более точные граничные условия. Классический пример — это течения в дельтах и устьевых участках рек. В этом случае для правильного учета приливно-отливных и сгонно-нагонных явлений необходимо отодвигать выходную (нижнюю) границу модели в море (залив, озеро) и задавать на ней приливные гармоники и ветровые изменения водной поверхности. В то же время верхние (входные) границы модели необходимо удалять на большое расстояние от моря так, чтобы влияние моря в створе полностью исчезало при любых сценариях. Иначе нельзя задавать естественный расход воды в реке в качестве входного граничного условия. С учетом вышеизложенного компьютерные модели устьевых участков крупных рек должны быть весьма протяженными.

Аналогичная проблема с граничными условиями возникает и для внутренних участков рек. В этом случае обычно в качестве условия на выходной границе для равнинных рек задается связь расходов и уровней  $Q = f(H)$ , которая чаще всего привязывается к существующему водомерному посту. Но если эта связь задана однозначной функцией, то тогда на подъеме и на спаде паводка при одних и тех же расходах воды в модели будут приниматься и одинаковые уровни, хотя в реальности это не так (существует петля гистерезиса). Получаем погрешность из-за неточного граничного условия, которая может распространяться вверх по течению реки на значительное расстояние. Поэтому следует отодвигать выходную границу (замыкающий створ) как можно дальше от основной расчетной области.

Моделирование протяженных участков рек важно для прогнозирования развития экстремальных половодий и паводков на больших тер-

риториях. В этом случае в моделях должны учитываться широкопойменные участки с большой степенью аккумуляции расхода, извилистость и многорукавность русла, наличие защитных и перегораживающих сооружений на пойме, а также боковой приток воды на рассматриваемом участке, который, в частности, может определяться с помощью специальных гидрологических моделей.

Необходимость использования моделей протяженных участков рек возникает и при расчете волн прорыва напорных гидротехнических сооружений. Особенно это становится важным при наличии высоких плотин, водохранилищ большого объема, а также при гипотетической возможности каскадной аварии. Для моделирования волн прорыва требуются модели протяженностью сотни и тысячи километров, включающие водохранилища как верхнего, так и нижнего бьефов аварийного гидроузла и далее всего каскада. Выделить в этом случае участок ограниченной длины часто не представляется возможным.

Также протяженные модели речных систем и водохранилищ используются в задачах оптимизации и регулирования каскадов гидроузлов для целей увеличения выработки электроэнергии, обеспечения бесперебойного судоходства, пропуска экстремальных паводков. Иногда при этом используются нульмерные (балансовые) модели, но они не позволяют в полной мере учесть динамику водного потока, особенно для протяженных участков. Не применима для расчета водохранилищ и модель кинематической волны, поскольку уровень воды в водохранилище на большом протяжении почти горизонтален, а ложе (дно) имеет уклон, что противоречит основному допущению модели кинематической волны о равенстве уклонов дна и свободной поверхности воды.

В данной статье упомянуты некоторые работы и модели протяженных участков рек (не все из них опубликованы), которые находятся в кругу интересов авторов или выполнены непосредственно с их участием.

## ОБЗОР НЕКОТОРЫХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПРОТЯЖЕННЫХ УЧАСТКОВ РЕК

### *Одномерные модели*

Исторически вполне естественно сложилось, что первоначально модели протяженных участков рек были выполнены в одномерной схематизации на основе 1D-уравнений Сен-Венана, дополненных некоторыми специальными блоками расчета водоподпорных сооружений (плотин), аккумуляции на пойме и т. п. Например, хорошо известна “камерная” модель дельты Меконга, разработанная Ж.А. Кюнжем с соавторами [15], в которой одномерная модель по основным рус-

лам дополнена резервуарами, имитирующими пойму, с учетом водообмена с руслами по формуле водослива с широким порогом. Одним из авторов статьи на основе одномерной модели “RIVER” [23] в 1990-х гг. была разработана модель Верхней Волги от Верхневолжского бейшлота до Ивановской плотины протяженностью >600 км, которая впоследствии была дополнена и самым верхним участком от истока р. Волги (не опубликована). На модели исследовались проблемы обеспечения судоходства, пропуска половодий, а также параметры волны прорыва плотины Вазузского водохранилища. Приблизительно в это же время была разработана модель водохранилища Мерове (500 км) на р. Нил в Судане (не опубликована) с целью прогнозирования времени заиления водохранилища с учетом нестационарных условий эксплуатации.

Известная и регулярно используемая для решения гидрологических и гидравлических задач в Московском регионе – компьютерная модель Москворецкой речной системы от Верхнемоскворецких водохранилищ до устья протяженностью >600 км, разработанная в конце 1990-х – начале 2000-х гг. Модель достаточно подробно описана в монографии [5], частично (для городского бьефа) в [10], построена на основе одномерной схематизации главного русла и основных притоков (уравнения Сен-Венана, программа “RIVER”) с учетом сквозного расчета каскада из восьми водоподпорных плотин, которые моделировались специальным образом для обеспечения заданных перепадов уровней воды. Программа “Река Москва” кроме меженных и паводковых режимов (в том числе для условий гидравлических промывок русла) позволяет рассчитывать перенос загрязнений по русловой сети, а также прогнозировать дефицит притока к Рублевскому водозабору в период ледостава.

Из одномерных моделей на основе уравнений Сен-Венана следует также отметить модель Среднего Амура протяженностью 850 км, разработанную А.С. Калугиным [17] после экстраординарного наводнения 2013 г. Модель, выполненная на основе программы “MIKE 11” Датского гидравлического института, использовалась, в частности, для оценки влияния регулирования действующих и планируемых водохранилищ на гидрологический режим Среднего Амура.

Известна еще гиперпротяженная одномерная модель Среднего и Нижнего Амура, разработанная А.Л. Бубером и М.В. Болговым после наводнения 2013 г. (также на основе программы “MIKE 11”) и верифицированная по результатам прогона трех высоких паводков. В модели учтены все основные значимые по объему стока притоки, включая реки Зею, Бурею, Сунгари, Большая Бира, Уссури, Тунгуску, Гур и Амгунь. К сожалению, модель

описана только в научно-техническом отчете и не опубликована в открытых источниках.

#### *Двумерные (в плане) гидродинамические модели*

В последнее время наметилась тенденция перехода от одномерных моделей к двумерным (в плане) и двумерным многослойным даже для очень протяженных участков рек и речных долин. Промежуточный вариант при переходе от одномерных к двумерным многослойным моделям – оригинальная двухслойная одномерно-двумерная модель, разработанная в самом начале 1990-х гг. [11] и реализованная в программном комплексе “FLOOD” [24]. Она показала высокую эффективность при моделировании паводковых течений на реках с широкими поймами при наличии гидротехнических и дорожных сооружений. Компьютерная модель низовьев р. Волги (рис. 1) протяженностью >500 км построена на основе двухслойной схематизации [5, 11], в которой система русел рек Волги, Ахтубы и основных протоков дельты ниже бровок представлена одномерной моделью, а выше бровок русел вся затопливаемая пойма и дельта описывались в двумерной (плановой) постановке. Модель показала хорошую точность расчетов при различных сбросных расходах Волжской ГЭС и применялась для оценки затопления дельты при разных уровнях Каспийского моря.

Аналогичная двухслойная модель и программа “FLOOD” успешно применялись в 1991–1993 гг. для исследования динамики устьевой части р. Преголи с рук. Дейма и притоком Лава (протяженность 120 км) при сгонно-нагонных явлениях в Калининградском заливе [12].

Двумерные уравнения мелкой воды (Сен-Венана) широко применяются для расчета волн прорыва напорных гидротехнических сооружений. Двумерная компьютерная модель распространения волны прорыва при разрушении плотины на р. Енисей (Красноярское водохранилище и 100 км нижнего бьефа, всего >400 км) [5] разрабатывалась с учетом того, что ширина русла и водохранилища в этом случае сопоставима с шириной затопливаемой поймы, и в то же время детализация параметров волны прорыва на пойменных участках чрезвычайно важна, поскольку позволяет оценить степень возможных разрушений конкретных городских районов (в отличие от одномерной схематизации).

При моделировании волн прорыва необходимо одновременно (совместно) рассчитывать течения в верхнем и нижнем бьефах гидроузлов, что для крупных водохранилищ на равнинных реках приводит к моделям большой протяженности. Так, например, разработанные попарные двумерные модели Рыбинского и Горьковского [32],

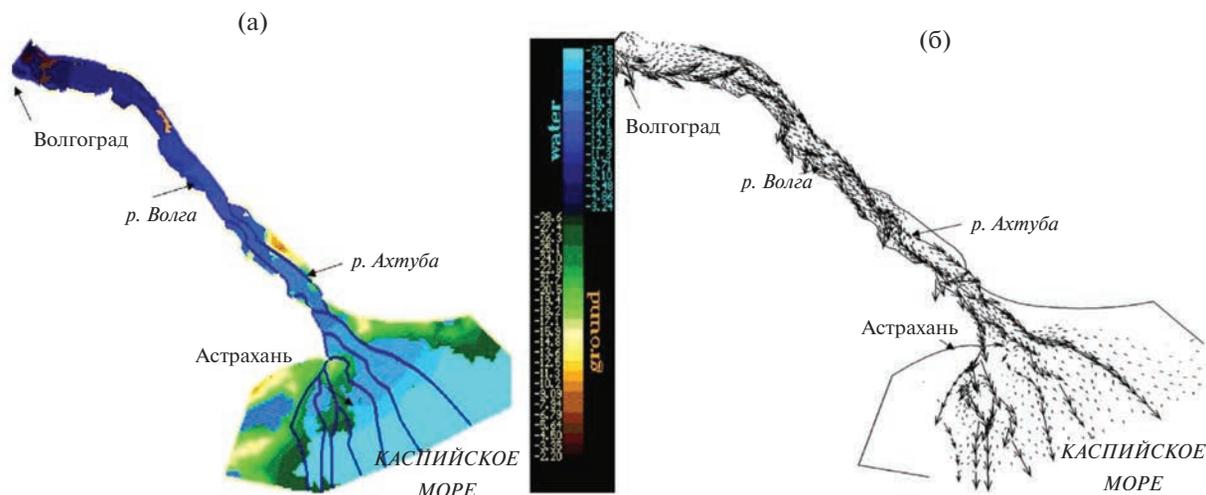


Рис. 1. Отметки водной поверхности р. Волги (а) и векторы скорости течения (б) при расходе  $30000 \text{ м}^3/\text{с}$  и уровне Каспийского моря  $-27.5 \text{ м}$ .

