

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ГИДРОЛОГИИ СУШИ

УДК 556.5

ЧИСЛЕННОЕ 2D-МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРАНСФОРМАЦИИ ДОЖДЕВОГО СТОКА НА ВОДОСБОРЕ г. ГЕЛЕНДЖИКА С УЧЕТОМ НАГОРНОГО КОЛЛЕКТОРА И АККУМУЛИРУЮЩИХ РЕЗЕРВУАРОВ¹

© 2023 г. В. В. Беликов^a, *, Н. М. Борисова^a

^aИнститут водных проблем РАН, Москва, 119333 Россия

*e-mail: belvv@bk.ru

Поступила в редакцию 03.10.2022 г.

После доработки 20.02.2023 г.

Принята к публикации 22.02.2023 г.

На основе цифровой модели рельефа местности горного кластера, схем расположения нагорных коллекторов и плотин водохранилищ разработана численная гидродинамическая 2D-модель горной части водосборного бассейна территории г. Геленджика и выполнены варианты расчеты волн дождевых паводков с учетом их трансформации в нагорных коллекторах и аккумуляции в водохранилищах. Расчетные дожди приняты обеспеченностью 1% продолжительностью 20 и 720 мин (12 ч) с суммарным слоем осадков 51 и 206 мм соответственно. Сделаны выводы, что пропускная способность коллектора должна рассчитываться на параметры кратковременного интенсивного дождя и что аккумулирующие гидротехнические сооружения для их эффективной работы должны быть запроектированы с возможностью непрерывного регулирования сбросных расходов.

Ключевые слова: 2D-моделирование, горный водосбор, аккумулирующее водохранилище, коллектор, плювиограмма дождя.

DOI: 10.31857/S0321059623040041, **EDN:** QKDDZL

ВВЕДЕНИЕ

Геленджик — солнечный курортный город на Черноморском побережье Краснодарского края, наводнения в котором с каждым годом носят все более катастрофический характер. Практически после каждого, даже не самого сильного, дождя улицы г. Геленджика превращаются в реки. Особенно страдает центр города и туристический прибрежный сектор. Дождевая канализация в Геленджике строилась и развивалась с 1960-х до 1980-х г. С тех пор произошло значительное изменение градостроительной ситуации г. Геленджика при неизменной дождевой канализационной сети.

Для снижения объемов дождевого стока с горных водосборов организацией ООО «СоюзДон-Строй» предложено создание четырех аккумулирующих водохранилищ путем строительства плотин в четырех наиболее крупных ущельях, а для

перехвата остального стока предусматривается строительство нагорного коллектора с отводом стока в обход городской территории в устьевые участки рек Яшамбы и Адербы (в две стороны по тяготению рельефа).

Цель данной работы — численное гидродинамическое моделирование склонового дождевого стока с использованием плювиограмм осадков и уточненных (по результатам дополнительных исследований Гидрометцентра России) параметров расчетных дождей, определение расходов воды, поступающей в нагорный коллектор, с учетом распределения бокового притока по длине коллектора, оценка влияния аккумулирующих водохранилищ на снижение максимальных расходов в коллекторе.

ЧИСЛЕННАЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Объектом исследования был участок водосбора в районе г. Геленджика площадью ~13 км² (рис. 1).

Для выполнения исследований была разработана двумерная в плане компьютерная модель склонового стока в районе г. Геленджика. Расчеты проводились с применением отечественного программного комплекса STREAM 2D CUDA [1],

¹ Работа выполнена в рамках Государственного задания ИВП РАН (тема FMWZ-2022-0003 «Разработка численных моделей гидрологических, гидродинамических и гидрохимических процессов в водных объектах и их водосборных бассейнах, создание на основе разработанных моделей технологий поддержки решений в сфере водной безопасности для информационной модернизации водохозяйственной отрасли России»).

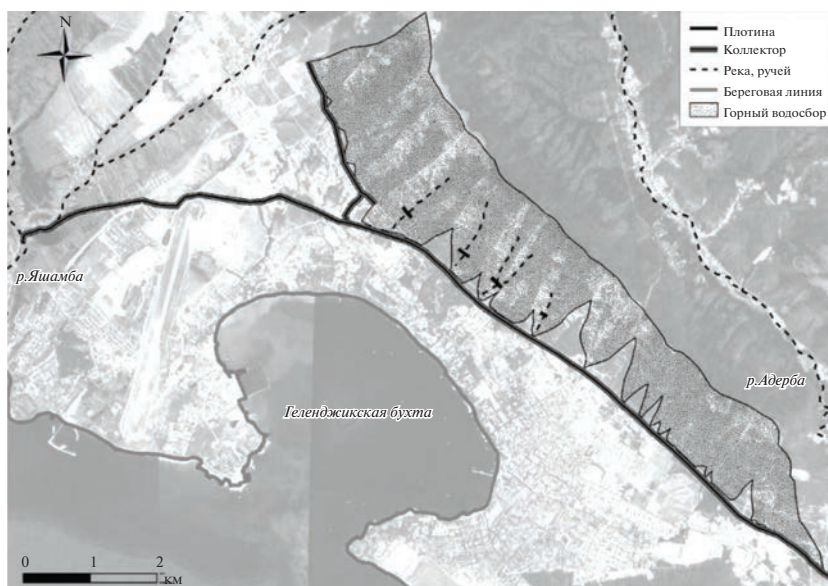


Рис. 1. Исследуемый участок в районе г. Геленджика с проектируемыми плотинами и нагорным коллектором.

