

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ГИДРОЛОГИИ СУШИ

УДК 556.06:556.166

МОДЕЛЬ СТОКА FCM ДЛЯ МАЛЫХ РЕК С ДОЖДЕВЫМ ПИТАНИЕМ 1. КОНЦЕПЦИЯ И АЛГОРИТМЫ¹

© 2023 г. Б. И. Гарцман*

Институт водных проблем РАН, Москва, 119333 Россия

**e-mail: gartsman@inbox.ru*

Поступила в редакцию 02.10.2022 г.

После доработки 05.03.2023 г.

Принята к публикации 06.03.2023 г.

Модель паводкового цикла FCM — концептуальная воднобалансовая модель с сосредоточенными параметрами, разработанная для имитации дождевого стока в масштабе малого речного бассейна. Разработка модели FCM включает описание динамики основных составляющих общего влагозапаса бассейна и воспроизводит эффект пространственной экспансии дренажной сети за счет временных поверхностных и подповерхностных водотоков при экстраординарных паводках. Принятые концептуальные допущения модели, согласующиеся с рациональными гидрологическими соображениями, приводят к трем режимам формирования стока, называемым внутриобъемным, поверхностным и “прорывным”. Представлено детальное изложение концепции и алгоритмов FCM.

Ключевые слова: дождевые паводки, гидрологическое моделирование, малые бассейны, дренажная сеть, нелинейность процессов стокоформирования.

DOI: 10.31857/S0321059623040089, **EDN:** QKNCYW

ВВЕДЕНИЕ

Моделирование дождевых паводков — традиционной задачей гидрологии суши, решение которой необходимо для прогнозирования наводнений, инженерных расчетов паводка и оценки последствий климатических изменений. По литературным данным, сейчас разработаны уже сотни моделей речного стока [7, 8, 14, 21], сложность которых варьирует от простых емкостных до пространственно-распределенных физически обоснованных моделей. Сложные модели полнее и детальнее описывают гидрологические процессы, но более простые модели обычно более надежны [19]. Кроме того, поскольку оптимальные допущения для описания механизмов стокоформирования в различных природных условиях еще не определены, чрезвычайное их разнообразие требует учета цели и задач моделирования для разработки его стратегии [9].

Компромисс сложности и надежности представляют концептуальные модели, описывающие основные механизмы формирования и концентрации стока в масштабе водосбора на основе данных стандартных гидрометеорологических наблюдений суточного разрешения. Их исполь-

зование ограничено требованием однородности метеорологических воздействий и поверхности водосбора, без чего осреднение входных данных и оценивание эффективных параметров не будут адекватны; т. е. концептуальные модели применимы лишь к “малым” речным бассейнам, характерные размеры которых определяются в зависимости от особенностей модели и решаемой задачи.

Представляемая здесь концептуальная модель паводкового цикла FCM (Flood Cycle Model) специально предназначена для описания высоких и очень высоких дождевых паводков в масштабе малого бассейна с учетом типичного набора данных стационарных наблюдений с суточным шагом. Инновационный подход к разработке модели обусловлен оспариванием некоторых широко принятых представлений. Традиционно считаются физически обоснованными лишь модели, основанные на решении систем уравнений гидродинамики в частных производных на пространственных сетках. Всякое упрощение структуры и алгоритмов моделирования воспринимается как вынужденный переход к концептуальному, т. е. полуэмпирическому, моделированию [4]. Между тем современный опыт гидрологического моделирования показывает наибольшие успехи в применениях именно моделей, в значительной степени “концептуализированных” [5]. При этом

¹ Работа выполнена в рамках государственного задания ИВП РАН (тема FMWZ-2022-0001, государственная регистрация № 122041100222-7).

создание “идеальной” физической, и при этом работоспособной, модели стока представляется пока недостижимым.

Данная разработка основана на системных представлениях о различных уровнях организации физического мира, на которых существуют специфические объекты-системы и собственные закономерности их движения, развития и взаимодействия. Малый речной бассейн как система фиксирует определенный уровень пространственно-временной и функциональной организации процессов приземного влагооборота на суше, описываемый совокупностью интегральных закономерностей, режимов и параметров [3, 6]. “Физичность” модели определяется не типом используемого математического аппарата, а корректным применением физического метода исследования. Если обсуждаемые объекты четко определены, закономерности доступны регулярному наблюдению, режимы идентифицируются количественными критериями, а параметры могут быть измерены в правильно поставленном эксперименте, то все это, несомненно, “настоящая” физика.

В данной статье впервые дается систематическое и развернутое изложение концепции и алгоритмов FCM, уже представленной в ряде предшествующих публикаций [2, 3]. Еще одна статья данного выпуска посвящена параметризации и верификации FCM с использованием разнообразных данных наблюдений на малых бассейнах. Такое изложение модели, разработка которой начата еще до 1990 г., связано с ее переосмыслением в свете современных представлений о взаимодействиях между различными механизмами формирования стока в точечном и склоновом масштабах, формирующих нелинейность реакции и пороговые эффекты в масштабе бассейна [9–11, 13, 15, 16, 18, 20, 22]. Ключевым моментом дискуссии является роль динамики дренажной системы, в особенности “предпочтительных путей потоков” (“preferential flow paths”), в формировании наиболее ярких проявлений нелинейности реакции бассейна, объясняемых на основе концепции “связности” (“connectivity”).

Авторский подход в основных чертах очень близок к предложенному Д. Кирхнером [11], включающему в себя следующее: представление бассейна в виде “серого ящика”; приоритетность нелинейных свойств гидрологических систем; использование физически обоснованных управляющих уравнений в масштабе водосбора; минимальную параметризацию и углубленное тестирование моделей с учетом ограничений имеющихся данных. При разработке модели FCM был сформулирован специфический набор терминов, аналогичных используемым в гидрофизике почв, но применяемых в масштабе бассейна, с ясным

пониманием возникающих при этом смысловых нюансов.

КОНЦЕПЦИЯ FCM

Модель FCM отображает взаимную динамику отдельных частей полного бассейнового влагозапаса S в теплый период в рамках так называемого “паводкового цикла”, включающего предшествующий паводковому событию бездождный период, выпадение ливневых осадков и вызванный ими паводок. Первая ключевая гипотеза — существование критического расхода Q_{cr} , отвечающего насыщению бассейновой емкости. Это пороговое значение расхода в замыкающем створе Q , разделяющее два типа бассейнового отклика на паводкообразующие осадки. При $Q < Q_{cr}$ существует некоторая свободная емкость бассейна ΔS и для вновь поступающих осадков текущее значение коэффициента стока k_{PQ} значительно меньше единицы. Превышение критического расхода ($Q \geq Q_{cr}$) означает, что $\Delta S = 0$ — достижение бассейном состояния полной влагоемкости, аналогичного подобному состоянию почвы. При этом каждая порция вновь поступающих осадков стекает без потерь, $k_{PQ} = 1$. Гипотетическое предположение о связи состояния полного насыщения бассейна с определенной постоянной величиной расхода эффективно для анализа динамики стокоформирования и разработки модели.

