

DOI: <https://doi.org/10.17816/0321-4443-352576>

Оригинальное исследование



# Разработка и верификация математической модели взаимодействия колесного движителя с деформируемым грунтом, основанной на применении метода дискретных элементов

Р.Р. Пашковский, К.Б. Евсеев

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

## АННОТАЦИЯ

**Введение.** Опорная проходимость транспортных средств зависит как от типа движителя и его массогабаритных параметров, так и от физико-механических свойств грунта. Исследование взаимодействия движителя с опорным основанием на этапе научно-исследовательских работ методами математического моделирования позволяет прогнозировать показатели опорной проходимости транспортного средства. Применение метода дискретных элементов позволит сократить количество и масштаб натурных испытаний.

**Цель исследования** — разработка методики определения параметров математической модели несвязанного грунта для исследования взаимодействия движителя с опорным основанием.

**Методы и средства.** Для разработки математической модели грунта и определения тягово-сцепных характеристик используются методы имитационного математического моделирования и аналитические методы, основанные на рассмотрении стационарного движения колесного движителя.

**Результаты.** В работе предложена и верифицирована математическая модель песчаного грунта с использованием метода дискретных элементов и определены её параметры для проведения дальнейших исследований.

Разработанная математическая модель взаимодействия колесного движителя с опорным основанием базируется на применении метода дискретных элементов. В работе анализируются силовые факторы, действующие на колесный движитель при движении по несвязанному грунту, а также формируется зависимость удельной силы тяги от удельной окружной силы для различных режимов качения колеса. В результате применения метода дискретных элементов определена тягово-сцепная характеристика для колесного движителя планетохода и проведен сравнительный анализ с результатами натурных испытаний.

**Заключение.** Применение метода дискретных элементов позволит определять характеристики движителей различной конструкции при взаимодействии с деформируемым основанием и определять рациональные конструкции движителей.

**Ключевые слова:** колесный движитель; несвязанный грунт; опорная проходимость; физико-механические свойства грунта; сдвиг; связность; угол внутреннего трения; тягово-сцепная характеристика; коэффициент сопротивления движению; метод дискретных элементов.

## Как цитировать:

Пашковский Р.Р., Евсеев К.Б. Разработка и верификация математической модели взаимодействия колесного движителя с деформируемым грунтом, основанной на применении метода дискретных элементов // Тракторы и сельхозмашины. 2023. Т. 90, № 2. С. 149–160.

DOI: <https://doi.org/10.17816/0321-4443-352576>

Рукопись получена: 27.04.2023

Рукопись одобрена: 07.05.2023

Опубликована: 15.05.2023

DOI: <https://doi.org/10.17816/0321-4443-352576>

Original Study Article

# Development and verification of a mathematical model of the interaction between a wheeled propulsor and deformable soil based on the application of the discrete element method

Roman R. Pashkovsky, Kirill B. Evseev

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

## ABSTRACT

**BACKGROUND:** The vehicle cross-country performance depends both on the propulsor type and its weight-and-dimensional parameters, and on physical and mechanical properties of soil. Research of the interaction between a propulsor and deformable soil at the stage of research and development works using numerical simulation makes predicting the vehicle cross-country performance possible. The application of the discrete element method helps to reduce the number and scale of field tests.

**AIMS:** Development of the method for determining the parameters of a mathematical model of cohesionless soil to study the interaction between a propulsor with ground.

**METHODS:** The methods of simulation and mathematical modeling and analytical methods based on the consideration of the stationary motion of a wheeled propulsor are used to develop the mathematical model of soil and to determine the traction curves.

**RESULTS:** In this paper, the mathematical model of sandy soil is proposed and verified, and its parameters are determined for further research. The developed mathematical model of the interaction between a wheeled propulsor and ground is based on the application of the discrete element method. In this paper, the force factors acting at a wheel propulsor when moving on cohesionless soil are analyzed, in addition, the dependence of the specific traction force on the specific circumferential force for various wheel rolling modes is obtained. As a result of applying the discrete element method, the traction curves of a wheeled propulsor of a rover were determined and the comparative analysis based on field tests data was carried out.

**CONCLUSIONS:** The application of the discrete element method helps to determine the properties of propulsors of various designs when interacting with a deformable soil and to define reasonable designs of propulsors.