основанного на решении двумерных уравнений мелкой воды (Сен-Венана) с использованием оригинального высокоточного алгоритма, описанного в работах [2, 8–10].

При построении модели применялись гибридные треугольно-четыреугольные сетки нерегулярной структуры. Такие сетки хорошо адаптируются под плановые очертания расчетной области и особенности течения. На водосборах схематизация расчетной области проводилась на основе треугольной сетки с переменным шагом, а в коллекторе, после предварительных расчетов принятом шириной 5 м прямоугольного поперечного сечения, и на участках русел рек Яшамбы и Адерба строилась четырехугольная криволинейная сетка. Сетка содержит ~91 тыс. ячеек с размером сторон от 5 до 20 м. В данной численной модели две выходные границы по Яшамбе и Адербе и по длине коллектора, построены дополнительные контрольные створы для фиксации параметров проходящей воды (рис. 2).

Построение рельефа для расчетной модели проходило в два этапа. На первом этапе отметки рельефа с раstra земной поверхности на исследуемый участок, полученный съемкой с беспилот-

ного летательного аппарата, интерполировались на ячейки сетки, относящиеся к водосборам и участкам русел рек Яшамбы и Адербы. Вторым этапом строились отметки по дну коллектора путем интерполирования в центры ячеек расчетной сетки, расположенных по длине коллектора. Далее участки рельефа водосборов и русел рек объединялись с рельефом, полученным по дну коллектора. Таким образом был получен базовый цифровой рельеф модели. Для учета аккумулирующих водохранилищ (рис. 1) необходимо было построить вариант рельефа модели, включающий в себя плотины. Для этого в местах расположения плотин были подняты на необходимую высоту отметки рельефа (табл. 1).

Поскольку данные для калибровки численной модели отсутствовали, то коэффициенты шероховатости задавались с учетом данных известных таблиц шероховатости [6, 7] и объектов-аналогов, на которых проводилась калибровка моделей по натурным данным [11, 12]. Коэффициенты шероховатости для коллектора и плотин брались равными 0.02 (шероховатый бетон), для русел рек Яшамбы и Адербы – 0.03, для склонов гор – 0.2, для небольших ручьев в ущельях – 0.1.

Таблица 1. Характеристики плотин

№ плотины	Отметка гребня, м	Отметка низа, м	Высота плотины, м	Длина по гребню, м
1	127.67	110	17.67	207
2	128.12	110	18.12	198
3	132.72	115	17.72	210
4	163.89	145	18.89	124

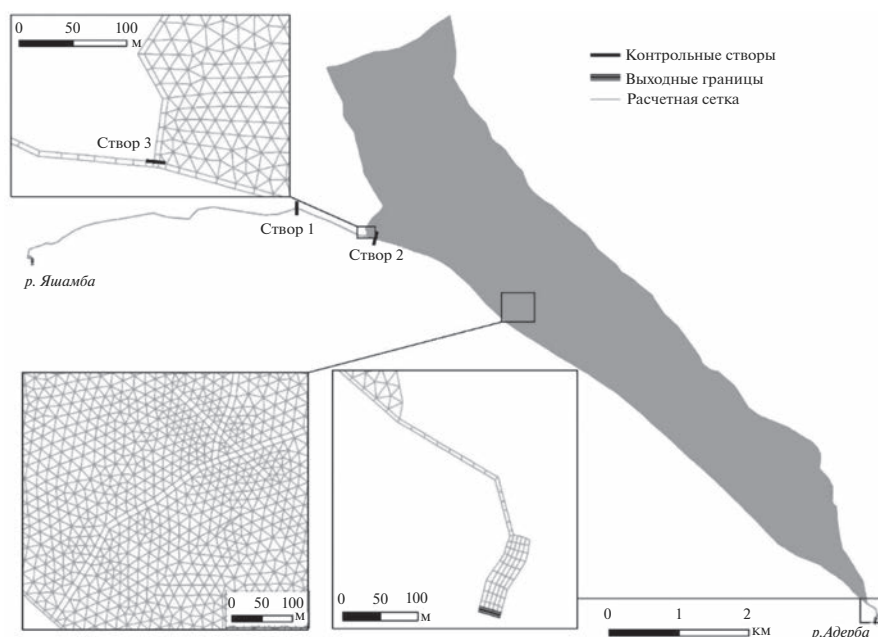


Рис. 2. Расчетная сетка на область моделирования.

Следует отметить, что зачастую применяемые для решения подобного типа задач модели кинематической волны или одномерные уравнения Сен-Венана в данном случае непригодны, поскольку не учитывают существенной двухмерности течения (направления склонового и руслового стока не совпадают), аккумуляции части стока в водохранилищах, неравномерности течения в коллекторе, явления подпора и т. п.

РАСЧЕТНЫЕ ПЛЮВИОГРАММЫ ДОЖДЕЙ

При расчетном определении расходов и уровней воды для определенных дождевых событий изменение во времени интенсивности дождя (различные формы плювиограммы дождя при одном и том же суммарном слое и средней интенсивности осадков) может играть значительную роль. Это особенно относится к расчетам сетей водоотведения, время осреднения (“время добегания”) в которых соизмеримо и часто даже меньше, чем время выпадения дождя или время его интенсивной части.