Диаграмма бассейновой емкости

Существование Q_{cr} позволяет получить детализированную информацию о структуре и динамике бассейнового влагозапаса на основе стандартных данных об осадках и стоке путем построения так называемой “диаграммы бассейновой емкости”. Выберем на гидрографе два последовательных дождевых паводка в течение одного теплого периода, для которых $Q_{max} > Q_{cr}$, и отметим два момента времени t_1 и t_2 на кривых спада паводков, когда $Q = Q_{cr}$ (рис. 1а). Поскольку $\Delta S = 0$ для обоих моментов, получаем возможность записать простейшее балансовое уравнение для периода (t_1, t_2) , который и обозначим как “паводковый цикл”

$$P = Q + ET. \quad (1)$$

Выбрав некоторый момент времени t_3 между t_1 и t_2 (рис. 1а), запишем еще два уравнения для частных периодов (t_1, t_3) и (t_3, t_2) :

$$P_1 + \Delta S = Q_1 + ET_1, \quad (2)$$

$$ET_2 + \Delta S = P_2 - Q_2. \quad (3)$$

В уравнениях (1)–(3) P , P_1 , P_2 — суммы осадков за общий и частные периоды (знаки суммы везде опускаем для упрощения); Q , Q_1 , Q_2 — суммы сто-

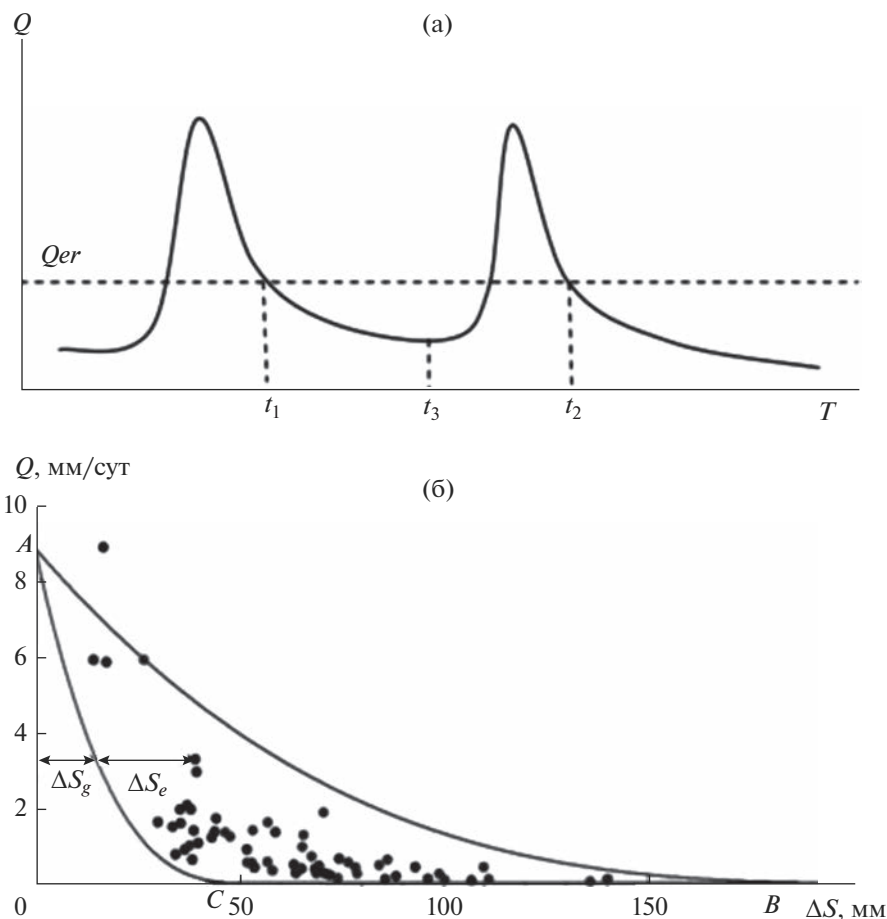


Рис. 1. Схема паводкового цикла (а) и пример диаграммы бассейновой емкости (б), построенной по данным бассейна Комаровка–Садовый, 395 км², 1958–1987. Q – расход воды; T – время; ΔS – свободная бассейновая емкость; ΔS_g и ΔS_e – соответственно гравитационная и негравитационная составляющие ΔS ; точка A отвечает Q_{cr} при $\Delta S = 0$; точки B и C отвечают максимально возможным значениям ΔS и ΔS_g соответственно, при $Q = 0$.

ка; ET , ET_1 , ET_2 – суммы эвапотранспирации; ΔS – величина свободной емкости бассейна в момент t_3 . Уравнение (3) позволяет рассматривать любой дождевой паводок с $Q_{max} > Q_{cr}$ как измерение величины ΔS – величина ET_2 в период (t_3, t_2) пренебрежимо мала, если момент t_3 совпадает с минимальным предпаводковым расходом. Используя такие измерения за длительный период, получаем возможность построить зависимость $Q = f(\Delta S)$, пример приведен на рис. 1б.

В поле диаграммы точка A соответствует критическому расходу, когда $\Delta S = 0$. Ожидаемо видим в общем обратную зависимость $Q = f(\Delta S)$, при этом форма поля точек хотя и размыта, но позволяет достаточно уверенно провести верхнюю и нижнюю огибающие. Верхняя огибающая AB представляет максимальные возможные значения ΔS в зависимости от Q , в то время как нижняя огибающая AC – минимальные. Это означает существование как минимум двух основных частей бассейновой емкости.

Первую из них назовем связанной гравитационной бассейновой емкостью, поскольку объем ее влагозапаса S_g находится в функциональной взаимно-однозначной связи с величиной Q . Физически это означает наличие непрерывных гидравлических связей (линий тока) во всем объеме гравитационного влагозапаса, сходящихся к замыкающему створу, т. е. эта часть бассейновой влаги – стокоформирующая, “запас стока”. До достижения бассейном состояния полного насыщения при $Q < Q_{cr}$ свободная гравитационная емкость ΔS_g представляет собой детерминированную часть общей свободной емкости ΔS , описываемую нижней огибающей поля точек (рис. 1б).

Вторая часть бассейновой емкости представляет собой негравитационную бассейновую емкость, ее влагозапас S_e состоит из различных форм капиллярной почвенной влаги. Свободная негравитационная емкость ΔS_e представляет переменную часть ΔS , варьирующую при заданном $Q < Q_{cr}$ от некоторого максимального значения до

нуля (рис. 1б) — в этом последнем случае негравитационная емкость находится в состоянии насыщения, а $\Delta S = \Delta S_g$. Таким образом, ΔS_g определяет минимальную, гарантированную при заданном $Q < Q_{cr}$ величину начальных потерь осадков при паводке, которые являются возвратными — в дальнейшем эта влага расходуется на сток. Значение ΔS_g определяет потери стока за паводок, так как негравитационный влагозапас расходуется на эвапотранспирацию.

Необходимо подчеркнуть, что связанным гравитационным влагозапасом S_g называем полный объем влаги в бассейне, который в каждый текущий момент времени движется под воздействием силы тяжести и гидравлически связан непрерывными линиями тока до замыкающего створа. Поэтому величина S_g функционально связана с Q , т. е. измерение расхода одновременно является измерением S_g . Связанный гравитационный влагозапас включает в себя русловой и грунтовый влагозапасы.