**Keywords:** *wheel propulsor; cohesionless soil; cross-country performance; physical and mechanical properties of soil; shear; cohesion; angle of internal friction; traction curve; motion resistance coefficient; discrete element method.*

## To cite this article:

Pashkovsky RR, Evseev KB. Development and verification of a mathematical model of the interaction between a wheeled propulsor and deformable soil based on the application of the discrete element method. *Tractors and Agricultural Machinery*. 2023;90(2):149–160.

DOI: <https://doi.org/10.17816/0321-4443-352576>

Received: 27.04.2023

Accepted: 07.05.2023

Published: 15.05.2023

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время существует большое количество работ, связанных с исследованием проходимости транспортных средств (ТС), которые характеризуют способность машины двигаться в ухудшенных дорожных условиях (см., например, [1–4]).

При движении по разбитым дорогам или местности возникает проблема, связанная с недостаточной опорной проходимостью, поэтому, автомобили высокой проходимости имеют определенный тип движителя. При движении по деформируемым грунтовым опорным основаниям для сохранения подвижности ТС особенно важно разработать движитель такой конструкции, который бы обеспечивал требуемый уровень проходимости.

Исследование опорной проходимости ТС на этапе проведения научно-исследовательских работ до сих пор является актуальной задачей. Единый математический аппарат для описания взаимодействия движителя с несвязанным опорным основанием отсутствует, поэтому часто приходится проводить натурные испытания для оценки опорной проходимости ТС. Данный подход является довольно ресурсоемким, вследствие чего зачастую используются различные эмпирические зависимости.

Существует множество эмпирических зависимостей, которые достаточно точно позволяют описать физико-механические свойства грунтов и их поведение при взаимодействии с движителем, однако их применение ограничено [5]. Наиболее часто для этого используют такие параметры, как связность и угол внутреннего трения, так как в процессе движения на грунт действуют как нормальные, так и сдвиговые силы. Для описания вертикальных деформаций грунта чаще всего используют модели Бернштейна, Беккера, Агейкина, а для описания сдвига – модели Кулона, Беккера, Агейкина и другие [6–8].

Альтернативным подходом к моделированию грунта является подход, основанный на представлении грунта в виде отдельных частиц. Для этого в работе применяется метод дискретных элементов.

Для разработки математической модели взаимодействия движителя с опорным основанием необходимо разработать и верифицировать математическую модель грунта. При проведении исследований в качестве несвязанного грунта выбран сухой песок, который обеспечивает хорошую повторяемость эксперимента и стабильность свойств. Для верификации математической модели используется тягово-сцепная характеристика колесного движителя  $k_{Rx}(s_0)$ , полученная в работе Ю.Л. Рождественского [9]. Полученные результаты можно использовать для разработки рациональной конструкции движителя и анализа его взаимодействия с опорным основанием.

## ЦЕЛЬ ИССЛЕДОВАНИЯ

Разработка методики определения параметров математической модели несвязанного грунта для исследования взаимодействия движителя с опорным основанием.

## МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Для разработки математической модели грунта и определения тягово-сцепных характеристик используются методы имитационного математического моделирования и аналитические методы, основанные на рассмотрении стационарного движения колесного движителя.

## РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ГРУНТА И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ОТДЕЛЬНЫХ ЧАСТИЦ

Для верификации математической модели грунта воспользуемся результатами испытаний сухого песка, которые представлены в работе Ю.Л. Рождественского [9]. Основные физико-механические свойства песка приведены в таблице 1.

**Таблица 1.** Основные физико-механические свойства песка  
**Table 1.** Basic physical and mechanical properties of sand

Параметр	Значение
Плотность грунта, кг/м <sup>3</sup>	1500
Плотность «скелета», кг/м <sup>3</sup>	2600
Угол внутреннего трения, °	33–34
Связность, кПа	0

Сопrotивление песка сдвигу в диссертации Рождественского определялось с помощью кругового штампа. Для обеспечения надежного сцепления с верхним слоем грунта опорная поверхность штампа была выполнена рифленой. Испытания проводились при следующих нормальных давлениях:  $p = 2,94$  кПа;  $3,92$  кПа;  $5,88$  кПа.