На сегодняшний день в документах [3, 5] для определения расчетных расходов дождевых вод в коллекторах дождевой канализации используются дожди постоянной интенсивности (очевидно, для упрощения проводимых расчетов при проектировании наружных сетей и сооружений дождевой канализации). При использовании в модели такого подхода с заданием постоянной интенсивности дождей, выпадающих на городские территории, в результатах расчета будут получены осредненные по времени характеристики стока,

что может сильно занижать значения максимальных расходов и уровней в сети водоотведения. Для того чтобы приблизить расчетные гидравлические параметры в системе водоотведения к наиболее вероятным реалистичным условиям и режимам протекания, необходимо рассматривать осадки, наиболее приближенные к тем, которые характерны для данной местности.

Такие приближенные к реальным условиям параметры и плювиограммы дождей были рассчитаны ООО “Экхайден” (табл. 2). По результатам этих исследований дождь вероятностью повторения 1 раз в 100 лет ($P = 1\%$) и продолжительностью 20 мин имеет суммарный слой осадков 44.4 мм.

В то же время по результатам исследований Гидрометцентра России (табл. 3) [4] средняя величина суммарного слоя осадков для дождя продолжительностью 20 мин и вероятностью повторения 1 раз в 100 лет ($P = 1\%$) составляет 51 мм.

Взяв за основу предложенную ООО “Экхайден” плювиограмму дождя и умножив ее на коэффициент 1.15, получим плювиограмму дождя с суммарным слоем осадков 51 мм, которую будем использовать в качестве первого расчетного дождя с $P = 1\%$ и продолжительностью 20 мин (рис. 3).

Для построения плювиограммы второго расчетного дождя был взят за основу реально наблюдавшийся экстремальный дождь 06.07.2012 в Геленджике, суммарный слой осадков которого составил 267.2 мм.

На основе данных Гидрометцентра России (табл. 4) [4] максимальная величина суммарно-

Таблица 2. Матрица расчетного слоя осадков (мм) для дождевых событий различной повторяемости и продолжительности (жирный шрифт – значение, которое упоминается в тексте статьи)

<i>P</i> , лет	Продолжительность дождя, мин								
	20	40	60	80	160	320	640	720	1280
1	15.0	19.8	23.3	26.1	34.5	45.5	60.0	62.9	79.2
2	18.7	24.3	28.4	31.7	41.2	53.6	69.8	73.0	90.8
5	24.0	31.3	36.5	40.7	52.9	68.9	89.6	93.7	117
10	28.3	36.9	43.0	48.0	62.5	81.3	106	111	138
20	32.9	42.8	50.0	55.7	72.5	94.4	123	128	160
50	39.3	51.1	59.7	66.6	86.6	113	147	153	191
100	44.4	57.8	67.4	75.2	97.8	127	166	173	216

Таблица 3. Матрица расчетного слоя осадков (мм) для дождевых событий различной повторяемости и продолжительности 20 мин, вычисленная с использованием функций распределения Крицкого–Менкеля, логнормального, Пирсона 3 типа (жирный шрифт – значение, которое упоминается в тексте статьи)

<i>T</i> _г	<i>P</i> _г , %	Крицкого–Менкеля	Логнормальное	Пирсона 3 типа
		<i>h</i> _{20(p)}	<i>h</i> _{20(p)}	<i>h</i> _{20(p)}
10000	0.01	120	70	160
2000	0.05	91	58	123
1000	0.10	81	54	109
200	0.50	59	43	77
100	1	51	39	62
50	2	44	35	49
33	3	39	33	41
20	5	34	30	33
10	10	28	25	23

го слоя осадков для дождя продолжительностью 720 мин и вероятностью повторения 1 раз в 100 лет (*P* = 1%) составляет 206 мм.

Взяв за основу плювиограмму дождя 2012 г. и умножив ее на коэффициент 0.77, получим плювиограмму дождя с суммарным слоем осадков

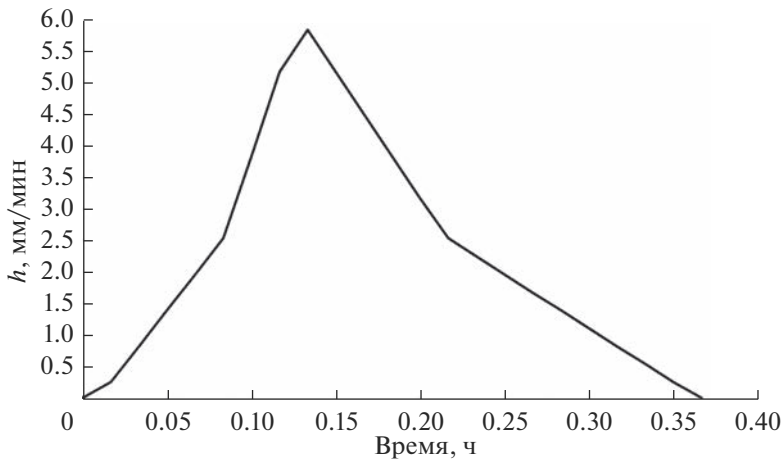


Рис. 3. Плювиограмма расчетного дождя продолжительностью 20 мин и суммарным слоем осадков 51 мм.