Аналогично вышесказанному, русловой влагозапас S_{gc} определяется как объем влаги, содержащийся в данный момент в дренажной системе, движение влаги в которой аналогично свободным потокам — преимущественно турбулентное, в соответствии с законом Шези. Грунтовый влагозапас S_{go} определяется как объем влаги в системе грунтовых водоносных горизонтов, движение влаги в ней в виде фильтрации — преимущественно ламинарное, в соответствии с законом Дарси. Оба этих влагозапаса являются “связанными” в определенном выше смысле. Понятие “связанности”, введенное при разработке концепции FCM как одна из ключевых инноваций, практически совпадает с понятием “connectivity”, активно дискутируемым в зарубежной литературе последних десятилетий [16].

“Связанность” изменяет представления об условных бассейновых емкостях — составляющих концептуальных “емкостных” моделей стока. Традиционный подход описывает природные емкости, вмещающие различные типы водных масс, подобно искусственным емкостям, обладающим границами, хотя и сложными и труднонаблюдаемыми, но фиксированными. Признание “связанности” некоторых частей бассейновой емкости означает признание подвижности их границ, поскольку “связанность” появляется и исчезает динамически в зависимости от увлажнения. Тогда пополнение влагозапаса определенной емкости может происходить кроме притока еще и в виде “захвата” влаги за счет расширения границ емкости, а расходование — в виде “отрыва” влаги при сокращении границ. Такие механизмы существенно усложняют динамические характеристики системы и являются вероятной причиной наи-

более ярких проявлений нелинейности процессов формирования высоких паводков.

Эпизодически существует еще один компонент бассейнового влагозапаса — S_u , содержащий гравитационную влагу, однако не являющийся “связанным” в определенном выше смысле. Он включает множество микрообъемов свободной влаги в виде луж, локальных переувлажненных почвенных горизонтов и обводненных макропор, локализованных большей частью на поверхности водосбора или на небольшой глубине. В бытовом состоянии бассейна, при $Q < Q_{cr}$, эти микрообъемы изолированы, их влагозапас расходуется на инфильтрацию в ненасыщенную почву, частично питая грунтовые воды, а частично переходя в капиллярную форму с дальнейшим испарением. Для обозначения влагозапаса S_u наиболее подходит термин “верховодка”, поэтому в дальнейшем будем говорить о влагозапасе и емкости верховодки. В то же время будем кратко называть гравитационный, русловой и грунтовый влагозапасы, а также соответствующие емкости, без указания на их “связанность”.

Гипотеза о критическом расходе прямо влечет за собой существование характерных значений бассейнового влагозапаса. Во-первых, при условии $Q = Q_{cr}$ и $\Delta S = 0$ это полная влагоемкость бассейна (“total moisture capacity” (TMC)). Как видно на диаграмме бассейновой емкости (рис. 1б), величина TMC равна отрезку $|OB|$, т. е. предельной величине ΔS при $Q = 0$. Аналогично определяется характерное значение гравитационного влагозапаса бассейна — гравитационная критическая влагоемкость (“gravitational critical capacity” (GCC), $GCC = |OC|$), а также характерное значение негравитационного (почвенного) влагозапаса, для которого используем известный термин “полевая влагоемкость” (“field moisture capacity” (FMC), $FMC = |CB|$).

Предлагаемые выше термины целенаправленно вводятся по аналогии со сходными терминами гидрофизики почв: TMC аналогичен полной влагоемкости (ПВ) или полной пористости, FMC — полевой или наименьшей влагоемкости (НВ), GCC ($GCC = TMC - FMC$) — содержанию свободной влаги или свободной пористости. Но параметры водосбора отличаются от аналогичных параметров почвы, по крайней мере включением дополнительных компонентов — например, руслового влагозапаса. С более широкой точки зрения аналогичные термины, применяемые в разных пространственно-временных масштабах, не идентичны по смыслу. Взаимоотношения между сосредоточенными параметрами модели масштаба водосбора и их аналогами масштаба почвенного профиля должны быть предметом специальной разработки. Опираясь на ту же аналогию,

введем понятие коэффициента свободной пористости бассейна k_{bp}

$$k_{bp} = \frac{GCC}{TMC} = \frac{TMC - FMC}{TMC}. \quad (4)$$

Параметр FMC характеризует максимально возможный негравитационный влагозапас бассейна. Напротив, гравитационный влагозапас может возрастать неограниченно за счет переполнения и пространственного развития дренажной сети бассейна в периоды интенсивного переувлажнения. Таким образом, GCC является верхней пороговой величиной гравитационного влагозапаса, при котором дренажная сеть бассейна еще сохраняет свое бытовое состояние в виде сети постоянных водотоков. TMC аналогично — верхняя пороговая величина полного влагозапаса. При превышении указанных пороговых величин происходит изменение характера реагирования бассейна на выпадение осадков, т. е. смена режима формирования стока. Различия режимов формирования стока — вторая ключевая идея концепции FCM.

Режимы формирования стока

Концепция FCM предполагает три различных режима формирования стока, называемых далее внутриобъемным, поверхностным и “прорывным” (рис. 2). Под режимами подразумеваются различные типы целостного динамического отклика бассейна на осадки, располагаемые на основе доступных данных стандартного мониторинга. Каждый режим обусловлен особым комплексом процессов стокоформирования, реализующихся в масштабах отдельных площадок и склонов [18], которые, однако, не могут быть разделены и описаны на основе доступных стандартных данных.

Внутриобъемный режим (рис. 2а). Пока $Q < Q_{cr}$ и $S < TMC$, а также и $S_e < FMC$, на водосборе преобладают обычные механизмы формирования подповерхностного склонового стока, не связанные с переувлажнением бассейна. Речная сеть остается стабильной, и вариации русловых влагозапасов происходят в пределах ее границ, условно — в пределах бровок русел постоянной речной сети. Определенными стабильными рамками при этом ограничены и колебания объемов грунтовых вод. Верховодка представлена ограниченным числом поверхностных микрообъемов влаги и обводненных макропор, гидравлические связи между которыми отсутствуют. Приток в гравитационную емкость бассейна формируется исключительно за счет обычных процессов склонового стокоформирования и обозначается как F_r . Внутриобъемный режим стокоформирования соответствует так называемому бытовому состоянию реки, охватывающему и часто наблюдаемые невысокие паводки.

Поверхностный режим (рис. 2б). Когда влагозапас бассейна превышает TMC , т. е. $Q > Q_{cr}$, дополнительные порции осадков накапливаются вблизи поверхности и дренажная сеть бассейна интенсивно разрастается вверх по склонам. При этом преобладают механизмы формирования поверхностного и быстрого подповерхностного стока, а мощность временной дренажной сети очень динамична, что ведет к выраженной нелинейности бассейнового отклика. Нарастающие до этого момента по численности и размерам микрообъемы влаги, составляющие влагозапас верховодки, связываются временной сетью потоков и присоединяются к гравитационному влагозапасу. Обычный приток в гравитационную емкость F_r дополняется механизмом “захвата” влагозапаса при разрастании дренажной сети, который обеспечивает так называемый “присоединенный” приток F_c . Таким образом, поверхностный режим стокоформирования отвечает формированию высоких и очень высоких паводков, что в среднем наблюдается от нескольких раз в год до одного раза в несколько лет — в зависимости от региона.