Для верификации математической модели грунта будем использовать следующую зависимость Кулона для определения максимальных касательных напряжений:

$$\tau_{\max} = p \tan \varphi_0 + c_0, \quad (1)$$

где  $p$  – нормальное давление на грунт,  $\varphi_0$  – угол внутреннего трения,  $c_0$  – связность [10].

Рассмотрим расчетную схему виртуальных испытаний грунта, представленную на рис. 1. Здесь: 1 – штамп, 2 – неподвижное основание, 3 – грунт (песок).

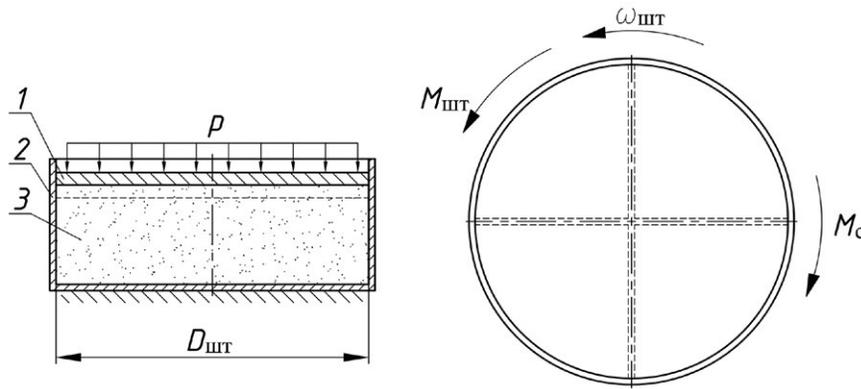


Рис. 1. Расчетная схема для испытания грунта.

Fig. 1. Analytical model of soil testing.

Для штампа можно составить дифференциальное уравнение динамики:

$$J_z \dot{\omega}_{шт} = M_{шт} - M_c, \quad (2)$$

где  $J_z$  – момент инерции штампа;  $\omega_{шт}$  – угловая скорость поворота штампа;  $M_{шт}$  – вращающий момент, прикладываемый к штампу;  $M_c$  – момент сопротивления сдвигу, который пропорционален нормальному давлению  $p$ .

Рассмотрим разработанную математическую модель грунта. В основе ее лежит математическая модель Герца-Миндлина, которая наилучшим образом подходит для описания несвязанного грунта [11]. В этой модели не учитывается влияние сил Ван-дер-Ваальса в зоне контакта частиц, поэтому связность грунта  $c_0$  при использовании этой модели меньше, чем у других. Основными параметрами модели Герца-Миндлина являются коэффициент упругого восстановления  $e$ , коэффициент трения скольжения  $\mu_s$  и коэффициент сопротивления качению  $\mu_r$ . Для описания динамики  $i$ -ой частицы используется следующая система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_{j=1}^n (\vec{F}_{cn,ij} + \vec{F}_{dn,ij} + \vec{F}_{ct,ij} + \vec{F}_{dt,ij}) + m_i \vec{g}, \\ J_i \frac{d\vec{\omega}_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \vec{T}_{ij}, \end{cases} \quad (3)$$

где  $m_i$  – масса частицы;  $\vec{v}_i$  – вектор линейной скорости частицы;  $n$  – число частиц, взаимодействующих с  $i$ -ой частицей;  $J_i$  – тензор моментов инерций частицы;  $\vec{\omega}_i$  – вектор угловой скорости частицы;  $\vec{F} = \vec{F}_{cn,ij} + \vec{F}_{dn,ij} + \vec{F}_{ct,ij} + \vec{F}_{dt,ij}$  – вектор внешней силы, действующей на  $i$ -ую частицу со стороны  $j$ -ой частицы;  $\vec{F}_{cn,ij}, \vec{F}_{dn,ij}$  – векторы упругой и демпфирующей составляющих нормальной силы;  $\vec{F}_{ct,ij}, \vec{F}_{dt,ij}$  – векторы

упругой и демпфирующей составляющих касательной силы;  $\vec{T}_{ij}$  – вектор внешнего момента, действующего на  $i$ -ую частицу.

Упругую составляющую нормальной силы находят по формуле Герца:

$$F_{cn,ij} = \frac{4}{3} E^* \sqrt{R^*} \delta_n^{3/2}, \quad (4)$$

где  $E^*$  – приведенный модуль упругости;  $R^*$  – приведенный радиус;  $\delta_n$  – глубина проникновения частиц.