Таблица 4. Матрица расчетного слоя осадков (мм) для дождевых событий различной повторяемости и продолжительности 720 мин, вычисленная с использованием функций распределения Крицкого–Менкеля, логнормального, Пирсона 3 типа (жирный шрифт – значение, которое упоминается в тексте статьи)

		Крицкого–Менкеля	Логнормальное	Пирсона 3
T_r	$P_r, \%$	$h_{720}(p)$	$h_{720}(p)$	$h_{720}(p)$
10000	0.01	413	219	585
2000	0.05	311	183	433
1000	0.10	273	168	380
200	0.50	196	135	259
100	1	167	122	206
50	2	143	109	162
33	3	127	101	132
20	5	110	91	101
10	10	89	78	65

206 мм, которую будем использовать в качестве второго расчетного дождя с $P = 1\%$ и продолжительностью 720 мин (рис. 4).

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Для устройства аккумулирующих водоемов необходимо в каждом из ущелий возвести каменно-набросную плотину (рис. 1; табл. 1) с соответствующими водосбросными сооружениями. Поскольку расчетные параметры дождевых паводков принимались обеспеченностью 1%, гидротехнические сооружения должны быть второго класса капитальности, что накладывает на них весьма жесткие требования. Возведение плотин и образование аккумулирующих водохранилищ направлено на то, чтобы уменьшить приток воды в нагорный коллектор при сильных дождях. Это возможно при условии, что до начала дождя будет

происходить сработка водохранилищ. Поэтому в расчетах предполагается, что на момент начала дождя водохранилища сработаны, т. е. в них отсутствует вода (или они имеют незначительный мертвый объем). Вычисленные в процессе расчетов площадь зеркала водохранилищ и аккумулирующая емкость водоемов представлены на рис. 5.

Для расчетных дождей, плувиограммы которых изображены на рис. 3 и 4, моделирование без учета аккумулирующих водохранилищ проводится на базовом цифровом рельефе, а с учетом аккумулирующих водохранилищ – на рельефе, который включает проектируемые плотины.

Для 20-минутного дождя в процессе расчета потери на инфильтрацию учитывались следующим образом – 15 мм осадков равномерно в течение всего дождя (экспертная оценка на основе водосборов-аналогов). По результатам расчета, для 20-минутного дождя без учета аккумулирующих

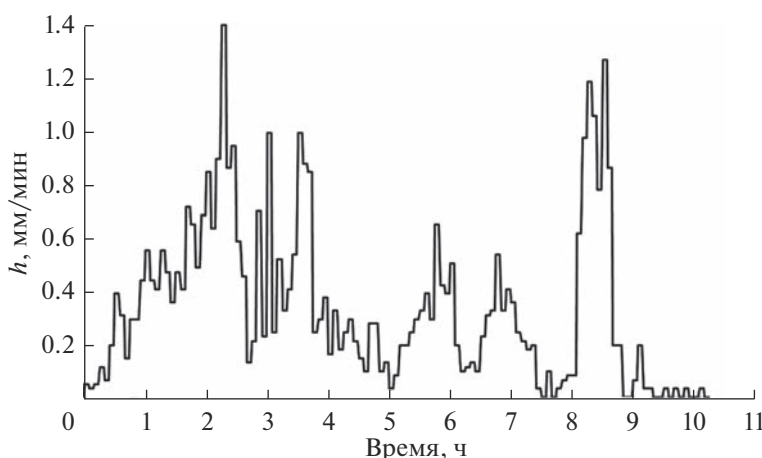


Рис. 4. Плывиограмма расчетного дождя продолжительностью 720 мин с суммарным слоем осадков 206 мм, построенная на основе плывиограммы дождя 2012 г.

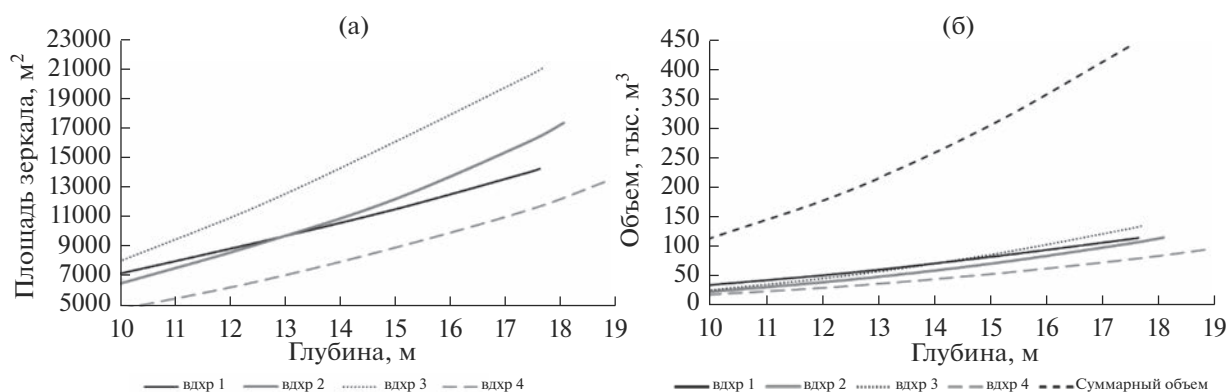


Рис. 5. Площадь зеркала (а) и объем (б) проектируемых водохранилищ.