Описываемая динамика дренажной сети по смыслу близка к известной концепции переменной области питания (например, [9], с. 445). Однако в настоящей работе процесс распространения дренажной системы по поверхностным и подповерхностным временным путям стекания рассматривается как всеобъемлющий, но при этом почти ненаблюдаемый — на основе стандартных данных возможно лишь контролировать результирующие эффекты в масштабе бассейна. При этом временная дренажная сеть не только присоединяет влагозапас верховодки, но и интенсивно пронизывает весь гравитационный влагозапас, мобилизуя его и контролируя его динамику. Скорость склонового добега значительно возрастает, а дистанция до поступления влаги в ближайший элемент дренажной сети в разы уменьшается, что многократно сокращает время бассейновой концентрации стока.

Отметим, что временная дренажная сеть нестабильна и требует наличия достаточного внешнего притока. При прекращении или недостаточности притока временная сеть быстро разрушается, а запас влаги из нее теряет мобильность, переходя из руслового в грунтовый влагозапас либо во влагозапас верховодки. Таким образом, приток F_c может иметь как положительную, так и отрицательную величину.

“Прорывной” режим стокоформирования (рис. 2в) пока представляет собой гипотетическое представление о процессах формирования стока при экстремальном переувлажнении бассейна. Когда развитие дренажной сети достигает возможного предела и почвенный покров перенасыщен влагой, влагозапас верховодки достига-

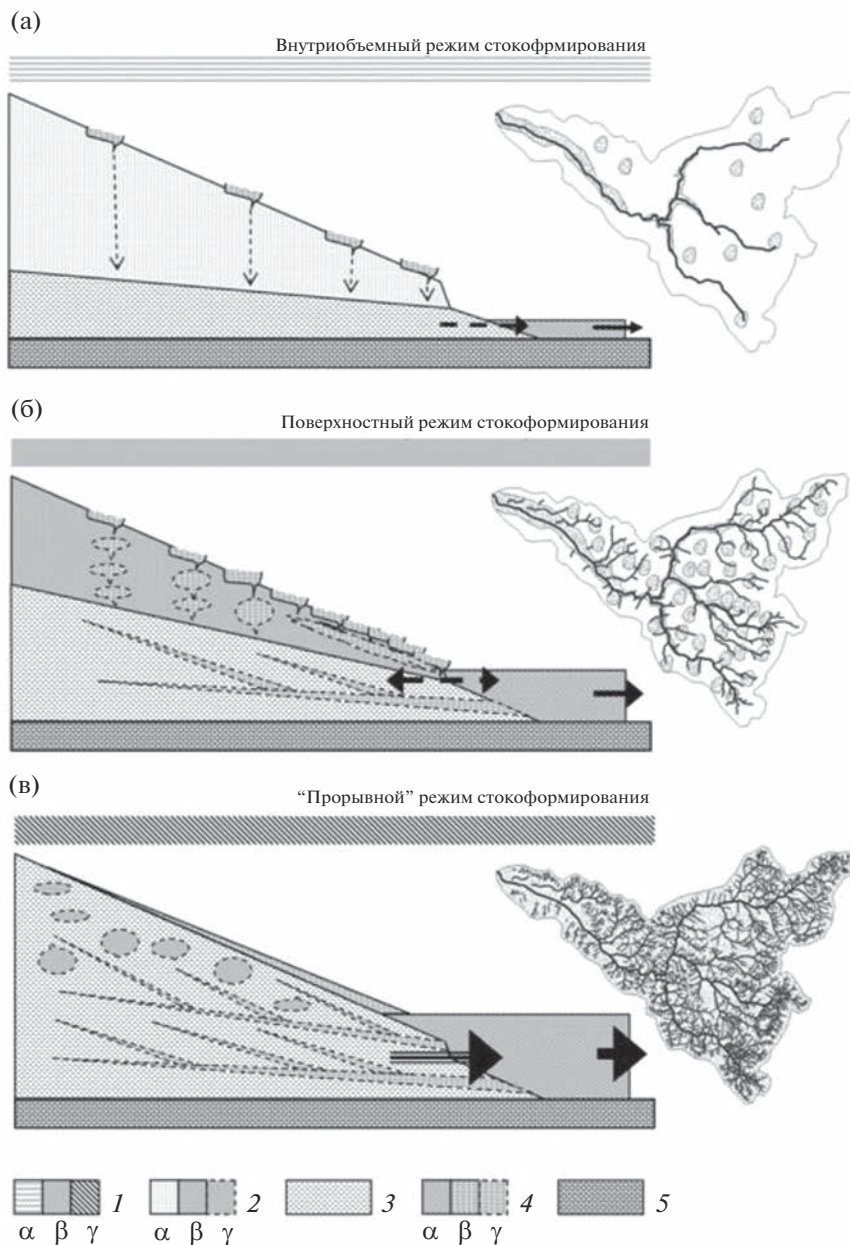


Рис. 2. Схематическое представление режимов стокоформирования в разрезе склона и на поверхности водосбора: а – внутриобъемный; б – поверхностный; в – “прорывной”. 1 – интенсивность осадков: умеренная (α), высокая (β), экстраординарная (γ); 2 – негравитационная (капиллярная) емкость в состоянии: бытовом (α), насыщенном (β), переувлажненном (γ); 3 – грунтовая емкость; 4 – русловая емкость в форме: постоянных русел (α), поверхностных микророводоемов и потоков (β), подповерхностных макропор и потоков (γ); 5 – подстилающий водоупор.

ет экстремальных значений и полностью включается в гравитационный влагозапас, а время бассейновой концентрации стока становится предельно малым. Большая часть поверхности бассейна при этом покрыта слоем или пленкой свободной влаги, что должно приводить к массовому затоплению капилляров и исчезновению капиллярных сил, удерживающих почвенную влагу. Запас капиллярной влаги приобретает мобильность и

очень быстро присоединяется к гравитационному влагозапасу; соответственно, расход стремительно возрастает. Вследствие экстремально интенсивного сброса влагозапас бассейна резко снижается, при этом капиллярные силы восстанавливаются и фиксируют почвенную влагу – происходит резкое падение расхода.

Бассейн в этом состоянии демонстрирует сильно нелинейную динамику, которая выглядит

как “выстрел” или мгновенный “прорыв” расхода. По-видимому, локальные проявления подобного механизма описаны как “волнообразная мобилизация грунтовых вод” У. Брасертом ([9], с. 457): “...этот механизм, связанный с капиллярностью, может привести к так называемому “гребню” грунтовых вод не только в прирусловой зоне, но и по склонам, где капиллярная кайма уже находится близко к поверхности земли. ... может ли этот механизм объяснить интенсивный подповерхностный ливневой сток или нет, еще предстоит выяснить”. Описанный механизм предполагает второе пороговое значение расхода Q_{bur} и еще один тип притока к гравитационному влагозапасу — “прорывной” приток F_b . Наблюдать “прорывной” режим можно исключительно редко и с огромными трудностями, такие наблюдения почти отсутствуют. Модель FCM позволяет оценить величину Q_{bur} и предсказать существование “прорывного” режима.