Демпфирующую составляющую нормальной силы определяют по формуле:

$$F_{dn,ij} = -2 \sqrt{\frac{5}{6}} \beta \sqrt{S_n m^*} v_n^r, \quad (5)$$

где  $\beta = \frac{-\ln e}{\sqrt{(\ln e)^2 + \pi^2}}$ ;  $e$  – коэффициент упругого восстановления;  $S_n = 2E^* \sqrt{R^*} \delta_n$  – нормальная жесткость;  $m^*$  – приведенная масса;  $v_n^r$  – нормальная составляющая относительной линейной скорости двух частиц.

Упругую составляющую касательной силы определяется согласно:

$$F_{ct,ij} = -S_t \delta_t, \quad (6)$$

где  $S_t = 8G^* \sqrt{R^*} \delta_n$  – касательная жесткость;  $G^*$  – приведенный модуль сдвига;  $\delta_t$  – касательное перемещение.

Демпфирующую составляющую касательной силы вычисляют по следующей формуле:

$$F_{dt,ij} = -2 \sqrt{\frac{5}{6}} \beta \sqrt{S_t m^*} v_t^r, \quad (7)$$

где  $v_t^r$  – касательная составляющая относительной линейной скорости двух частиц.

Суммарная касательная сила ограничена величиной  $\mu_s \cdot F_n$ , где  $F_n = |\vec{F}_{cn} + \vec{F}_{dn}|$  – суммарная нормальная сила взаимодействия.

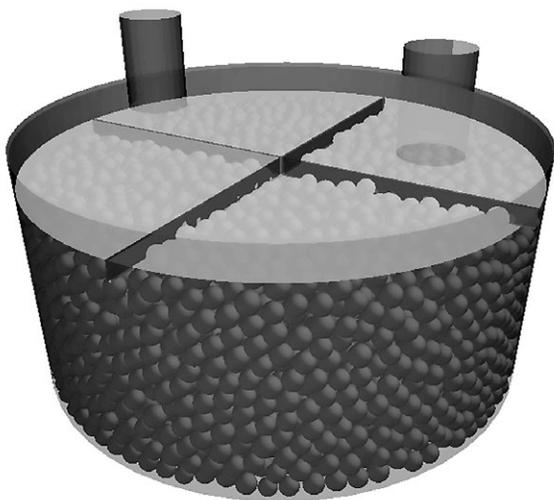
Модуль сдвига и коэффициент Пуассона частицы были выбраны в соответствии с рекомендациями [12]. Радиус частицы был принят равным  $r = 3$  мм, так как при использовании такого значения радиуса получается приемлемое время расчёта. С меньшими радиусами необходимо использовать большие вычислительные мощности. При этом, подход к определению параметров грунта в модели не изменится. Кроме этого, радиус частицы незначительно влияет на результаты моделирования [13]. Основные массогабаритные параметры используемого штампа и параметры грунта приведены в таблице 2.

**Таблица 2.** Основные параметры математической модели

**Table 2.** Main Basic parameters of a mathematical model

Параметр	Значение
Диаметр штампа, мм	165
Момент инерции штампа, кг·м <sup>2</sup>	6,086·10 <sup>-3</sup>
Плотность частицы, кг/м <sup>3</sup>	2600
Модуль сдвига частицы, МПа	10
Коэффициент Пуассона частицы	0,25
Радиус частицы, мм	3
Коэффициенты взаимодействия частицы с геометрией	$e = 0,5; \mu_s = 0,5; \mu_r = 0,2$
Материал штампа	сталь

С учетом принятого размера частиц ребра штампа смоделированы в виде четырех выступов высотой  $h = 2r = 6$  мм. На рис. 2 показан виртуальный стенд



**Рис. 2.** Виртуальный стенд.  
**Fig. 2.** A virtual test rig.

для моделирования в программном комплексе EDEM. Два вертикальных выступа, изображенные на рис. 2, использовались для визуальной оценки вращения штампа.

Согласно ГОСТ 12248.1-2020 при определении характеристик грунта сдвигающую нагрузку допускается прикладывать ступенчато, с шагом 5% от нормальной нагрузки. Испытание следует считать завершенным, если при очередном увеличении нагрузки произойдет мгновенный срез грунта или относительная деформация образца превысит 10% (в зависимости от того, что наступит раньше).