щих водохранилищ 66.85% всей выпавшей воды (309.76 тыс. м³) попадает по коллектору в р. Яшамбу и 33.15% (153.57 тыс. м³) – в р. Адербу, т. е. делятся в отношении 2 : 1, с учетом аккумулирующих водохранилищ – соответственно 54.94% (187.44 тыс. м³) и 45.60% (153.57 тыс. м³), т. е. почти 1 : 1. Водохранилища аккумулируют 122.19 тыс. м³ воды и снижают поток воды в р. Яшамбу.

Полученные в контрольных створах (рис. 2) параметры потока воды, прошедшего по коллектору, представлены на рис. 6 и в табл. 5. При этом без учета аккумулирующих водохранилищ скорости течения достигают ~8 м/с на выходных участках обоих коллекторов, что вызывает необходимость предусмотреть устройства гашения энергии потока на участках сопряжения коллекторов с руслами.

Наличие аккумулирующих водохранилищ приводит к тому, что максимальные расходы во всех контрольных створах, расположенных по движению воды по коллектору в направлении р. Яшамбы, уменьшаются; например, в створе 2 – почти в 3.5 раза (было 76.61, стало 22.18 м³/с), в остальных створах в ~2 раза. И как следствие, максимальная

скорость в выходном створе р. Яшамбы уменьшается до 6.63 м/с.

Нужно обратить внимание на то, что в створе 3 (Т-образная стыковка двух участков коллектора) максимальная скорость в этом случае увеличивается. Это связано с тем, что на начальном этапе дождя вода аккумулируется в водохранилищах и в основной коллектор притекает меньше воды по сравнению со случаем, когда аккумулирующие водохранилища отсутствуют, поэтому кратковременно в створе 3 достигается скорость ~9 м/с за счет нерегулируемого бокового притока из пристыковывающегося коллектора. Вообще говоря, Т-образная стыковка двух потоков (коллекторов) под прямым углом, с гидравлической точки зрения, – неправильная (создаются повышенные гидравлические сопротивления в узле стыковки, возрастают глубины, увеличиваются пульсации скоростей и глубин, возникают колебания течения со сменой направления движения, что наглядно видно на графиках), поэтому рекомендовано обратить особое внимание на оптимизацию этого узла при проектировании.

Таблица 5. Максимальные параметры потока воды в контрольных створах коллектора при моделировании дождя $P = 1\%$ продолжительностью 20 мин с суммарным слоем осадков 51 мм

Контрольные створы	Без учета аккумулирующих водохранилищ			С учетом аккумулирующих водохранилищ		
	Q , м ³ /с	V , м/с	H , м	Q , м ³ /с	V , м/с	H , м
Граница коллектор–Яшамба	121	7.99	3.01	68.8	6.63	2.07
Граница коллектор–Адерба	59.3	7.39	1.60	59.3	7.39	1.60
Створ 1	125	4.40	5.26	70.4	3.65	3.67
Створ 2	76.6	2.61	6.03	22.2	1.53	4.24
Створ 3	51	7.25	6.72	51.3	8.94	4.87