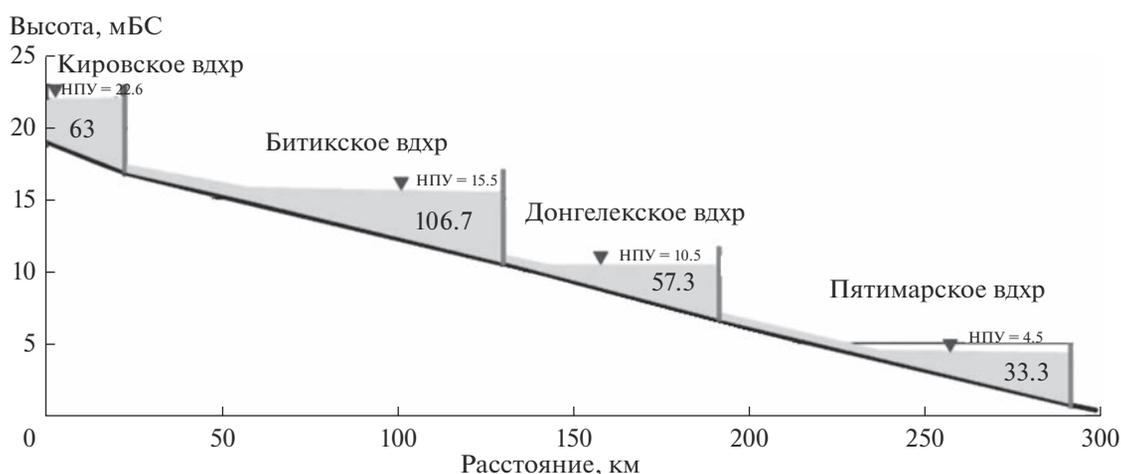


Рис. 2. Продольный профиль каскада водохранилищ Урало-Кушумской оросительно-обводнительной системы (ООС) с указанием объема водохранилищ  $W$ , млн  $\text{м}^3$ .

Камского и Воткинского, Жигулевского и Саратовского [22] водохранилищ имели в длину  $\sim 600$ ,  $700$  и  $700 \text{ км}$  соответственно. Численная двумерная гидродинамическая модель волны прорыва плотины Цимлянского гидроузла на р. Дон имела протяженность  $>500 \text{ км}$ , включая Цимлянское водохранилище и участок Нижнего Дона вплоть до Таганрогского залива. При возможности возникновения каскадной аварии последовательности нескольких гидроузлов даже при их относительно небольших размерах общая длина моделируемой области может составить несколько сотен километров.

Расчет каскадных гидродинамических аварий имеет ряд специфических особенностей. В моно-

графии [5] представлен пример моделирования каскадной аварии для Урало-Кушумской оросительно-обводнительной системы (Республика Казахстан, Западно-Казахстанская область). Урало-Кушумская ООС включает в себя Кушумский канал (рукав р. Урал) и каскад расположенных на нем четырех водохранилищ (Кировское, Битикское, Донгелекское, Пятимарское) с объемом каждого  $>50 \text{ млн м}^3$  (рис. 2). Общая протяженность рассматриваемого участка  $>300 \text{ км}$ .

Для определения зон возможного риска был проведен расчет волн прорыва и зон затопления при разрушении напорного фронта каждого из водохранилищ системы с учетом каскадной аварии, так как разрушение расположенного выше

по течению гидроузла может привести к прорыву нижележащего. Расчеты проводились по программе “БОР” [25] методом численного моделирования на основе двумерных уравнений Сен-Венана. Аналогичные расчеты протяженных участков волн прорыва были выполнены для каскада Кемских ГЭС (3 гидроузла, 130 км) и для Канала им. Москвы от Ивановского водохранилища через водохранилища водораздельного бьефа до р. Москвы (7 гидроузлов, 6 водохранилищ).

Иногда модели протяженных участков рек и водохранилищ приходится разрабатывать по весьма экзотическим причинам. Например, двумерная модель Богучанского водохранилища на р. Ангаре длиной 400 км понадобилась для оценки степени сохранения объектов культурного (исторического) наследия на участках, подверженных затоплению при наполнении водохранилища (материалы не опубликованы).

Как отмечено выше, большой интерес в последнее время вызывает моделирование динамических процессов на устьевых участках рек и в приливных дельтах. Еще более 15 лет назад авторами статьи была разработана двумерная (в плане течения) численная гидродинамическая модель Невы от истока до устья с учетом основных рукавов дельты [9], на которой в числе прочего были получены данные для обеспечения работы судоводительских тренажеров по проводке судов под Петербургскими мостами. Большие усилия были вложены в разработку 2D-модели дельты и нижнего течения р. Северная Двина протяженностью ~150 км [16, 29], на которой достаточно хорошо воспроизводится динамическое взаимодействие приливных и стоковых течений с распределением расходов по рукавам дельты. Сейчас интенсивно разрабатывается модель устья р. Печоры со сложной системой рукавов и реверсивными течениями [1]. Несколько лет назад была разработана высокоточная двумерная модель Нижнего Дона от Кочетовского гидроузла до Таганрогского залива Азовского моря протяженностью 180 км [6, 33], на которой в том числе рассчитывались и сгонно-нагонные явления в низовьях Дона. Достаточно полный обзор работ по математическому моделированию дельт и устьевых участков рек приведен в [2].

Пожалуй, наиболее сложный класс численных моделей представляют протяженные модели с деформируемым (размываемым) дном. Для них требуется гораздо более мелкая сетка, чем для чисто гидродинамических моделей, более детальные промеры дна, данные по составу грунтов, а также очень трудоемкие и продолжительные (до нескольких недель) расчеты в нестационарных режимах. В качестве примера такой работы можно указать участок р. Лены в районе г. Якутска, который уже десятки лет моделируется в раз-

ных вариантах на участке протяженностью до 220 км от Табагинского мыса до Песчаной горы [36]. Повышенную сложность в сравнении с обычными гидродинамическими моделями представляют также расчеты заторных явлений. Одна из таких моделей разработана для участка р. Лены у г. Ленска протяженностью 155 км в катастрофическое заторное наводнение 2001 г., когда затопило полностью г. Ленск, несмотря на защитные дамбы [13].

Наконец, последняя (пока немногочисленная) группа работ посвящена моделированию гиперпротяженных участков великих рек, таких как Амур [18, 34, 37], Амазонка [28], Янцзы [38] и др. Сюда же можно отнести и р. Волгу, если собрать воедино отдельные участки, упомянутые выше, и дополнить их недостающими, модели которых тоже разработаны (Углицкого и Чебоксарского [8] водохранилищ). Тогда общая протяженность компьютерной модели р. Волги, разработанной авторами статьи, составит > 3 тыс. км, включая 9 гидроузлов.

## СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОДНОМЕРНЫХ И ДВУМЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ

При исследовании протяженных и гиперпротяженных участков рек в зависимости от целей, требуемой точности и имеющихся ресурсов могут применяться как одномерные, так и двумерные (в плане) гидродинамические модели, а также двухслойные, многослойные и модели в диффузионном приближении. Их подробный сравнительный анализ может быть проведен на основе имеющегося большого фактического материала, но это тема отдельной (и, может быть, даже не одной) статьи. Ограничимся здесь лишь некоторыми замечаниями.

В ряде случаев полные двумерные уравнения мелкой воды подвергаются упрощению для более эффективного их использования при численном моделировании практических задач. Один из путей – снижение размерности системы уравнений за счет пространственного осреднения на большем линейном масштабе. Тогда приходим к системе одномерных уравнений Сен-Венана, осредненных не только по глубине русла, но и по его ширине (нуль-мерные модели с осреднением по длине русла в данной работе не рассматриваются). Другой вариант – пренебрежение инерционными слагаемыми в уравнениях мелкой воды. Тогда получаются так называемые уравнения диффузионной волны, которые описывают достаточно широкий класс природных течений со свободной поверхностью. Они допускают учет аккумуляции расхода при изменении уровня воды и описывают явление подпора [5].

Таким образом, принципиальное различие между одномерными и двумерными моделями — масштаб осреднения. Если для 2D-моделей это характерная глубина потока, то для 1D-моделей это ширина русла или даже ширина долины (при моделировании затопления поймы), поэтому масштабы могут отличаться в сотни и тысячи раз. Соответственно, будет отличаться и степень детализации объекта. Например, для р. Амур в среднем течении одномерная модель из [17] имеет расстояние между поперечниками порядка 20 км, а представленная ниже в статье двумерная модель Амура дискретизирована на сетке с длиной стороны ячейки от 100 до 500 м, т. е. разница в детализации — 50–100 раз. На расстоянии в 20 км можно “потерять” такие крупные города, как Благовещенск или Хабаровск. Если же на участках их расположения сгущать поперечники, то неясно, какие параметры модели задавать на частях этих поперечников, которые проходят по затопляемой части городской территории. Напротив, в двумерной модели в таких случаях можно учесть каждое здание, сооружение и дороги на пойме [5, 32].