Для более точного определения параметров связности модели грунта проведено дополнительное испытание при малом значении давления, которое принимается равным  $p = 0,49$  кПа, т.е. меньше минимального значения, используемого в диссертации Рождественского Ю.Л., в 6 раз. Для верификации модели грунта будем варьировать коэффициенты взаимодействия частицы с частицей в соответствии с таблицей 3.

Для определения максимальных касательных напряжений воспользуемся следующей зависимостью:

$$\tau_{\max} = \frac{M_c}{F_{\text{шт}} \cdot R_{\text{ср шт}}}, \quad (8)$$

где  $R_{\text{ср шт}} = 41,25$  мм – средний радиус штампа;  $F_{\text{шт}} = 21400$  мм<sup>2</sup> – площадь штампа.

Результаты моделирования, полученные при различных значениях коэффициентов взаимодействия, приведены в таблице 3. Коэффициент сопротивления качению в соответствии с рекомендациями во всех опытах принят  $\mu_r = 0,1$  [12].

Результаты моделирования вариантов грунтов под номерами 1, 2 и 5 имеют угол внутреннего трения  $\varphi_0$  меньше требуемого значения и обладают большим значением связности  $c_0$  (см. таблицу 1). Результаты моделирования вариантов грунтов под номерами 3, 4, 7 и 8 имеют угол внутреннего трения больше требуемого. Для дальнейшего моделирования выбираем модель грунта 6, так как она обладает минимальной расчетной связностью, что соответствует данным реального грунта, и угол внутреннего трения находится в требуемом диапазоне.

При увеличении коэффициента трения скольжения  $\mu_s$  угол внутреннего трения  $\varphi_0$  возрастает. Для уточненного моделирования грунта требуется проведение регрессионного анализа и определения степени влияния всех параметров модели на физико-механические свойства. Указанный подход требует значительных временных затрат и может быть реализован при проведении натурных испытаний по верификации математической модели грунта, что предполагается выполнить в дальнейших работах.

В качестве примера рассмотрим порядок определения значений  $c_0$  и  $\varphi_0$  для варианта грунта 6, полученных в таблице 3. Результаты моделирования показаны на рис. 3. Испытание проводилось в следующей

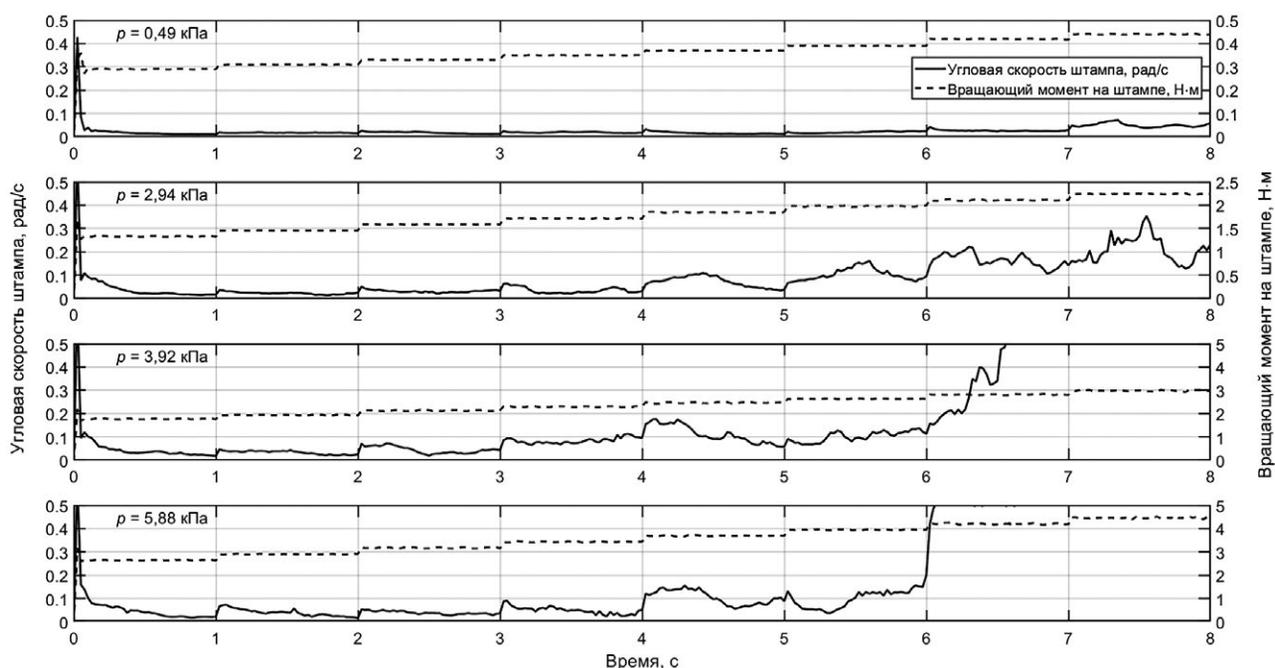
**Таблица 3.** Коэффициенты взаимодействия частиц для различных вариантов грунта и результаты виртуальных испытаний  
**Table 3.** Particles interaction coefficients for various variants of soil and results of virtual testing