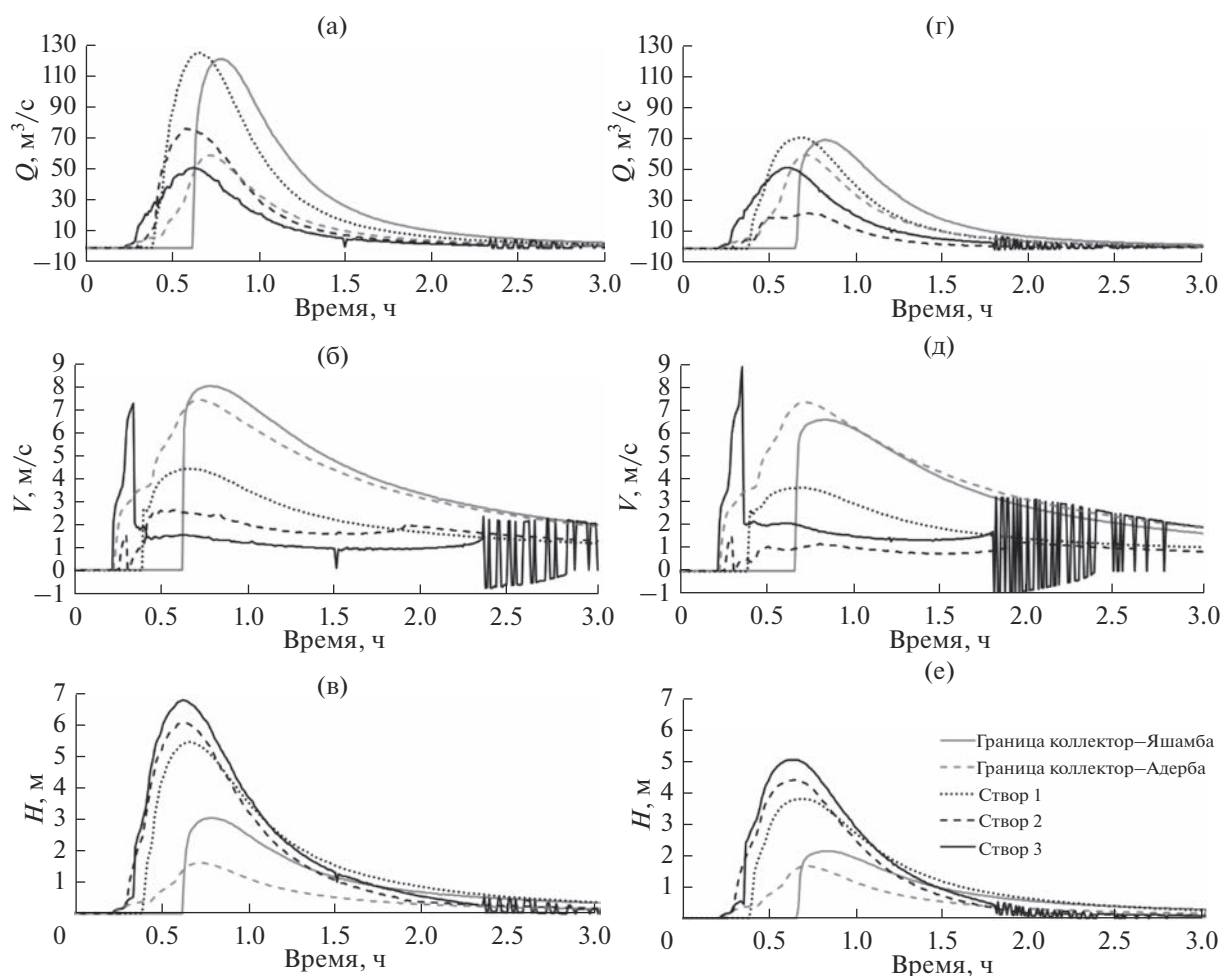


Рис. 6. Расходы, скорости и глубина воды в контрольных створах коллектора при моделировании дождя $P = 1\%$ продолжительностью 20 мин с суммарным слоем осадков 51 мм. а–в – без учета аккумулирующих водохранилищ, г–е – с учетом аккумулирующих водохранилищ.

При моделировании 720-минутного дождя в процессе расчета учитывались потери на инфильтрацию – 30 мм осадков равномерно в первые 3 ч дождя. По результатам расчета, без учета аккумулирующих водохранилищ 66.55% всей выпавшей воды (1509.44 тыс. м³) попадает по коллектору в р. Яшамбу и 33.45% (758.63 тыс. м³) – в р. Адербу, с учетом аккумулирующих водохранилищ – соответственно 57.68% (1033.94 тыс. м³) и 42.32% (758.6 тыс. м³). Водохранилища аккумулируют 475.52 тыс. м³ воды, тем самым уменьшая на эту величину объем воды, поступающей в р. Яшамбу.

Полученные в контрольных створах (рис. 2) параметры потока воды, прошедшего по коллектору, представлены на рис. 7 и в табл. 6. Наличие аккумулирующих водохранилищ оказывает влияние первые 8 ч расчета, пока водохранилища заполняются (рис. 8б). После заполнения водохранилищ на последнем и самом мощном пике дождя достигаются максимумы расходов и скоростей во-

ды в контрольных створах коллектора, которые почти не отличаются от значений, полученных в расчете без аккумулирующих водохранилищ.

Интересно отметить, что, из сравнения данных табл. 5 и 6, при отсутствии водохранилищ максимальный расход в коллекторе, выпадающем в р. Яшамбу, при коротком 20-минутном дожде больше, чем при продолжительном 12-часовом (121 против 110 м³/с), т. е. в этом случае параметры коллектора (поперечные сечения и пр.) определяются именно коротким интенсивным дождем.

Из рис. 8а видно, что при 20-минутном дожде с суммарным слоем осадков 51 мм аккумулирующие водохранилища заполняются примерно наполовину по глубине. Таким образом, для перехвата такого дождя их объем избыточный. По графикам на рис. 8б видно, что на время 8.5 ч от начала продолжительного дождя водохранилища полностью наполнены и перестают выполнять