Поскольку при одномерной схематизации на каждом поперечнике принимается постоянная вдоль него отметка водной поверхности, то исключаются сильно криволинейные и расположенные под углом к потоку поперечники. Это затрудняет адаптацию одномерной модели к мостам, дорожным и защитным сооружениям на пойме, а особенно — к системе разветвленных и меандрирующих русел. В последнем случае возможно пересечение поперечников, приходится строить сложную русловую сеть с локальными поперечниками. Поскольку в процессе затопления поймы направление течения может сильно меняться, это вносит дополнительные погрешности в расчеты.

В одномерных моделях затруднительно априори выделить транзитные и аккумулятивные зоны на пойме, учесть разные коэффициенты шероховатости в русле и на пойме. Очень сложно учесть ледовые заторы, поскольку они расположены в основном в русловой части. Наконец, в одномерной схематизации невозможно адекватно моделировать русловые деформации, поскольку в этом случае модель становится незамкнутой и нельзя однозначно определить форму получающихся в результате размывов–намывов новых поперечников.

Безусловно, разработка двумерных моделей требует существенно больше усилий на подготовку топографических данных и построение расчетных сеток. Неоспоримое преимущество одномерных моделей — большая скорость счета, но и у двумерных моделей скорость счета достаточна, чтобы, например, совместно с гидрологической

моделью стока давать прогноз на одни сутки или несколько суток.

## АЛГОРИТМ И ПРОГРАММА ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Остановимся на анализе требований к двумерным (в плане) численным моделям, выполнение которых необходимо для успешного решения рассматриваемого класса задач.

1. Модели должны быть основаны на численном решении двумерных уравнений мелкой воды (Сен-Венана) в различных модификациях (с учетом плановой турбулентной вязкости, силы Кориолиса, ветровых и ледовых воздействий и пр.). Возможно применение многослойных уравнений мелкой воды.

2. Необходимо (или очень желательно) применение численных алгоритмов, реализованных на гибридных треугольно-четырёхугольных сетках нерегулярной структуры, адаптированных под особенности рельефа и искусственные сооружения. Практика численного моделирования показывает, что использование квадратных (прямоугольных) сеток неэффективно при разработке моделей протяженных участков рек со сложной пространственной геометрией.

3. Для решения реальных задач гидравлики и гидрологии, особенно для протяженных речных объектов, необходимо, чтобы численный алгоритм позволял эффективно и без потери массы и импульса рассчитывать выход воды на пойму в нестационарном режиме и движение воды по пойме (по сухому дну), приводящее к затоплению поймы и аккумуляции водных масс.

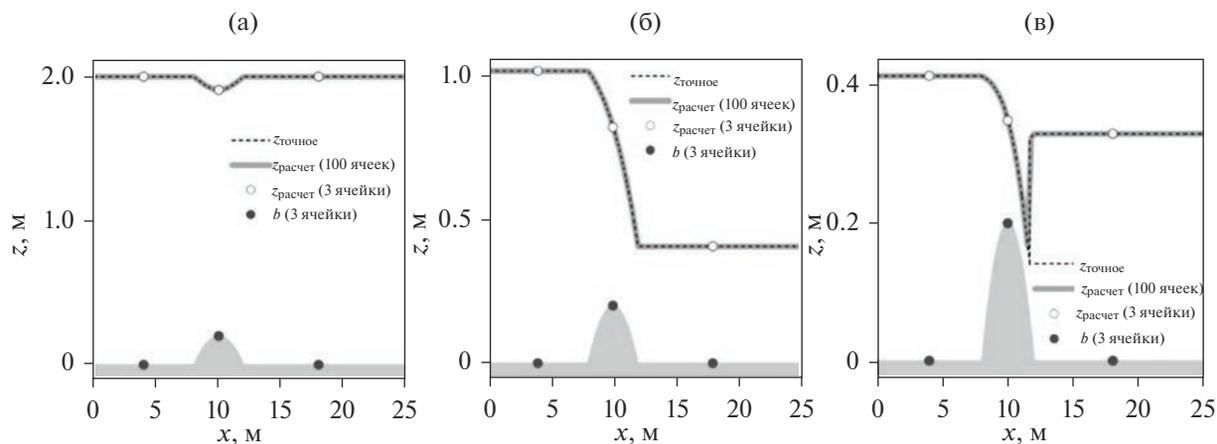
4. Желательно, чтобы численный алгоритм позволял рассчитывать стекание с крутых склонов и откосов с углом наклона до десятков градусов.

5. Желательно в алгоритме предусмотреть возможность расчета сквозного протекания через гидротехнические сооружения (плотины, водосбросы, шлюзы).

6. Желательно в программе использовать метод распараллеливания расчетов на графической карте, что более чем на порядок ускоряет расчеты.

7. Необходимо, чтобы алгоритм обеспечивал точное решение уравнений гидродинамики при резких перепадах отметок дна (на границе русла и поймы, на дорожной насыпи, расположенной на пойме, на водосбросе плотины и др.) на максимально разреженной (грубой) сетке, что позволит создавать эффективные гиперпротяженные модели речных систем.

Такой метод численного решения уравнений мелкой воды разработан авторами настоящей статьи. Уникальность подхода состоит в том, что он основан на впервые построенном алгоритме точного и единственного решения задачи Римана



**Рис. 3.** Три случая стационарного течения над бугром: а – докритический режим; б – транскритический режим без скачка; в – транскритический режим со скачком. Сравнение расчетов на 3 и 100 вычислительных ячейках с точным решением.

о распаде произвольного разрыва для уравнений мелкой воды с резким перепадом отметки дна [5, 30, 31]. Решение задачи Римана – ключевой элемент алгоритмов расчета течений на основе широко распространенного метода Годунова. Зарегистрирован в Роспатенте отдельный модуль – решатель задачи Римана [27], который может быть интегрирован в различные программные комплексы.

Преимущество нового алгоритма состоит в значительном повышении точности расчетов течений над сложным рельефом дна. Наглядно это продемонстрировано в статье [31] и монографии [5], в частности – на примере расчета течения жидкости над бугром на дне с формированием гидравлического прыжка. Новый алгоритм воспроизводит точное решение задачи с минимальным разрешением препятствия в одну расчетную ячейку. Для достижения приемлемой точности стандартными численными методами эту задачу решают с разрешением рельефа более 10 ячеек (рис. 3).

Разработка внедрена в отечественный пакет программ Stream 2D CUDA [26], который удовлетворяет всем перечисленным выше требованиям и успешно применялся в расчетах многих упомянутых выше двумерных моделей, разработанных авторами настоящей статьи, в том числе модели р. Амур.

### ОСОБЕННОСТИ ПОСТРОЕНИЯ ЧИСЛЕННОЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ р. АМУР

Амур – одна из крупнейших трансграничных рек мира, имеет десятый по размеру речной бассейн площадью 1.85 млн км<sup>2</sup>, длина Амура от слияния рек Шилки и Аргуни составляет 2.8 тыс. км.

Традиционно Амур разделяют на три основных участка: верхний – от слияния Шилки и Аргуни до устья р. Зеи (выше г. Благовещенска); средний – от устья р. Зеи до г. Хабаровска; нижний – от г. Хабаровска до впадения реки в Амурский лиман.

Численная модель бассейна р. Амур строилась от с. Покровка до г. Комсомольск-на-Амуре, т. е. включила в себя участки – верхний, средний и нижний Амур. Также в модель вошли устьевые участки крупных притоков: р. Зея от створа Зейской ГЭС (640 км), включая участки рек – Селемджи протяженностью 60 км, Буреи – 32 км, Сунгари – 42 км, Усури – 85 км. Таким образом, общая протяженность модели по руслу р. Амур составила ~ 2.2 тыс. км, по притокам суммарно – 859 км.

Следует отметить, что расчетная сетка построена и на участок от Комсомольска-на-Амуре до Николаевска (но там пока нет оцифрованного русла), а на мелководный Амурский лиман разработана и откалибрована двумерная гидродинамическая модель [7] с учетом приливных течений. При подключении этих участков протяженность модели по основному руслу р. Амур и лиману достигнет 3000 км. Кроме того, предполагается подключить к модели участок нижнего и среднего течения р. Усури протяженностью ~ 500 км. Тем самым будет реализован один из основных принципов, к которому стремились разработчики модели: обеспечить максимально возможную удаленность основных границ модели от среднего участка р. Амур, которая представляет наибольший интерес для исследований и прогнозов в силу его наибольшей освоенности. Это позволит прогнозировать гидрологическую ситуацию на среднем Амуре с большой заблаговременностью, учитывая, что время добегания расходов от границ модели составит неделю и более.

### *Построение расчетной сетки модели*

Построение расчетной сетки выполнялось по специально разработанной двухшаговой методике. На первом шаге расчетная область разбивается на несколько подобластей полигонами с переменным шагом вершин по граням, при этом полигоны построены таким образом, чтобы поддержать структурные (рельефообразующие) линии и обеспечить по возможности равномерное распределение ячеек.