ОСНОВНЫЕ ГИПОТЕЗЫ FCM

Пять базовых гипотез формируют математическую основу FCM, определяя характерные значения компонентов бассейнового влагозапаса, их независимую динамику и взаимосвязи.

1. Существует критический расход Q_{cr} , фиксирующий заполнение свободной емкости бассейна, после чего все последующие осадки стекают без потерь.

2. Существуют характерные значения общего бассейнового влагозапаса и его составляющих (негравитационного, гравитационного, грунтового и руслового влагозапасов), которые достигаются при $Q = Q_{\text{cr}}$.

3. Расход в замыкающем створе находится в функциональной зависимости от величины гравитационного влагозапаса, а также и от величины руслового влагозапаса.

Это положение следует из “связанности” гравитационного влагозапаса и его составляющих — руслового и грунтового влагозапасов. Оно является конкретной формулировкой принципа квазиравновесности, что означает достаточно медленные изменения моделируемой системы, сохраняющей близкое к равновесию состояние. В таком случае выходной сигнал информативен по отношению к текущему состоянию системы и ее компонент. Формулировка гипотезы подразумевает временной шаг моделирования большим или равным времени концентрации стока в бассейне. При суточном шаге это означает целесообразность применения FCM для бассейнов размером от 10 до 1000 км².

4. Независимая динамика каждого стокоформирующего компонента бассейнового влагозапа-

са выражается степенным соотношением расхода и влагозапаса типа $Q = kS^n$.

Степенной тип зависимостей широко применяется в науках о Земле. Зависимости этого типа описывают автомодельные природные явления [1], в частности — отражают самоподобие (фрактальность) речных систем [17, 23]. Общий вид связи $Q = kS^n$ позволяет одни компоненты бассейнового влагозапаса описывать постоянным расходом ($n = 0$), другие — как линейные резервуары ($n = 1$), а также как нелинейные резервуары ($n > 1$). Для простоты и верифицируемости модели предпочтительны целочисленные и как можно меньшие значения n . В концептуальных моделях постоянным расходом часто описывается водообмен с глубокими подземными горизонтами, модель линейного резервуара широко используется для представления влагозапасов в русловой сети. Однако гравитационный влагозапас, как видно на рис. 1б, имеет явно нелинейную динамику.

5. При $Q = Q_{\text{cr}}$ и отсутствии осадков динамика руслового и гравитационного влагозапасов идентична в смысле равенства их первых и вторых производных.

Последнее положение связано с особенностями порогового состояния бассейна. При $Q < Q_{\text{cr}}$ русловой влагозапас является переменной частью гравитационного. Динамика гравитационного влагозапаса является определяющей и выражается в изменениях расхода. При $Q > Q_{\text{cr}}$ русловой влагозапас становится доминирующей частью гравитационного запаса, определяющей динамику последнего и изменения расхода. Пороговое состояние — момент, когда гравитационный и русловой влагозапасы образуют единое целое, их динамика идентична. Математически это выражается равенством первой и второй производных функций, описывающих динамику гравитационного и руслового влагозапасов, в пороговой точке. Другими словами, независимые кривые истощения руслового и гравитационного влагозапасов должны иметь одинаковый наклон касательной при $Q = Q_{\text{cr}}$.

СТРУКТУРА И АЛГОРИТМЫ FCM

Блок-схема FCM представлена на рис. 3. Изначально осадки, поступающие на поверхность водосбора, разделяются на две части. Стокоформирующая часть осадков попадает в емкость верховодки, откуда поступает в гравитационную емкость и трансформируется в последующем в расход в замыкающем створе. Остальная часть осадков (потери) пополняют негравитационную емкость и расходуются в дальнейшем на эвапотранспирацию, за исключением некоторых редко складывающихся условий.

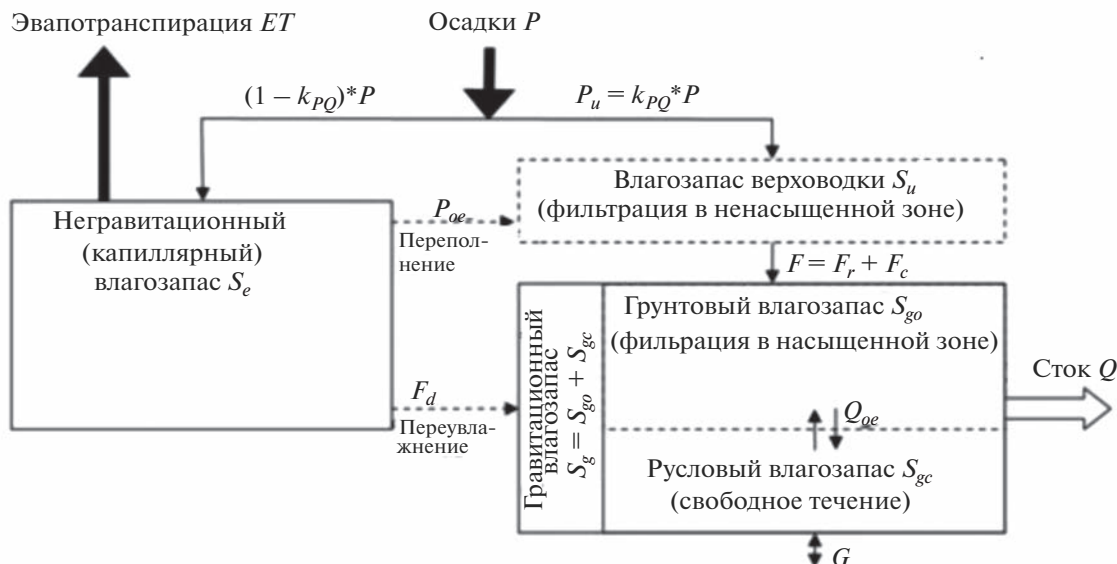


Рис. 3. Блок-схема модели паводкового цикла FCM.

Стокоформирующие осадки

Доля стокоформирующих осадков определяется через коэффициент k_{PQ} , величина которого изменяется от незначительной при иссушенном бассейне до единицы при состоянии насыщения (ТМС). Для вывода зависимости $k_{PQ} \sim Q$ предложена степенная зависимость между относительными величинами (долями) свободных негравитационной и гравитационной емкостей в форме

$$R_{de} = aR_{dg}^m + b, \quad (5)$$

где a , b и m – параметры, R_{de} – доля свободной негравитационной емкости,

$$R_{de} = \frac{\Delta S_e}{FMC} = \frac{FMC - S_e}{FMC}, \quad (6)$$

R_{dg} – доля свободной гравитационной емкости,

$$R_{dg} = \frac{\Delta S_g}{GCC} = \frac{GCC - S_g}{GCC}. \quad (7)$$

Полагая, что соотношение (5) непрерывно выполняется, вычислим текущее значение k_{PQ}

$$k_{PQ} = \frac{P_u}{P} = \frac{dS_g}{dS} = \frac{dS_g}{dS_g + dS_e}. \quad (8)$$