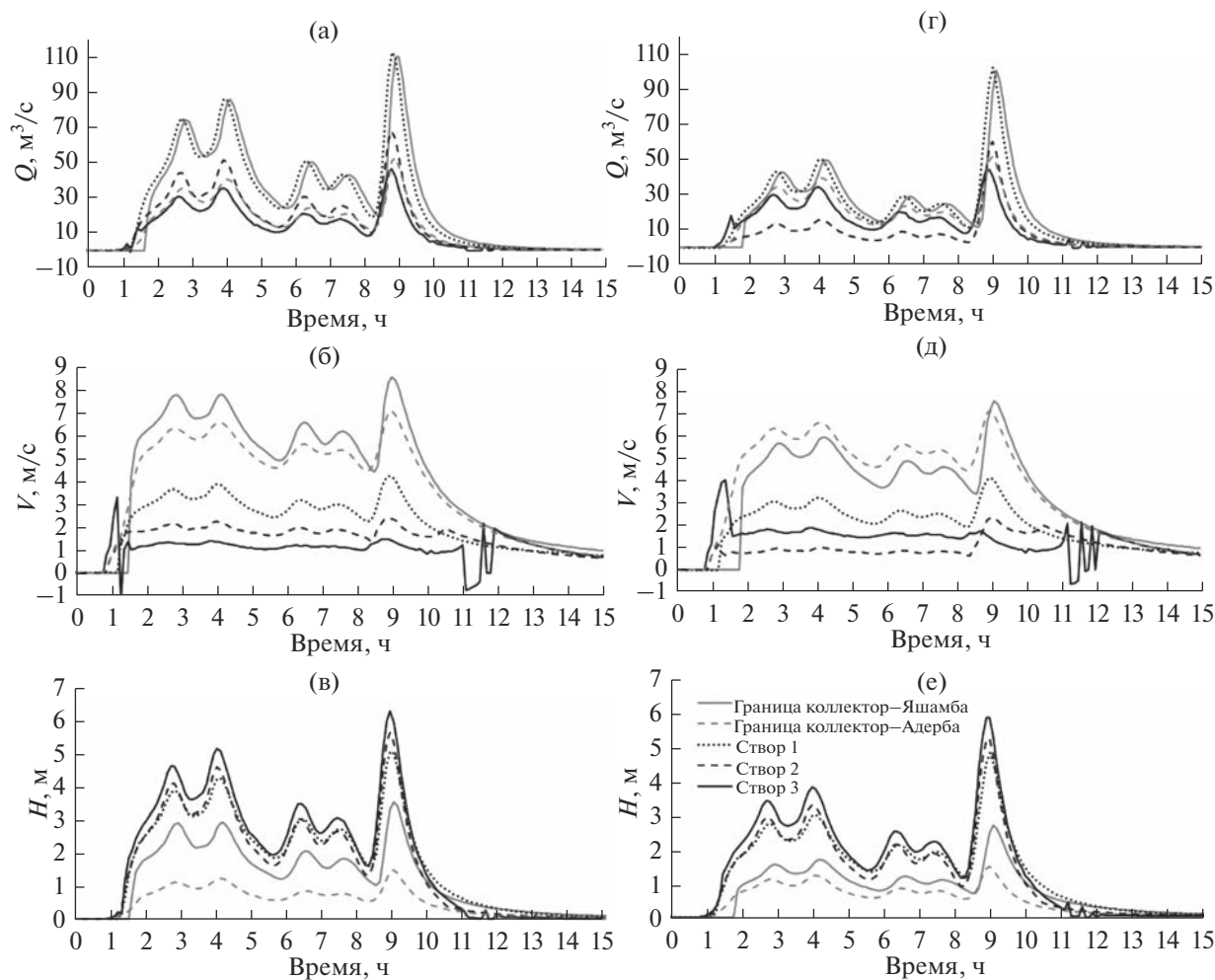


Рис. 7. Расходы, скорости и глубина воды в контрольных створах коллектора при моделировании дождя $P = 1\%$ продолжительностью 720 мин с суммарным слоем осадков 206 мм. а–в – без учета аккумулирующих водохранилищ, г–е – с учетом аккумулирующих водохранилищ.

свои аккумулирующие функции. Поэтому их объема не хватает на срезку последнего наиболее сильного пика дождя. По графику расходов на рис. 6г видно, что для створа 2, который на 90% зарегулирован четырьмя рассматриваемыми водохранилищами, приток к этим водохранилищам за последний пик дождя составит ~90 тыс. м³. По графику на рис. 5б для кривой суммарного

Таблица 6. Максимальные параметры потока воды в контрольных створах коллектора при моделировании дождя $P = 1\%$ продолжительностью 720 мин с суммарным слоем осадков 206 мм

Контрольные створы	Без учета аккумулирующих водохранилищ			С учетом аккумулирующих водохранилищ		
	$Q, \text{ м}^3/\text{с}$	$V, \text{ м/с}$	$H, \text{ м}$	$Q, \text{ м}^3/\text{с}$	$V, \text{ м/с}$	$H, \text{ м}$
Граница коллектор–Яшамба	110	8.60	3.51	103	7.58	2.70
Граница коллектор–Адерба	52.8	7.13	1.48	52.8	7.13	1.48
Створ 1	112	4.25	5.03	105	4.15	4.80
Створ 2	67.6	2.42	5.58	61.4	2.35	5.21
Створ 3	46.3	3.33	6.24	45.3	4.04	5.83

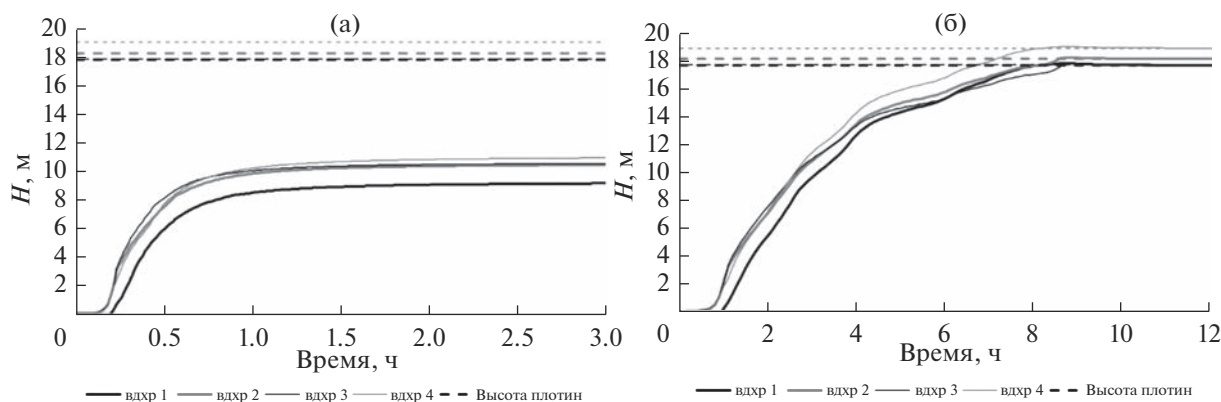


Рис. 8. Глубина воды в аккумулирующих водохранилищах при моделировании дождей $P = 1\%$: а – продолжительностью 20 мин с суммарным слоем осадков 51 мм, б – продолжительностью 720 мин с суммарным слоем осадков 206 мм.