По руслам Амура и притоков строилась преимущественно четырехугольная криволинейная сетка, ячейки имеют вытянутую вдоль русла форму и максимально адаптированы по направлению течения, на геометрически сложных участках русла строилась треугольная сетка. Количество ячеек поперек русла Амура составило от 4 до 31 с длинами сторон от 50 до 190 м. На притоках количество ячеек поперек русла – от 3 до 10 с длинами сторон 100–250 м. Протоки шириной >150 м выделялись отдельными полигонами, сетка строилась преимущественно четырехугольная, 1–2–3 ячейки поперек протоки, длина ячейки от 100 до 250 м; на некоторых протоках строилась треугольная сетка. Длина сторон ячеек вдоль основного русла, притоков и проток составляла от 100 до 650 м, а местами до 850 м. Острова, заросшие лесом, выделялись отдельными полигонами и покрывались треугольной сеткой, малые острова включались в русловые полигоны.

Пойма р. Амур на верхнем участке достаточно узкая, обрывистая, заросшая лесом, а в среднем и нижнем течении, наоборот, преобладают участки с широкой низкой поймой как со стороны РФ, так и со стороны КНР, здесь расположены крупные города и множество населенных пунктов с развитой инфраструктурой, имеется большое количество защитных противопаводковых дамб (со стороны Китая более 30), насыпей железных и автомобильных дорог, идущих вдоль и поперек поймы. В связи с недостаточностью информации по отметкам гребней противопаводковых дамб было решено исключить некоторые из них из расчетной сетки, т. е. в месте их расположения фактически принята не переливаемая граница. При этом на участках поймы в месте расположения дамб сетка строилась таким образом, чтобы в дальнейшем можно было построить четырехугольную сетку по дамбам и включить их в численную модель (при условии, что по ним будут известны отметки).

По дорогам строилась четырехугольная сетка в одну 100-метровую ячейку поперек, вдоль дамб длина ячейки менялась от 170 до 550 м. Некоторые железные дороги, имеющие высокие отметки рельефа, предполагались не переливаемыми и не включались в расчетную сетку, здесь был применен принцип построения сетки аналогично про-

тивопаводковым дамбам. Мосты через реки Амур и Зею выделялись отдельным полигоном с четырехугольной сеткой в одну ячейку шириной 100 м поперек моста, а вдоль моста размер ячеек соответствовал размеру ячеек русла.

На пойме строилась треугольная сетка нерегулярной структуры. На территории РФ длина сторон ячеек составила от 100 м в местах примыкания дамб и автомобильных дорог до 900 м на удаленных от русел рек участках поймы, но в средней части пойм в основном длина стороны ячейки составила 500 м. На территории КНР вблизи русел, дамб и дорог длина ячейки была выдержана в пределах 500 м, на участках за дамбами строилась более грубая сетка с длинами сторон до 700–1000 м.

В итоге на расчетной области было построено 1965 полигонов, в каждом из которых при помощи модифицированной версии программы “TRI-ANA” [4] строилась базовая сетка нулевого приближения, максимально адаптированная к контуру соответствующей области. На втором шаге все зоны объединялись и проводилось сглаживание сетки по специальному алгоритму минимизации гармонического функционала. Общее число ячеек расчетной сетки составило 402048 (до Комсомольска-на-Амуре, ниже – еще ~200 тыс. ячеек). Общая расчетная сетка и ее фрагменты представлены на рис. 4.

### *Подготовка рельефа модели*

Основные информационные компоненты для построения цифровой модели рельефа русла-поймы следующие [18]:

- пространственная конфигурация русла реки;
- батиметрические характеристики водотока;
- рельеф поймы и прилегающих к ней участков суши.

В качестве основного источника информации о батиметрии русел рек использовали лоцманские карты. На участках, где с момента издания лоцманских карт произошли существенные изменения в конфигурации русла и отсутствуют современные данные гидрографической съемки, для формирования актуальной конфигурации русел были использованы материалы космической съемки отечественными космическими аппаратами “Ресурс-П” [20] и “Канопус-В” [19]. Для обеспечения гидрологической корректности цифровой модели рельефа с помощью экстраполяции данных на основе морфометрического анализа, а также определения структуры поля скоростей потоков по спутниковым фотографиям (во время прохождения крупных паводков) генерировалась система структурных линий. В качестве основного источника информации о рельефе поймы и прилегающих к ней участков использована цифровая модель рельефа World-

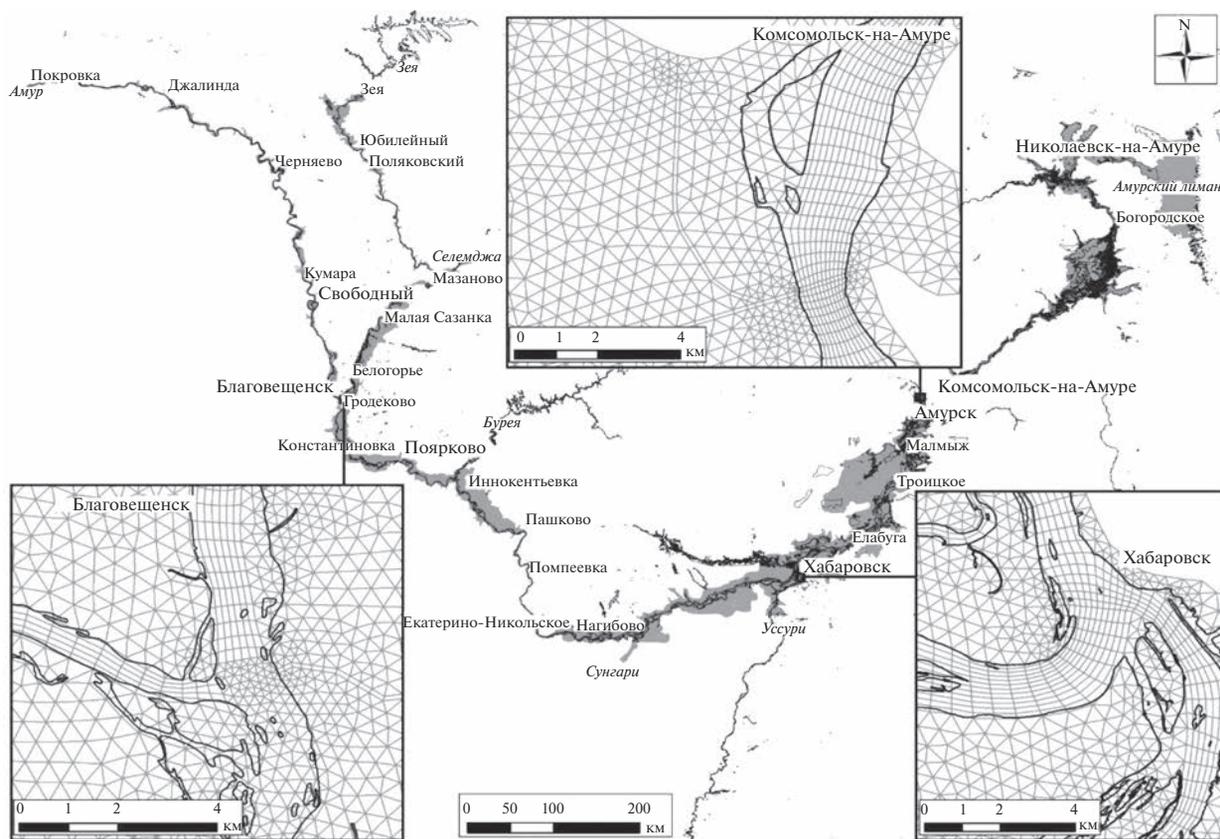


Рис. 4. Расчетная треугольно-четыреугольная неструктурированная сетка модели.

DEM™ (Airbus Defence and Space, Intelligence) [21] с разрешением 24 м. Цифровая модель рельефа бассейна р. Амур разработана специалистами Тихоокеанского института географии ДВО РАН (г. Владивосток), технология подробно изложена в [18].

Итоговая информация по рельефу представлена в виде растра с размером ячейки 10 м. Для ее применения в модели STREAM 2D CUDA требовалось преобразовать ее в триангуляционную поверхность с возможностью последующего редактирования (при необходимости), что было возможно только с закруглением поверхности. Поэтому было решено не проводить такое преобразование. В настоящее время рассматривается методика преобразования поверхности в точки с фильтрацией по топографическому признаку и последующим созданием триангуляционной модели. На данном этапе исследований данные о рельефе были перенесены в центры ячеек расчетной сетки методом проецирования с растровой поверхности.

#### Стыковка моделей ECOMAG и STREAM 2D

В последней версии STREAM 2D CUDA реализован новый программный блок, позволяю-

щий моделировать источники и стоки жидкости в расчетной области и обеспечить передачу данных от программно-моделирующего комплекса ECOMAG [14] к STREAM 2D CUDA. Стыковка моделей происходит через так называемые “точки интеграции” в которых осуществляется передача данных по расходам бокового притока из ECOMAG в STREAM 2D.

#### Задание граничных условий модели

На модельной сетке были выделены шесть входных границ по руслам р. Амур и притоков — рек Зеи, Буреи, Сунгари, Уссури и Селемджи, на которых задаются гидрографы расхода воды. На выходной границе у г. Комсомольск-на-Амуре задавалась кривая связи расходов и уровней воды  $Z(Q)$ . Точнее, использовались две кривые: построенная по 2013 г. и построенная по другим годам меньшей водности.

В створах гидропостов устанавливались контрольные точки и створы (внутренние границы модели), где в процессе расчета с заданным шагом времени сохраняются результаты (расходы, уровни воды, модули скорости течения). Это поз-

**Таблица 1.** Задаваемые на входных границах модели максимальные расходы воды для стационарных калибровочных расчетов

Входные границы	Максимальный расход, м <sup>3</sup> /с		
	р. Амур	4845	9700
р. Зея	1740	1200	12900
р. Бурея	900	850	2150
р. Сунгари	1740	7500	12900
р. Уссури	1435	3750	3440
р. Селемджа	670	2000	0
Сумма	11 330	25 000	43 000

воляет сопоставлять результаты расчетов с фактическими данными измерений на водопостах.