Номер варианта	Коэффициенты взаимодействия частиц	Нормальное давление $p$ , кПа				$c_0$ , кПа	$\varphi_0$ , °	
		0,49	2,94	3,92	5,88			
		Касательные напряжения $\tau_{\max}$ , кПа						
1	$e = 0,5$	$\mu_s = 0,5$	0,47	2,09	2,59	3,6	0,26	30,2
2		$\mu_s = 0,6$	0,47	2,09	2,59	3,89	0,17	32,3
3		$\mu_s = 0,7$	0,47	2,09	2,79	4,19	0,10	34,6
4		$\mu_s = 0,8$	0,47	2,24	2,99	4,19	0,17	34,8
5	$e = 0,6$	$\mu_s = 0,5$	0,47	2,24	2,59	3,89	0,21	32,1
6		$\mu_s = 0,6$	0,50	2,09	2,4	4,19	0,08	33,8
7		$\mu_s = 0,7$	0,47	2,09	2,59	4,19	0,08	34,3
8		$\mu_s = 0,8$	0,45	2,24	2,99	4,19	0,15	35,0

**Таблица 4.** Данные для испытания грунта

**Table 4.** Soil testing data

Нормальное давление $P$ , кПа	Вращающий момент, прикладываемый к штампу, Н·м							
	0-1 с	1-2 с	2-3 с	3-4 с	4-5 с	5-6 с	6-7 с	7-8 с
0,49	0,29	0,31	0,33	0,35	0,37	0,39	0,42	0,44
2,94	1,33	1,46	1,59	1,72	1,85	1,98	2,11	2,24
3,92	1,77	1,94	2,12	2,29	2,46	2,63	2,81	2,98
5,88	2,65	2,91	3,17	3,43	3,69	3,95	4,21	4,47

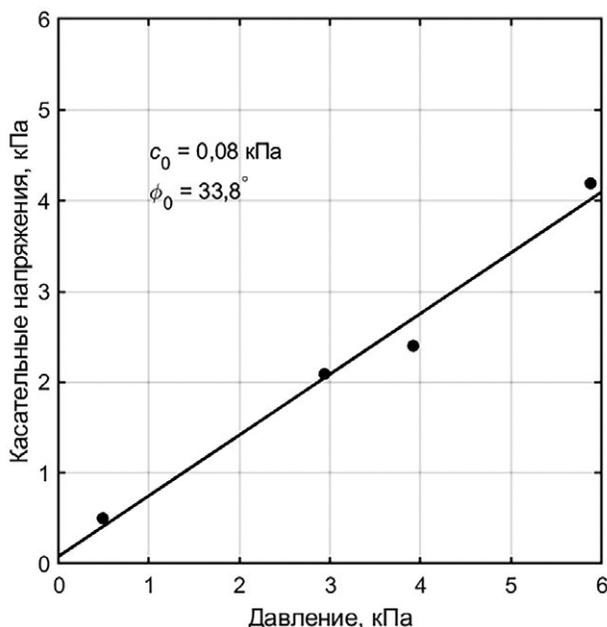


**Рис. 3.** Результаты моделирования для 6-го варианта грунта.

**Fig. 3.** Simulation results for #6 variant of soil.

последовательности. Штмп нагружался вертикальной силой, после чего к нему прикладывался ступенчато вращающий момент в соответствии с таблицей 4.