Дифференцируя уравнение (5), получаем

$$dR_{de} = maR_{dg}^{m-1} dR_{dg}. \quad (9)$$

Подстановка уравнений (6) и (7) в уравнение (9) дает

$$\begin{aligned} d\left(\frac{FMC - S_e}{FMC}\right) &= \\ &= ma\left(\frac{GCC - S_g}{GCC}\right)^{m-1} d\left(\frac{GCC - S_g}{GCC}\right) = \\ &= -\frac{ma}{GCC^m} (GCC - S_g)^{m-1} dS_g. \end{aligned} \quad (10)$$

После упрощений

$$dS_e = \frac{ma}{GCC^m} (GCC - S_g)^{m-1} FMC dS_g. \quad (11)$$

Подставляя уравнение (11) в уравнение (8), получаем после преобразований

$$k_{PQ} = \begin{cases} 1, & Q \geq Q_{cr} \\ \frac{GCC^m}{ma(GCC - S_g)^{m-1} FMC + GCC^m}, & Q < Q_{cr}. \end{cases} \quad (12)$$

Полученная зависимость $k_{PQ} = f(S_g)$ имеет характерный S-образный вид, изменяясь от нескольких сотых при $S_g = 0$ до единицы при достижении состояния насыщения бассейна. Поскольку S_g функционально связан с Q , такая форма зависимости позволяет вычислять k_{PQ} на каждом шаге моделирования.

Негравитационный влагозапас

Баланс негравитационного влагозапаса S_e записывается следующим образом

$$\frac{dS_e}{dt} = (1 - k_{PQ})P - ET - P_{oe} - F_b, \quad (13)$$

где t — время; P_{oe} — избыточные осадки, которые при переполнении негравитационной емкости ($S_e > FMC \Leftrightarrow Q > Q_{cr}$) пополняют влагозапас верховодки, т. е.

$$P_{oe} = \begin{cases} S_e - FMC, & Q \geq Q_{cr} \\ 0, & Q < Q_{cr}, \end{cases} \quad (14)$$

F_b — “прорывной” приток, возникающий исключительно редко при экстремальном переувлажнении за счет мобилизации капиллярного почвенного влагозапаса.

Влагозапас верховодки

Влагозапас верховодки S_u описывается моделью единичной линейной емкости с постоянным показателем истощения. Его баланс представлен следующим образом

$$\frac{dS_u}{dt} = P_u + P_{oe} - F_r - F_c, \quad (15)$$

где P_u — стокоформирующие осадки; F_r — приток, отражающий обычный механизм стокоформирования на склонах, $F_r = k_u S_u$, причем k_u — коэффициент истощения верховодки; F_c — “присоединенный” приток, возникающий иногда в условиях переувлажнения, при $Q > Q_{cr}$.

Гравитационный влагозапас

Гравитационный влагозапас — наиболее сложная часть FCM, обеспечивающая сильную нелинейность ее отклика на осадки. Обобщая все сформулированные выше допущения, динамика гравитационного влагозапаса S_g , включающего в себя русловую S_{gc} , представим совокупностью уравнений

$$\begin{cases} \frac{dS_{gc}}{dt} = -k_{gc} S_{gc} + Q_{gc} \\ \frac{dS_g}{dt} = -k_g S_g^3 + F + G. \end{cases} \quad (16)$$

В первом уравнении приходный член Q_{gc} обозначает приток в русловую влагозапас из грунтового. Во втором уравнении два приходных члена описывают внешний влагообмен гравитационного влагозапаса: F представляет собой суммарный приток всех видов, описанных выше ($F = F_r + F_c + F_b$), G описывает водообмен с глубокими подземными горизонтами. Величина G предполагается пренебрежительно малой по сравнению с паводковыми расходами, она задается постоянной и при выводе последующих уравнений не учитывается.

В обоих уравнениях (16) расходный член — расход в замыкающем створе Q , который, согласно базовым гипотезам 3 и 4, связан степенными зависимостями с величинами руслового и грави-

тационного влагозапасов. В первом из уравнений (16) использована линейная зависимость, а во втором кубическая

$$\begin{cases} Q = k_{gc} S_{gc} \\ Q = k_g S_g^3. \end{cases} \quad (17)$$

При этом коэффициенты k_{gc} и k_g — константы, а выбор показателя степени $n = 3$ для S_g обусловлен наилучшим соответствием данным наблюдений.

На основе уравнений (16) для случая свободного истощения влагозапасов, т. е. при нулевых значениях всех приходных членов, можем записать первые и вторые производные S_{gc} и S_g в виде

$$\begin{cases} \frac{dS_{gc}}{dt} = -k_{gc} S_{gc}, & \frac{d^2 S_{gc}}{dt^2} = -k_{gc} S'_{gc} \\ \frac{dS_g}{dt} = -k_g S_g^3, & \frac{d^2 S_g}{dt^2} = -3k_g S_g^2 S'_g. \end{cases} \quad (18)$$

В силу гипотезы 5 о равенстве первых и вторых производных S_{gc} и S_g при $Q = Q_{cr}$ и с учетом уравнений (17) получаем выражение связи для коэффициентов уравнений (16)

$$\begin{aligned} \frac{S''_{gc}}{S'_{gc}} = \frac{S''_g}{S'_g} &\Rightarrow k_g = \frac{k_{gc}}{3S_g^2} \Rightarrow k_g = \\ &= \frac{k_{gc} k_g^{2/3}}{3Q_{cr}^{2/3}} \Rightarrow k_g = \frac{k_{gc}^3}{27Q_{cr}^2}. \end{aligned} \quad (19)$$

Для аналитического решения уравнений (16) необходимо наложение дополнительных ограничений. Во-первых, найдем выражение для кривой истощения гравитационного влагозапаса при отсутствии внешнего притока ($F = 0$). Второе из уравнений (16) дает

$$\begin{aligned} \frac{dS_g}{dt} &= -k_g S_g^3 \Rightarrow S_g^{-3} dS_g = \\ &= -k_g dt \Rightarrow -\frac{1}{2} S_g^{-2} = -k_g t + \theta^* \Rightarrow S_g^{-2} = 2k_g t + \theta. \end{aligned} \quad (20)$$

Постоянная $\theta = S_{0g}^{-2}$ при $t = 0$, S_{0g} — начальная величина гравитационного влагозапаса. В итоге получаем

$$S_g = \left(2k_g t + \frac{1}{S_{0g}^2} \right)^{-1/2}. \quad (21)$$

Подставляя уравнения (17)–(19) и (21) в уравнения (16), получаем решение в виде динамики переменных в процессе истощения гравитационного влагозапаса

$$S_{gc} = \frac{k_g}{k_{gc}} \left(2k_g t + \frac{1}{S_{0g}^2} \right)^{-3/2}, \quad (22)$$