## СПЕЦИФИКА КАЛИБРОВКИ И ВЕРИФИКАЦИИ МОДЕЛИ

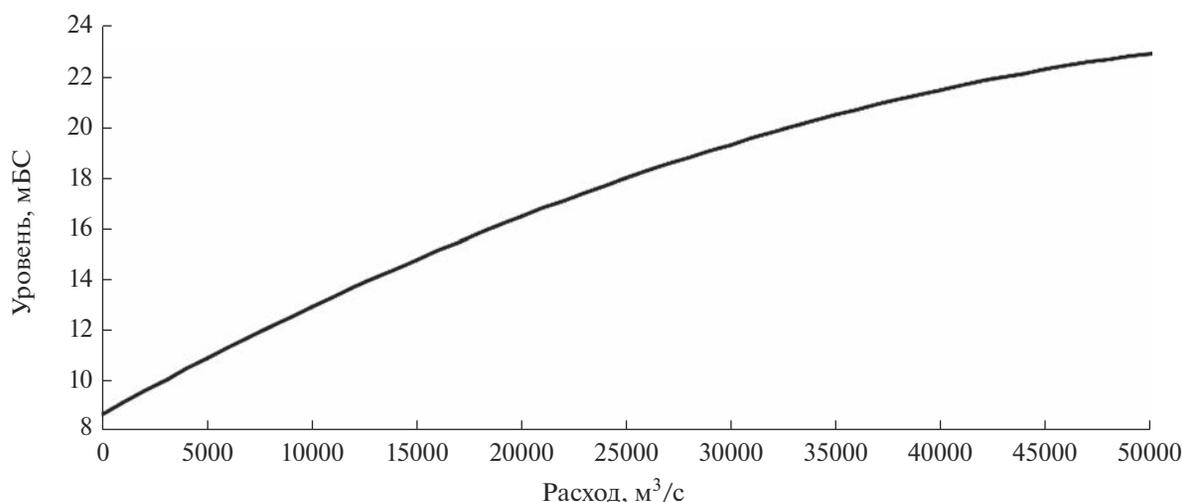
### *Калибровка модели*

Далее (в связи с упомянутым ранее отсутствием на настоящий момент информации о рельефе дна русла от Комсомольска-на-Амуре до Николаевска) рассматривается укороченная модель до Комсомольска-на-Амуре. На первом этапе для расчетов принималась следующая схема задания коэффициентов шероховатости подстилающей поверхности: в границах меженного уреза русла коэффициент шероховатости назначался 0.025, на автомобильных и железных дорогах, включенных в сетку, – 0.02, на пойме – 0.05. В качестве калибровочных расчетов рассматривались три расчета на постоянные расходы с максимальными суммарными величинами расхода воды в выходном створе модели – 11 300, 25 000, 43 000 м<sup>3</sup>/с

(табл. 1), которые соответствуют трем разным сценариям соответственно: течение при относительно малом расходе ниже бровок русла, течение при среднем (руслоформирующем) расходе близко к бровкам и при небольшом выходе воды на пойму, течение при высоком расходе с большим затоплением поймы. На выходной границе модели (на в.п. Комсомольск-на-Амуре) задавалась  $Z(Q)$ , построенная по данным наблюдениям с 2002 по 2014 г. (рис. 5). Расчет проводился до тех пор, пока в выходном створе не устанавливался постоянный расход, равный сумме всех максимальных расходов на входных границах.

По первым двум сценариям корректировались в основном коэффициенты шероховатости русел, а по третьему сценарию – коэффициенты шероховатости поймы. Критерием подбора были кривые  $Z(Q)$  на гидропостах, где они были известны или построены в процессе работы на основе фактических данных. Удалось найти данные наблюдений и построить кривые  $Z(Q)$  на водпостах на р. Амур: Покровка (код поста 06001), Кумара (06016), Гродеково (06023), Помпеевка (06032), Хабаровск (05012), Хабаровск гидроствор (05013) и на р. Зее на водпосту Белогорье (06295).

Именно по этим постам шло сравнение результатов расчетов с данными наблюдений. По результатам калибровочных расчетов сравнивались полученные отметки установившегося уровня воды на водпостах с соответствующими отметками уровней воды с кривой  $Z(Q)$ , полученной по данным наблюдений. В зависимости от того, выше или ниже кривой  $Z(Q)$  ложились на графике полученные расчетные отметки уровня воды, приходилось понижать или повышать значения коэффициента шероховатости на данном участке. На рис. 6 изображены примеры кривых  $Z(Q)$  на двух водпостах с наложенными на них



**Рис. 5.** Зависимость  $Z(Q)$  на выходной границе модели у г. Комсомольск-на-Амуре.

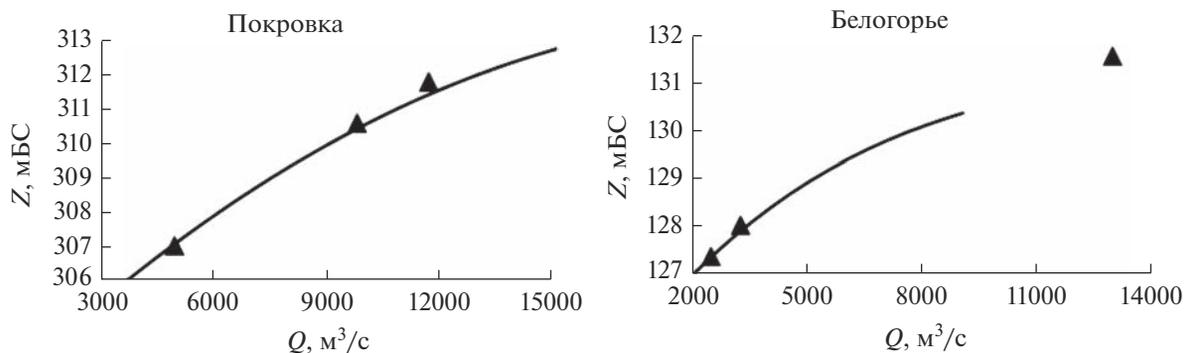


Рис. 6. Кривые  $Z(Q)$  и полученные в результате стационарных расчетов уровни воды  $Z$  (треугольники) на водопостах Покровка и Белогорье.

результатами калибровочных расчетов. В результате сценарных расчетов были подобраны следующие коэффициенты шероховатости: по руслу рек и притоков – от 0.017 до 0.03, по пойме – от 0.04 до 0.06, по автомобильным и железным дорогам – 0.02.

Более точная калибровка оказывается невозможной, поскольку рельеф подстилающей поверхности в рассматриваемой модели не очень точен (русла сняты с лоцманских карт, вертикальная привязка рельефа порой затруднена и не точна). В связи с этим в расчетах были приняты условные нули некоторых постов (например, Кумара, Суражевка, Хабаровск–гидроствор). Это позволяет, несмотря на погрешности рельефа, давать достаточно точные прогнозные уровни на водопостах.

#### Верификация модели

В верификационных расчетах рассматривались паводки 2013 и 2020 гг. На эти временные периоды имеется достаточно данных наблюдений за изменением уровня воды на водопостах.

Моделирование паводка 2013 г. выполнялось в течение 121 сут с 01.06.2013 по 30.09.2013. На входной границе Верхнего Амура задавался расход, пересчитанный от наблюдаемого уровня воды на Покровке по кривой  $Z(Q)$  1958 г. Сдвинуты гидрографы на 3 сут вперед по притоку Сунгари и на 2 сут вперед по Усури (с учетом времени добегаания от постов на этих реках до входных границ модели) (рис. 7). На выходной границе модели (на в.п. Комсомольск-на-Амуре) задавалась  $Z(Q)$ , построенная по данным наблюдениям с 2002 по 2014 г. (рис. 5).

Ежесуточные рассчитанные уровни воды сопоставлялись с наблюдаемыми на 24 постах (примеры на рис. 8).

Аналогичным образом моделировался паводок 2020 г., расчет выполнялся в течение 183 сут с 01.05.2020 по 30.10.2020. Задаваемые на входных

границах гидрографы изображены на рис. 9. На выходной границе модели (на в.п. Комсомольск-на-Амуре) задавалась  $Z(Q)$ , построенная по данным наблюдениям с 2002 по 2014 г. (рис. 5).

Ежесуточные рассчитанные уровни воды сопоставлялись с наблюдаемыми на 24 постах (примеры на рис. 10).

В целом, сходимость расчетов достаточно хорошая. Проведем расчетные оценки точности расчета уровней по постам. Обозначим:  $Z_i$  – наблюдаемые уровни воды на водопосту,  $R_i$  – уровни воды, полученные в результате расчета на те же моменты времени,

$$\bar{Z} = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n Z_i} - \text{среднее арифметическое значений } n \text{ наблюдений,}$$

$$\text{тогда } S/\sigma = \sqrt{\frac{\sum (Z_i - R_i)^2}{\sum (Z_i - \bar{Z})^2}} - \text{представлено в табл. 2.}$$

Можно обратить внимание на то, что по 2020 г. большой вклад в погрешность дают посты на Зее (последние 5 постов в табл. 2). Видимо, наряду с прочими причинами это вызвано неточным заданием гидрографа притока на участке ниже Зейского гидроузла. Если исключить эти посты, то по Амуру получится по 2020 г. средняя погрешность по всем постам 0.41.