объема водохранилищ определяем, что 1 м приращения уровня воды в водохранилищах аккумулирует ~ 50 тыс. м^3 воды.

Таким образом, увеличение высот плотин на 2 м относительно предложенных значений (табл. 1) позволило бы аккумулятировать и последний пик паводка (т. е. полностью весь сток с водосборов этих четырех водохранилищ за расчетный продолжительный дождь) и тем самым снизить максимальные расходы в коллекторе на Яшамбу до $55 \text{ м}^3/\text{с}$. Подчеркнем, что в этом варианте рассматривается пассивная работа водохранилищ, которые просто аккумулируют весь поступающий в них расход во время паводка, а опорожняются после прохождения паводка в тот же коллектор. Очевидно, что это не самый оптимальный вариант регулирования.

ВЫВОДЫ

С использованием высокоточной цифровой 3D-модели рельефа разработана численная гидродинамическая модель горной части водосбора на территории г. Геленджика с учетом нагорного коллектора и аккумулирующих водохранилищ, на которой сквозным образом на единой адаптивной сетке треугольно-четырёхугольной структуры по оригинальному высокоточному алгоритму выполнены расчеты трансформации склонового стока для дождевых паводков обеспеченностью 1% различной продолжительности.

Оказалось, что при отсутствии аккумулирующих резервуаров определяющий для расчета пропускной способности коллектора – короткий 20-минутный дождь, который дает максимальный расход в коллекторе $121 \text{ м}^3/\text{с}$.

При наличии нерегулируемых водохранилищ решающий фактор – их полезный объем, который определяется в первую очередь высотой плотин.

Для срезки расходов продолжительного 720-минутного расчетного дождя необходимы 4 плотины высотой ~ 20 м второго класса капитальности. Размеры плотин можно немного уменьшить, но тогда потребуются сложное непрерывное регулирование сбросных расходов в период прохождения паводков. Необходимо дополнительно исследовать вопрос об экономической эффективности проектируемых аккумулирующих сооружений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексюк А.И., Беликов В.В. Программный комплекс STREAM 2D CUDA для расчета течений, деформаций дна и переноса загрязнений в открытых потоках с использованием технологий Compute Unified Device Architecture (на графических процессорах NVIDIA). Свидетельство о гос. рег. программ для ЭВМ № 2017 660 266 от 20.09.2017.
2. Беликов В.В., Алексюк А.И. Модели мелкой воды в задачах речной гидродинамики. М.: РАН, 2020. 346 с.
3. Курганов А.М. Таблицы параметров предельной интенсивности дождя для определения расходов в системах водоотведения. Справочное пособие. М.: Стройиздат, 1984. 111 с.
4. Определение расчетных характеристик максимального за год слоя осадков различной продолжительности для г. Геленджик и г. Севастополь по данным наблюдений и моделирования. М.: Гидрометцентр России, 2022. Версия 30.03.2022. 63 с.
5. СП 32.13330.2018 Канализация. Наружные сети и сооружения. Актуализированная редакция СНиП 2.04.03-85 (с Изменениями № 1, 2).
6. Срибный М.Ф. Нормы сопротивления движению естественных водотоков и расчет отверстий больших мостов по способу бытовых морфологических характеристик. М.; Л.: Гострансиздат, 1932. 148 с.
7. Штеренлихт Д.В. Гидравлика. М.: КолосС, 2004. 655 с.

8. *Aleksyuk A.I., Belikov V.V.* Simulation of shallow water flows with shoaling areas and bottom discontinuities // *Comput. Math. Math. Phys.* 2017. V. 57. № 2. P. 318–339.
<https://doi.org/10.1134/S0965542517020026>
9. *Aleksyuk A.I., Belikov V.V.* The uniqueness of the exact solution of the Riemann problem for the shallow water equations with discontinuous bottom // *J. Computational Physics*. 2019. V. 390. P. 232–248.
<https://doi.org/10.1016/j.jcp.2019.04.001>
10. *Aleksyuk A.I., Malakhov M.A., Belikov V.V.* The exact Riemann solver for the shallow water equations with a discontinuous bottom // *J. Computational Physics*. 2022. V. 450. № 110801.
<https://doi.org/10.1016/j.jcp.2021.110801>
11. *Vasilieva E., Belikov V.* Numerical Modeling of a Hydrodynamic Accident at an Earth-and-Rockfill Dam on the Dyurso River // *Power Technol. Engineering*. 2020. V. 54. P. 326–331.
<https://doi.org/10.1007/s10749-020-01210-1>
12. *Vasil'eva E.S., Belyakova P.A., Aleksyuk A.I., Selezneva N.V., Belikov V.V.* Simulating Flash Floods in Small Rivers of the Northern Caucasus with the Use of Data of Automated Hydrometeorological Network // *Water Resour.* 2021. V. 48. P. 182–193.
<https://doi.org/10.1134/S0097807821020160>