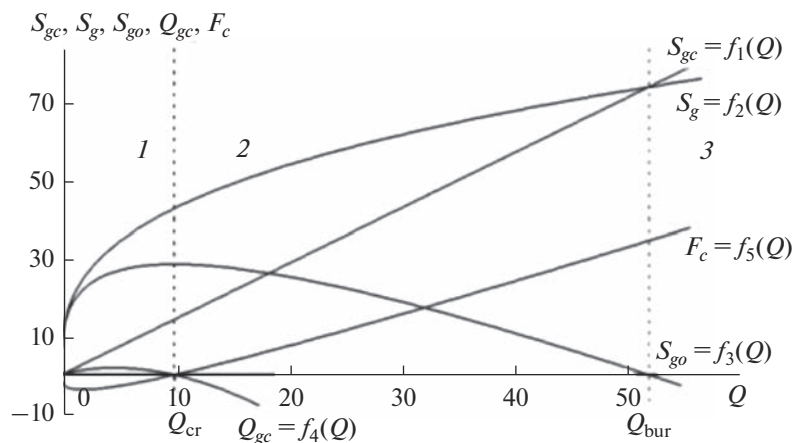


Рис. 4. Зависимости компонент S_{gc} , S_g , S_{go} (мм) и потоков Q_{gc} , F_c (мм/сут) гравитационного бассейнового влагозапаса от расхода в замыкающем створе Q (мм/сут) на примере бассейна Комаровка—Центральный, 157 км². Интервалы расходов соответствуют режимам формирования стока: 1 — внутриобъемному; 2 — поверхностному; 3 — “прорывному”.

$$Q = k_g \left(2k_g t + \frac{1}{S_{0g}^2} \right)^{-3/2}, \quad (23)$$

$$Q_{gc} = k_g \left(2k_g t + \frac{1}{S_{0g}^2} \right)^{-3/2} - \frac{3k_g^2}{k_{gs}} \left(2k_g t + \frac{1}{S_{0g}^2} \right)^{-5/2}, \quad (24)$$

$$S_{go} = S_g - S_{gc} = \left(2k_g t + \frac{1}{S_{0g}^2} \right)^{-1/2} - \frac{k_g}{k_{gc}} \left(2k_g t + \frac{1}{S_{0g}^2} \right)^{-3/2}. \quad (25)$$

В силу равенства (23) преобразуем уравнения (21), (22), (24) и (25) таким образом, чтобы Q выступал в качестве независимой переменной

$$S_{gc} = \frac{Q}{k_{gc}}, \quad (26)$$

$$S_g = \left(\frac{Q}{k_g} \right)^{1/3}, \quad (27)$$

$$S_{go} = \left(\frac{Q}{k_g} \right)^{1/3} - \frac{Q}{k_{gc}}, \quad (28)$$

$$Q_{gc} = Q - \frac{3k_g^{1/3} Q^{5/3}}{k_{gc}}. \quad (29)$$

Нанеся соответствующие кривые на диаграмму (рис. 4), получаем динамический “портрет” гравитационного бассейнового влагозапаса. Пространство диаграммы разделено на три поля двумя пороговыми расходами — Q_{cr} и Q_{bur} . При достижении первого из них функция притока в русловую емкость $Q_{gc} = f(Q)$ пересекает ось и становится от-

рицательной, при достижении второго уходит в отрицательную область функция грунтового влагозапаса $S_{go} = f(Q)$. На первый взгляд эти эффекты противоречат физическому смыслу переменных, поэтому рассмотрим детальнее их рациональную интерпретацию в рамках базовых гипотез FCM.

Как обсуждалось выше, при $Q > Q_{cr}$ распространение дренажной сети приводит к “захвату” дополнительного притока F_c . Такое состояние дренажной сети нестабильно и требует для своей поддержки избыточного питания. Недостаток питания приводит к распаду временной дренажной сети и утрате части ее связанного влагозапаса. Воднобалансовая модель интерпретирует это как отрицательный приток в русловую сеть. Очевидно, существует некоторая минимальная величина “присоединенного” притока F_c , необходимая для поддержания стабильности временной дренажной сети в достигнутом ею состоянии. Эта величина может быть получена решением уравнений (16) при наложении условия $Q_{gc} = 0$. Из первого уравнения совокупности получаем

$$\begin{aligned} \frac{dS_{gc}}{dt} &= -k_{gc} S_{gc} \Rightarrow \frac{dS_{gc}}{S_{gc}} = \\ &= -k_{gc} dt \Rightarrow \ln(S_{gc}) = -k_{gc} t + \vartheta^* \Rightarrow S_{gc} = \vartheta e^{-k_{gc} t}, \end{aligned} \quad (30)$$

здесь ϑ — константа, равная начальной величине руслового влагозапаса S_{0gc} при $t = 0$. Учитывая уравнения (17), (18), получаем из уравнений (16) следующее

$$S_{gc} = \frac{k_g}{k_{gc}} S_{0g}^3 e^{-k_{gc} t}, \quad (31)$$

$$S_g = S_{0g} e^{\frac{k_{gc} t}{3}}, \quad (32)$$

$$S_{go} = S_{0g} e^{\frac{k_{gc}t}{3}} - \frac{k_g}{k_{gc}} S_{0g}^3 e^{-k_{gc}t}, \quad (33)$$

$$Q = k_g S_{0g}^3 e^{-k_{gc}t}, \quad (34)$$

$$F_c = k_g S_{0g}^3 e^{-k_{gc}t} - \frac{k_{gc} S_{0g}}{3} e^{\frac{k_{gc}t}{3}}. \quad (35)$$

Приведем уравнения (31)–(33) и (35) к форме зависимостей от Q с использованием равенства (34) аналогично описанному выше. В результате получаем 4 уравнения, три из которых совпадают с уравнениями (26)–(28), а четвертое записывается как

$$F_c = Q - \frac{k_{gc}}{3} \left(\frac{Q}{k_g} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (36)$$

Нанеся эту зависимость на диаграмму (рис. 4), видим, что при $Q > Q_{cr}$ существует временная дренажная сеть, для поддержания которой необходима некоторая величина F_c . Этот приток может поступать из влагозапаса верховодки, если он имеется в достаточном количестве. Таким образом, в FCM имеем два возможных решения для кривой спада паводка при $Q > Q_{cr}$

$$Q = \begin{cases} k_g S_{0g}^3 e^{-k_{gc}t}, & S_u \geq F_c \\ k_g \left(2k_g t + \frac{1}{S_{0g}^2} \right)^{-3/2}, & S_u < F_c. \end{cases} \quad (37)$$

Диаграмма на рис. 4 также показывает, что доля грунтового влагозапаса в гравитационном возрастает с ростом расхода до $Q = Q_{cr}$, а затем снижается до нуля при $Q = Q_{bur}$ и далее становится отрицательной. Очевидно, физически влагозапас не может быть отрицательным, и полученный эффект является математическим следствием принятого набора модельных гипотез. Второе пороговое значение расхода Q_{bur} , как обсуждалось, фиксирует переход к экстремально переувлажненному состоянию, когда динамика системы определяется исчезновением–восстановлением капиллярных сил. Адекватного физико-математического описания гипотетического поведения системы при $Q > Q_{bur}$ дать пока невозможно, в частности из-за его исключительной редкости и труднодоступности для наблюдения. В существующей версии FCM отрицательные значения грунтового влагозапаса компенсируются поступлением “прорывного” притока F_{bur} из негравитационного влагозапаса, что отвечает быстрой мобилизации почвенной влаги при ослаблении (исчезновении) капиллярных сил. Достоинством FCM является возможность предсказать “прорывное” состояние бассейна и оценить величину

Q_{bur} . В соответствии с уравнением (28) и с учетом условия $S_{go} = 0$ при $Q = Q_{bur}$ получаем

$$Q_{bur} = 3^{3/2} Q_{cr} \approx 5.196 Q_{cr}. \quad (38)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленная модель разрабатывалась в качестве методической основы решения основных задач гидрологии суши в регионах с преобладанием дождевых паводков в режиме с использованием лишь минимального набора данных стандартных наблюдений. Несмотря на прикладные цели, разработка опирается на инновационный подход, включающий такие нетривиальные предположения, как существование критического расхода для малого бассейна и принципиальное различие механизмов формирования рядовых и экстраординарных паводков. Наиболее значительной инновацией представляется попытка показать, что разработка корректно обоснованных управляющих уравнений в масштабе водосбора является не менее физически обоснованным путем моделирования речного стока, чем традиционный путь адаптации гидродинамических уравнений в частных производных.