Важно отметить, что разработанная двумерная гидродинамическая модель позволяет получить в любом речном створе (в том числе на водопостах, но не обязательно) не только расходы, но и уровни воды без пересчета по кривым связи расходов и уровней (которые не для всех постов существуют). В этом состоит одно из существенных преимуществ разработанной модели перед гидрологическими, которые позволяют оценивать только расходы (хотя на постах измеряются в основном уровни воды, и с практической точки зрения прогноз уровней затопления гораздо важнее).

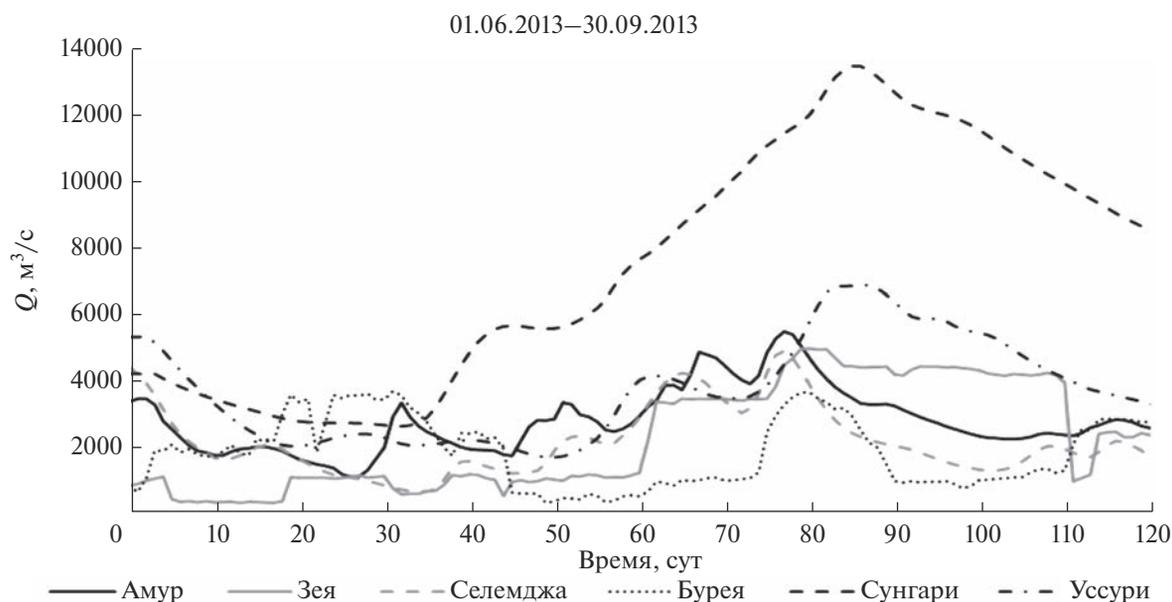


Рис. 7. Гидрографы воды на входных границах модели при моделировании паводка 2013 г.

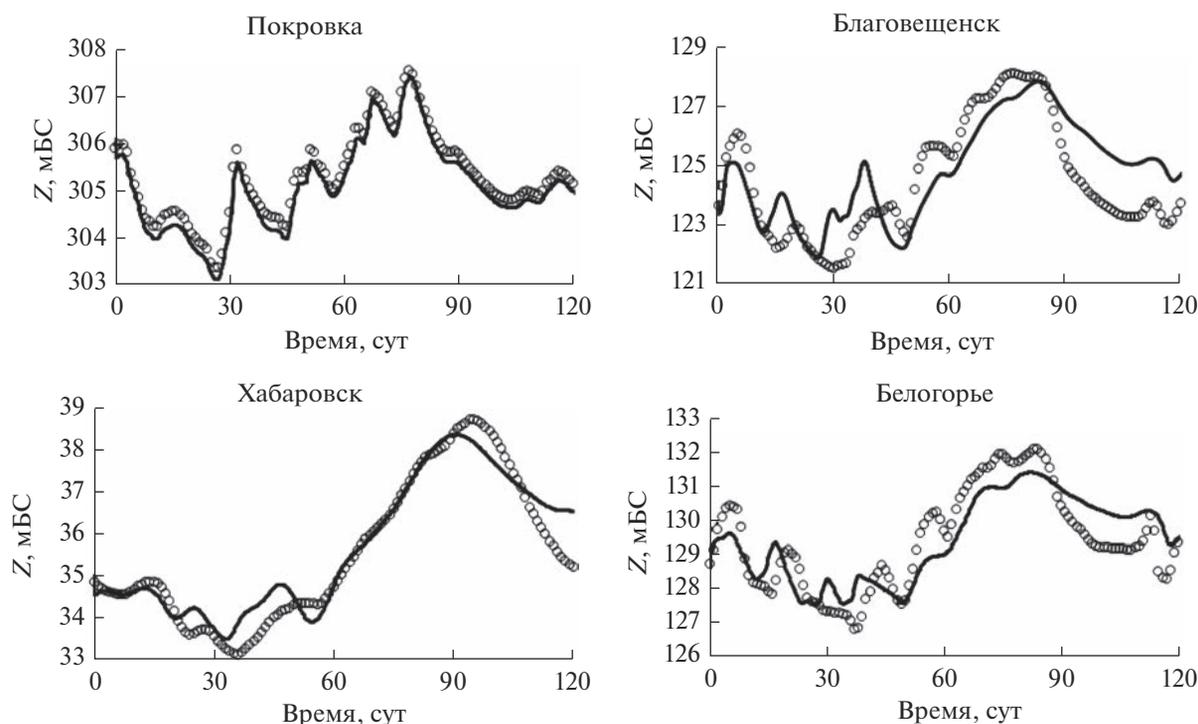


Рис. 8. Сопоставление полученных в результате моделирования паводка 2013 г. уровней воды  $Z$  на водопостах (линия) и наблюдаемых уровней воды в 2013 г. (кружки).

### СПЕЦИФИКА ОТРИСОВКИ И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТОВ

Сложность отрисовки и представления результатов расчетов в виде плановых карт затоплений, полей глубин и скоростей течения связана, глав-

ным образом, с достаточно большой площадью модели, а следовательно, и большим объемом данных, требующих значительных компьютерных ресурсов (мощностей).

В данном исследовании предприняты различные способы представления результатов.



**Таблица 2.** Оценка погрешности расчетов уровней воды на водопостах

Водопост	S/s	
	2013 г.	2020 г.
Покровка	0.25	0.23
Джалинда	0.28	0.41
Черняево	0.45	0.41
Кумара	0.63	0.27
Благовещенск	0.62	0.36
Гродеково	0.69	0.42
Константиновка	0.68	0.59
Поярково	0.63	0.44
Иннокентьевка	0.60	0.81
Пашково	0.57	0.37
Екатерино-Никольское	0.70	0.51
Нагибово	0.77	0.61
Ленинское	0.40	0.25
Хабаровск	0.28	0.32
Хабаровский мост	0.28	0.23
Елабуга	0.30	0.30
Троицкое	0.51	0.65
Малмыж	0.29	–
Комсомольск	0.43	0.23
Малая Сазанка	0.55	0.84
Суражевка	0.63	1.29
Мазаново	0.58	0.95
Поляковский	0.47	0.80
Белогорье	0.53	0.73
Среднее значение	0.50	0.52

продуктов позволяет в полуавтоматическом режиме откорректировать ошибку “седловой точки”. При использовании этого способа визуализируемая картина результатов расчетов получает наиболее достоверный и корректный вид. Однако этот метод имеет ограничения по количеству узловых точек триангуляционной сетки и целиком для модели р. Амур не подошел. Целесообразно использовать его на локальных участках (например, в районе населенных пунктов), где требуется детализация результатов расчета относительно инфраструктуры городского и сельского хозяйства.

Третий способ применим для построения глубин воды, вне зависимости от размеров ячеек численной модели. Суть его заключается в том, что детальность отображения глубины определяется детальностью и корректностью исходной ЦМР (в исследуемом случае GRID-модель с шагом 10 и 20 м). В ее границах и разрешении создается GRID-модель расчетных уровней воды. Затем проводится операция вычитания поверхностей, по результатам которой получается цифровая модель глубин с детальностью исходного рельефа.

В первых двух вариантах отрисовка происходит по всем ячейкам модельной сетки и возникает необходимость отсечения не затопленных в данный временной интервал ячеек на расчетной области. При первом способе отсечение нулевых глубин и скоростей возможно через интервалы на цветовой шкале. При втором способе применялась технология сопряжения поверхностей уровней воды и рельефа, на выходе получены полигоны с границами зон затопления. На следующем этапе полигонами зон затопления “обрезаются” поверхности с глубинами и скоростями течения воды. Пример отрисовки скоростей течения и глубин по данному способу приведен на рис. 11, 12.

При третьем способе суша отсекалась от воды в цифровой модели глубин путем присвоения признака “нет данных” тем ячейкам, где были получены нулевые или отрицательные значения после операции вычитания.

#### РАСЧЕТЫ ЗОН ЗАТОПЛЕНИЯ В НАВОДНЕНИЯ 2013, 2020 гг.

В разделе “Верификация модели” описаны граничные условия для моделирования наводнений этих лет.

#### *Моделирование наводнения 2013 г.*

Зоны затопления строились по фрагментам, на область которых удалось скачать снимки Landsat 8 [3], а также из имеющегося архива использованы снимки КАНОПУС на фрагменты у городов Хабаровска и Комсомольск-на-Амуре. Из расчетов выбраны моменты времени, близкие к моментам максимальных уровней воды.

Зоны затопления по расчетам на STREAM 2D в целом близки к фактическим с космических снимков и в большинстве случаев перекрывают их (рис. 13).