В данной статье подробно обсуждается концепция и излагаются алгоритмы модели. Как показано, она обладает определенной прогностической силой в фундаментальном научном смысле, т. е. оказывается способной предсказывать режимы и параметры функционирования бассейна, практически ненаблюдаемые из-за их редкости и трудности фиксации. Некоторые полученные выводы могут быть охарактеризованы даже как экзотические, требующие специальной интерпретации.

С учетом сказанного особенно важны корректность и полнота верификации модели. Обычная процедура тестирования гидрологических моделей, основанная на проверке качества воспроизведения рядов стока, должна быть дополнена специальным анализом стандартных и специальных наблюдений с целью прямого подтверждения как базовых предположений FCM, так и получаемых нетривиальных выводов. Обычные затруднения на этом пути вызывают редкость изучаемых событий, неполнота и относительно низкая точность стандартных наблюдений, почти всегда дающие возможность оспорить достоверность необычных эффектов и явлений. Кроме того, заявка на “физичность” представляемой модели стока обязательно предполагает, и об этом упоминалось выше, независимость оценок параметров, опирающихся на прямые измерения, т. е. максимальный уход от процедуры калибровки модели. Этой проблематике посвящена ч. 2 данной статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баренблатт Г.И.* Автомодельные явления — анализ размерностей и скейлинг. Долгопрудный: Изд. Дом “Интеллект”, 2009. 216 с.
2. *Гарцман Б.И.* Дождевые наводнения на реках юга Дальнего Востока: методы расчетов, прогнозов, оценок риска. Владивосток: Дальнаука, 2008. 223 с.
3. *Гарцман Б.И., Шамов В.В., Губарева Т.С. и др.* Речные системы Дальнего Востока России: четверть века исследований. Владивосток: Дальнаука, 2015. 492 с.
4. *Кучмент Л.С., Демидов В.Н., Мотовилов Ю.Г.* Формирование речного стока. Физико-математические модели. М.: Наука, 1983. 216 с.
5. *Мотовилов Ю.Г., Гельфан А.Н.* Модели формирования стока в задачах гидрологии речных бассейнов. М.: Изд-во РАН, 2018. 300 с.
6. *Шамов В.В.* Влагооборот на суше. Системно-методологический и физико-геометрический анализ. Владивосток: Дальнаука, 2006. 196 с.
7. *Beven K.J.* Rainfall-runoff Modelling: The Primer. Chichester: Wiley&Sons, 2001. 488 p.
8. *Bloeschl G.* 133 Rainfall-runoff Modelling of Ungauged Catchments // Encyclopedia of Hydrol. Sci / Ed. *M.G. Anderson, J.J. McDonnell*. New York: John Wiley, 2005. P. 2061–2080.
<https://doi.org/10.1002/0470848944.hsa140>
9. *Brutsaert W.* Hydrology: An Introduction. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005. 605 p.
10. *Clark M.P., Rupp D.E., Woods R.A., Tromp-van Meerveld H.J., Peters N.E., Freer J.E.* Consistency between hydrological models and field observations: linking processes at the hillslope scale to hydrological responses at the watershed scale // Hydrol. Proc. 2009. V. 23 (2). P. 311–319.
<https://doi.org/10.1002/hyp.7154>
11. *Kirchner J.W.* Catchments as simple dynamical systems: Catchment characterization, rainfall-runoff modeling, and doing hydrology backward // Water Resour. Res. 2009. V. 45 (2). W02429.
<https://doi.org/10.1029/2008WR006912>
12. *Kirchner J.W.* Getting the right answers for the right reasons: Linking measurements, analyses, and models to advance the science of hydrology // Water Resour. Res. 2006. V. 42 (3). W03S04.
<https://doi.org/10.1029/2005WR004362>
13. *Lehmann P., Hinz C., McGrath G., Tromp-van Meerveld H.J., McDonnell J.J.* Rainfall threshold for hillslope outflow: an emergent property of flow pathway connectivity // Hydrol. Earth Syst. Sci. 2007. V. 11. P. 1047–1063.
<https://doi.org/10.5194/hess-11-1047-2007>
14. *Mathematical models of small watershed hydrology* // Eds *V.P. Singh, D.K. Frevert*. Highlands Ranch: Water Resour. Publ., 2001. 972 p.
15. *McDonnell J.J.* A rationale for old water discharge through macropores in a steep, humid catchment // Water Resour. Res. 1990. V. 26 (11). P. 2821–2832.
<https://doi.org/10.1029/WR026i011p02821>
16. *McDonnell J.J., Sivapalan M., Vache K. et al.* Moving beyond heterogeneity and process complexity: A new vision for watershed hydrology // Water Resour. Res. 2007. V. 43 (7). W07301.
<https://doi.org/10.1029/2006WR005467>
17. *Rodriguez-Iturbe I., Rinaldo A.* Fractal River Basins: Chance and Self-organization. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997. 570 p.
18. *Schmocker-Fackel P., Naef F., Scherrer S.* Identifying runoff processes on the plot and catchment scale // Hydrol. Earth Syst. Sci. 2007. V. 11. P. 891–906.
<https://doi.org/10.5194/hess-11-891-2007>
19. *Spatial Patterns in Catchment Hydrology: Observations and Modelling* // Ed. *R.B. Grayson, G. Blöschl*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000. 423 p.
20. *Tromp-van Meerveld H.J., McDonnell J.J.* Threshold relations in subsurface stormflow: 1. A 147-storm analysis of the Panola hillslope // Water Resour. Res. 2006. V. 42. W02410.
<https://doi.org/10.1029/2004WR003778>
21. *Wagener T., Wheeler H.S., Gupta H.V.* Rainfall-runoff Modelling in gauged and ungauged catchments. London: Imperial College Press, 2004. 332 p.
22. *Weiler M., McDonnell J.J.* Conceptualizing lateral preferential flow and flow networks and simulating the effects on gauged and ungauged hillslopes // Water Resour. Res. 2007. V. 43 (3). W03403.
<https://doi.org/10.1029/2006WR004867>
23. *Wittenberg H.* Baseflow recession and recharge as non-linear storage processes // Hydrol. Proc. 1999. V. 13 (5). P. 715–726.
[https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1099-1085\(19990415\)13:5<715::AID-HYP775>3.0.CO;2-N](https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-1085(19990415)13:5<715::AID-HYP775>3.0.CO;2-N)