#### *Моделирование наводнения 2020 г.*

Моделирование выполнялось в течение 183 сут с 01.05.2020 по 30.10.2020. Ежесуточные рассчитанные уровни воды сопоставлялись с наблюдаемыми на 24 постах. В целом сходимость расчетов достаточно хорошая.

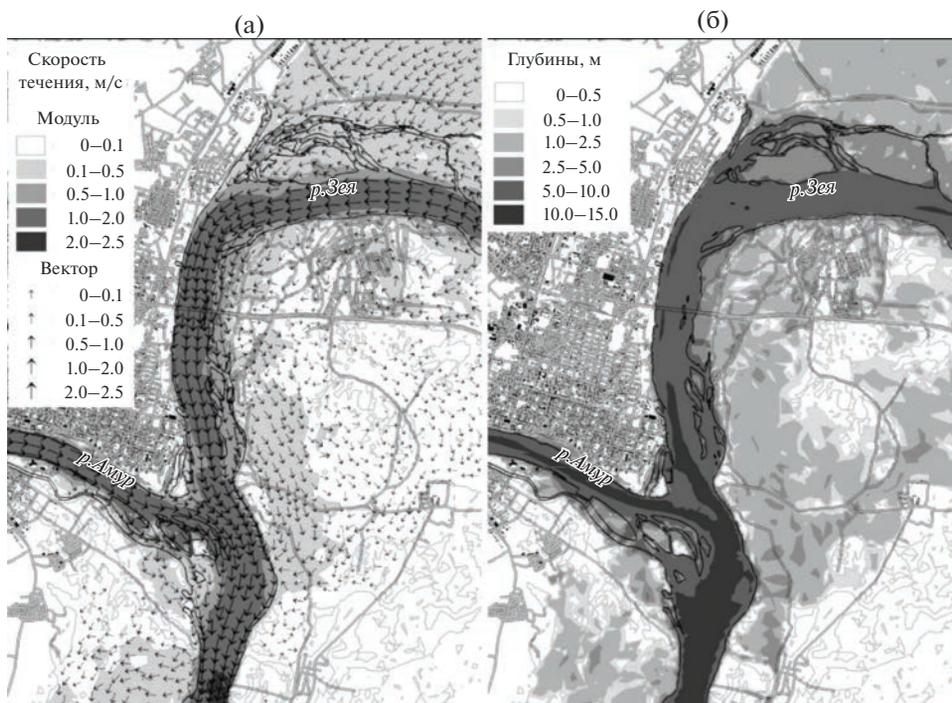


Рис. 11. Фрагмент полей скоростей течения (а) и глубин воды (б) в районе г. Благовещенска при наводнении в 2013 г.

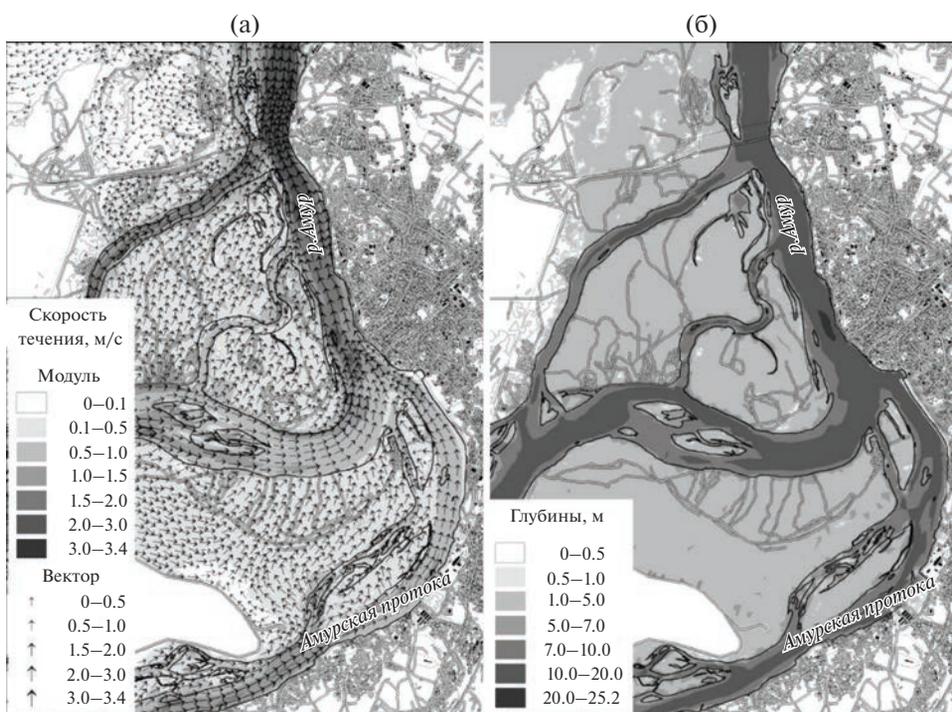


Рис. 12. Фрагмент полей скоростей течения (а) и глубин воды (б) в районе г. Хабаровска при наводнении 2013 г.

Затопления в 2020 г. в г. Благовещенске были значительно меньше, чем в паводок 2013 г. Расчет и факт показывают достаточно хорошее совпадение. Например, разница между затоплением (по

расчету) при максимальном уровне в Благовещенске и моментом времени 114 сут (когда расчетные уровни воды близки к фактическим) незначительная.

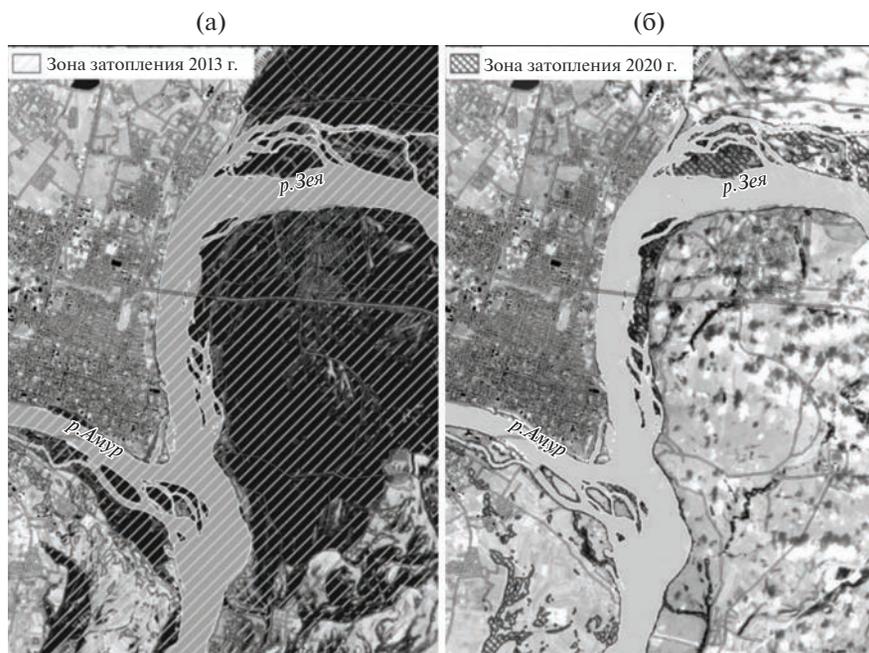


Рис. 13. Фрагменты зоны затопления в районе г. Благовещенска при наводнении в 2013 г. (а) и 2020 г. (б).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обоснован выбор уравнений мелкой воды (двумерных уравнений Сен-Венана) как наиболее эффективный на настоящий момент инструмент для численного моделирования протяженных участков рек. Сформулированы основные требования к численным алгоритмам, из которых главное – применение адаптивных неструктурированных сеток и методов дискретизации уравнений, дающих правильные уровни воды на “грубых” сетках с учетом резких перепадов отметок дна.

Описывается модель р. Амур с притоками общей протяженностью >3 тыс. км. Расчеты ведутся по оригинальному высокоточному алгоритму с учетом дорожных и защитных сооружений на пойме. Описаны этапы построения модели, ее калибровка, верификация и результаты расчетов катастрофического наводнения 2013 г. и высококого наводнения 2020 г. Модель может использоваться для регулирования попусков из водохранилищ, прогнозирования уровней воды и зон затопления пойменных территорий, обеспечения бесперебойного судоходства на р. Амур.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алабян А.М., Василенко А.Н., Демиденко Н.А., Крыленко И.Н., Панченко Е.Д., Попрядухин А.А. Приливная динамика вод в дельте Печоры в летнюю межень // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 5, География. 2022. № 1. С. 167–179.
2. Алабян А.М., Крыленко И.Н., Лебедева С.В., Панченко Е.Д. Мировой опыт численного моделирования динамики потока в устьях рек // Вод. ресурсы. 2022. Т. 49. № 5. С. 552–567.
3. Американский спутник наблюдения за поверхностью Земли, находящийся в ведении геологической службы США (USGS.) <https://earthexplorer.usgs.gov/>
4. Беликов В.В. Вычислительный комплекс “TRI-ANA” – генератор сеток треугольных конечных элементов в произвольных плоских областях. М.: ГосФАП СССР, П007705, 1984.
5. Беликов В.В., Алексюк А.И. Модели мелкой воды в задачах речной гидродинамики М.: РАН, 2020. 346 с.
6. Беликов В.В., Алексюк А.И., Борисова Н.М., Глотко А.В., Румянцев А.Б. Оценка изменения уровней затопления поймы Нижнего Дона под влиянием хозяйственной деятельности. Ретроспективное гидродинамическое моделирование // Вод. ресурсы. 2022. Т. 49. № 6. С. 681–690.
7. Беликов В.В., Борисова Н.М., Румянцев А.Б., Бугаец А.Н. Численная гидродинамическая модель стокково-приливных течений в Амурском лимане // Сб. науч. тр. Всерос. конф. “Водные ресурсы: новые вызовы и пути решения”. Новочеркасск: Лик, 2017. С. 480–485.
8. Беликов В.В., Глотко А.В. Компьютерное моделирование паводковых и меженных течений в Чебоксарском водохранилище с применением различных численных методов // Природообустройство и рациональное природопользование – необходимые условия социально-экономического развития России. Сб. науч. тр. Ч. I. М.: МГУП, 2005. С. 204–210.
9. Беликов В.В., Зайцев А.А., Зернов А.В. и др. Гидродинамическая модель Невы // Тр. международ. науч.-практ. конф. “Безопасность речных судоход-

- ных гидротехнических сооружений”. Кн. I. СПб., 2008. С. 155–174.
10. *Беликов В.В., Колесников Ю.М., Иваненко С.А.* Математическое моделирование пропуска весеннего половодья через городской бьеф р. Москвы // *Вод. ресурсы*. 2001. Т. 28. № 5. С. 566–572.
  11. *Беликов В.В., Милитеев А.Н.* Двухслойная математическая модель катастрофических паводков // *Вычислительные технологии*. 1992. Т. 1. № 3. С. 167–174.
  12. *Беликов В.В., Милитеев А.Н.* Численная модель морских нагонов в приустьевых участках рек // *Сб. науч. тр. КаГУ. Калининград*, 1993. С. 15–23.
  13. *Беликов В.В., Третьюхина (Васильева) Е.С., Кочетков В.В., Зайцев А.А., Савельев Р.А., Сосунов И.В.* Компьютерное моделирование катастрофического заторного наводнения в районе г. Ленска // *БЭС. Вып. 12. М.: НИИЭС*, 2004. С. 220–249.
  14. *Калугин А.С., Мотовилов Ю.Г.* Модель формирования стока для бассейна реки Амур // *Вод. ресурсы*. 2018. Т. 45. № 2. С. 121–132.
  15. *Кюнж Ж.А., Холли Ф.М., Вервей А.* Численные методы в задачах речной гидравлики. М.: Энергоатомиздат, 1985. 255с.
  16. *Лебедева С.В., Алабян А.М., Крыленко И.Н., Федорова Т.А.* Наводнения в устье Северной Двины и их моделирование // *Геориск*. 2015. № 1. С. 18–25.
  17. *Мотовилов Ю.Г., Данилов-Данильян В.И., Дод Е.В., Калугин А.С.* Оценка противопаводкового эффекта действующих и планируемых водохранилищ в бассейне Среднего Амура на основе физико-математических гидрологических моделей // *Вод. ресурсы*. 2015. Т. 42. № 5. С. 476–491.
  18. *Неров И.О., Краснопеев С.М., Бугаец А.Н., Беликов В.В., Глотко А.В., Борисова Н.М., Васильева Е.С., Кролевецкая Ю.В.* Опыт создания цифровой модели рельефа для гидродинамических расчетов в бассейне р. Амур // *Вестн. ДВО РАН*. 2021. № 6 (220) С. 45–55.
  19. НЦ ОМЗ. Космические аппараты типа “Канопус-В”. [http://www.ntsomz.ru/ks\\_dzz/satellites/kanopus\\_vulkan](http://www.ntsomz.ru/ks_dzz/satellites/kanopus_vulkan)
  20. НЦ ОМЗ. Космические аппараты типа “Ресурс-П”. [http://www.ntsomz.ru/ks\\_dzz/satellites/resurs\\_p](http://www.ntsomz.ru/ks_dzz/satellites/resurs_p)
  21. Проект ArcGIS Online (США). <https://www.arcgis.com/home/item.html?id=10df2279f9684e4a9f6a7f08febac2a9>; Airbus Defence and Space (Франция). WorldDEM™ – The New Standard of Global Elevation Models. Elevation Models. <https://www.intelligence-airbusds.com/imagery/reference-layers/worlddem/worlddem-thematic-layers-and-derivatives/>
  22. *Румянцев А.Б., Беликов В.В.* Оценка рисков воздействия экстремальных гидрометеорологических явлений и техногенных паводков на объекты повышенной опасности // *Сб. науч. тр. Всерос. науч. конф. “Научное обеспечение реализации “Водной стратегии Российской Федерации на период до 2020 г.”*. Петрозаводск, 2015. Т. 2. С. 38–44.
  23. Свид. 2014612182 об официальной регистрации программы для ЭВМ. Программный комплекс для расчета течений, деформаций дна и переноса загрязнений в протяженной и разветвленной системе русел (RIVER\_1D). *В.В. Беликов, В.В. Кочетков*. № 2013619720. 2014. Реестр программ для ЭВМ. 1 с.
  24. Свид. 2002610941 об официальной регистрации программы для ЭВМ. Комплекс программ для расчета речных течений (FLOOD). *Беликов В.В., Милитеев А.Н.* № 200610689. 2002. Реестр программ для ЭВМ. 1 с.
  25. Свид. 2001610638 об официальной регистрации программы для ЭВМ. Комплекс программ для расчета волн прорыва (БОР). *В.В. Беликов, А.Н. Милитеев, В.В. Кочетков*. № 2001610454. 2001. Реестр программ для ЭВМ. 1 с.
  26. Свид. 2017660266 о государственной регистрации программ для ЭВМ. Программный комплекс STREAM 2D CUDA для расчета течений, деформаций дна и переноса загрязнений в открытых потоках с использованием технологий Compute Unified Device Architecture (на графических процессорах NVIDIA). *А.И. Алексюк, В.В. Беликов*. № 2017617252. 2017. Реестр программ для ЭВМ. 1 с.
  27. Свид. 2020660617 о государственной регистрации программы для ЭВМ. Решатель задачи Римана для уравнений мелкой воды с разрывным дном. *А.И. Алексюк, М.А. Малахов, В.В. Беликов*. № 2020619746. 2020. Реестр программ для ЭВМ. 1 с.
  28. *Abreu C.H.M., Barros M.L.C., Brito D.C., Teixeira M.R., Cunha A.C.* Hydrodynamic Modeling and Simulation of Water Residence Time in the Estuary of the Lower Amazon River // *Water*. 2020. V. 12 (3). 660. <https://doi.org/10.3390/w12030660>
  29. *Alabyan A.M., Lebedeva S.V.* Flow dynamics in large tidal delta of the Northern Dvina River: 2D simulation // *J. Hydroinformatics*. 2018. V. 20. № 4. P. 798–814. <https://doi.org/10.2166/hydro.2018.051>
  30. *Aleksyuk A.I., Belikov V.V.* The uniqueness of the exact solution of the Riemann problem for the shallow water equations with discontinuous bottom // *J. Comp. Phys*. 2019. V. 390. P. 232–248. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2019.04.001>
  31. *Aleksyuk A.I., Malakhov M.A., Belikov V.V.* The exact Riemann solver for the shallow water equations with a discontinuous bottom // *J. Comp. Phys*. 2022. V. 450. P. 110801. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2021.110801>
  32. *Belikov V.V., Aleksyuk A.I., Borisova N.M., Vasilieva E.S., Norin S.V., Rumyantsev A.B.* Justification of Hydrological Safety Conditions in Residential Areas Using Numerical Modelling // *Water Resour*. 2018. V. 45. Suppl. 1. P. S39–S49.
  33. *Belikov V.V., Borisova N.M., Aleksyuk A.I., Rumyantsev A.B., Glotko A.V., Shurukhin L.A.* Hydraulic substantiation of the Bagaevskaya hydro complex project based on numerical hydrodynamic modeling // *Power Technol. Engineering*. 2018. V. 52. № 4. P. 372–388. <https://doi.org/10.1007/s10749-018-0962-9>
  34. *Glotko A.V., Aleksyuk A.I., Borisova N.M., Vasil'eva E.S., Fedorova T.A., Krasnopeev S.M., Nеров I.O., Belikov V.V.* A numerical hydrodynamic 2D model of the Amur and Zeya Rivers and the Amur Liman // 4th Int. Conf. Status Future WORLDS LARGE RIVERS. М.: VGU, 2021. P. 230–231

35. *Goutal N., Maurel F.* Proceedings of the 2nd workshop on dam-break wave simulation // Electricité de France. Direction des études et recherches. 1997. 192 p.
36. *Kornilova E.D., Morozova E.A., Krylenko I.N., Fingert E.A., Golovlyov P.P., Zavadsky A.S., Belikov V.V.* Study of Channel Changes in the Lena River Near Yakutsk Based on Long-Term Data, Satellite Images and Two-Dimensional Hydrodynamic Model // Climate Change Impacts on Hydrological Processes and Sediment Dynamics: Measurement, Modelling and Management / Eds *S. Chalov, V. Golosov, R. Li, A. Tsyplenkov*. Cham: Springer Int. Publ., 2019. P. 104–109.
37. *Krylenko I.N., Belikov V.V., Fingert E., Golovlyov P.P., Glotko A.V., Zavadskii A.S., Samokhin M.A., Borovkov S.* Analysis of the Impact of Hydrotechnical Construction on the Amur River near Blagoveshchensk and Heihe Cities Using a Two-Dimensional Hydrodynamic Model // *Water Resour.* 2018. V. 45. Suppl. 1. P. S112–S121.
38. *Lu. S., Tong C., Lee D.-Y., Zheng J., Shen J., Zhang W., Yan Y.* Propagation of tidal waves up in Yangtze Estuary during the dry season // *J. Geophysic. Res. Oceans.* 2015. V. 120 (9). P. 6445–6473.  
<https://doi.org/10.1002/2014JC010414>