В силу особенностей работы численных методов при моделировании невозможно полностью остановить движение штампа, так как силы взаимодействия на каждом шаге вычисляются после задания начальных условий в виде координат и скоростей. В связи с этим



**Рис. 4.** Зависимость максимальных касательных напряжений от давления.

**Fig. 4.** Dependence of the maximum shear stresses on pressure.

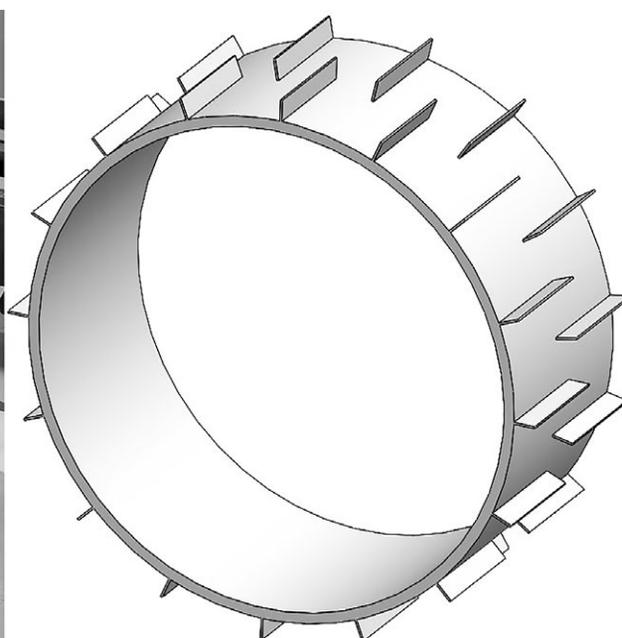
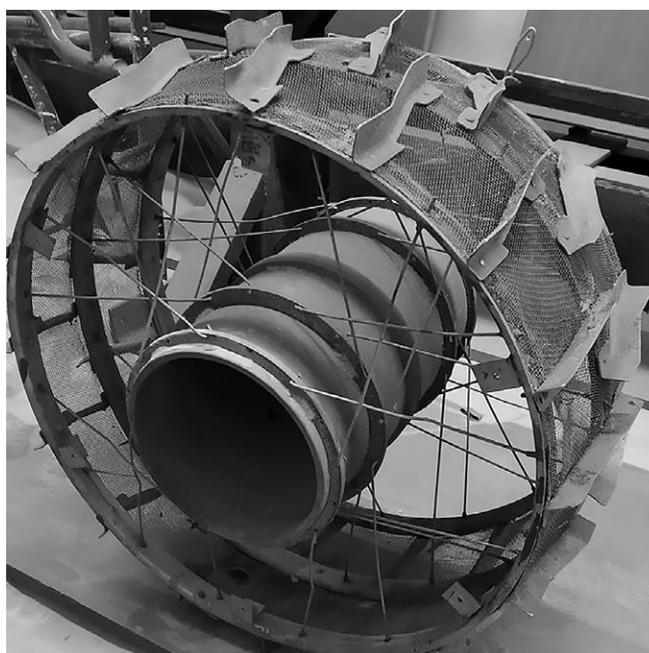
момент среза грунта определяется в момент резкого увеличения угловой скорости штампа.

Из представленных графиков видно, что при давлении  $p = 0,49$  кПа срез грунта произошел при касательном напряжении  $\tau_{\max} = 0,5$  кПа (7-ая секунда моделирования). До 7-ой секунды моделирования угловая скорость штампа монотонно убывала, а после 7-ой секунды угловая скорость постоянна или даже растет. При  $p = 2,94$  кПа срез грунта произошел при  $\tau_{\max} = 2,09$  кПа (4-я секунда моделирования), при  $p = 3,92$  кПа –  $\tau_{\max} = 2,4$  кПа (2-ая секунда моделирования), при  $p = 5,98$  кПа –  $\tau_{\max} = 4,19$  кПа (4-ая секунда моделирования).

Далее, при помощи метода наименьших квадратов получаем зависимость максимальных касательных напряжений от давления, которая приведена на рис. 4. По ней определяем связность грунта и угол внутреннего трения. Таким образом, для варианта грунта б:  $c_0 = 0,08$  кПа и  $\phi_0 = 33,8^\circ$ . Затем, данную модель грунта будем использовать при исследовании взаимодействия колесного движителя с опорным основанием.

## РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВИЖИТЕЛЯ С ОПОРНЫМ ОСНОВАНИЕМ

На рис. 5 слева показано колесо Лунохода, которое использовалось в диссертации Рождественского Ю.Л. [9]. Справа показана упрощенная твердотельная модель данного колеса.



**Рис. 5.** Колесо Лунохода и его упрощенная твердотельная модель.

**Fig. 5.** The Lunar rover wheel and its simplified solid model.

Допущения, принятые при разработке математической модели:

1. колесо является абсолютно жестким телом;
2. вращающий момент  $M_k$ , внешняя продольная сила  $P_x$  и внешняя нормальная сила  $P_z$  постоянны по величине и по направлению;
3. поверхность, контактируемая с грунтом, выполнена цельной.

Исходные данные для расчета приведены в таблице 5.

**Таблица 5.** Исходные данные для расчета

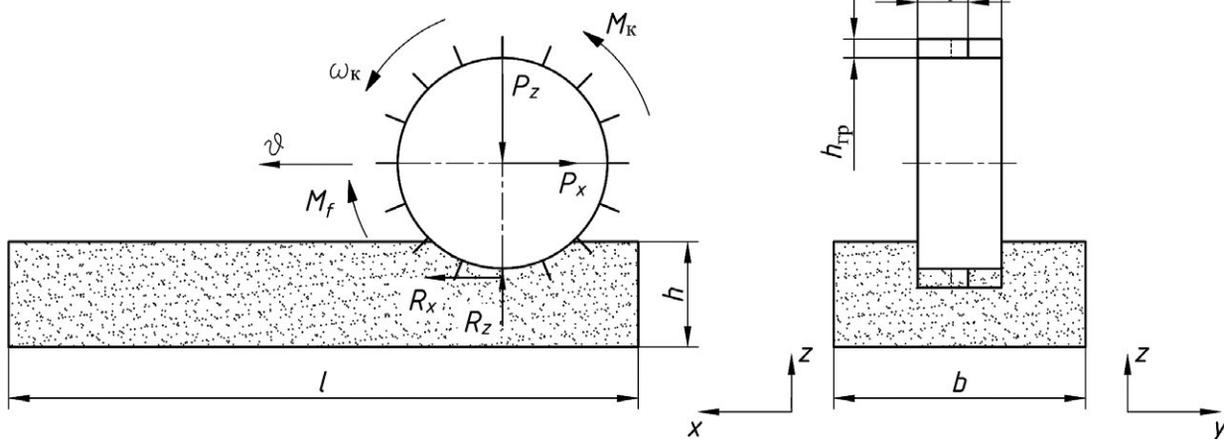
**Table 5.** The Initial data for calculation

Параметр	Значение
Масса колеса, кг	23,6
Момент инерции колеса, кг·м <sup>2</sup>	1,26
Ширина колеса, мм	200
Наружный диаметр колеса, мм	470
Ширина грунтозацепа, мм	110
Высота грунтозацепа, мм	20
Число грунтозацепов с каждой стороны	16
Длина грунтового канала, мм	1500
Ширина грунтового канала, мм	450
Высота грунтового канала, мм	200
Нормальная внешняя сила, Н	245

Расчетная схема качения колеса показана на рис. 6.

Движение колеса в общем случае описывается двумя дифференциальными уравнениями:

$$\begin{cases} m_k \ddot{x} = R_x - P_x; \\ J_k \dot{\omega}_k = M_k - M_k^f, \end{cases} \quad (9)$$



**Рис. 6.** Расчетная схема качения колеса.

**Fig. 6.** Analytical model of wheel rolling.

где  $m_k$  – масса колеса;  $J_k$  – момент инерции колеса;  $R_x, R_z$  – продольная и нормальная реакции соответственно;  $M_k^f$  – суммарный момент взаимодействия колесного

двигателя с опорным основанием;  $k_{Rx}(s_0) = \frac{R_x}{R_z}$  – коэффициент продольной реакции;  $r_{k0}$  – радиус качения в свободном режиме.

Радиус качения в свободном режиме определялся экспериментально при моделировании данного режима и равен:

$$r_{k0} = \frac{v}{\omega_k} = 235 \text{ мм.}$$

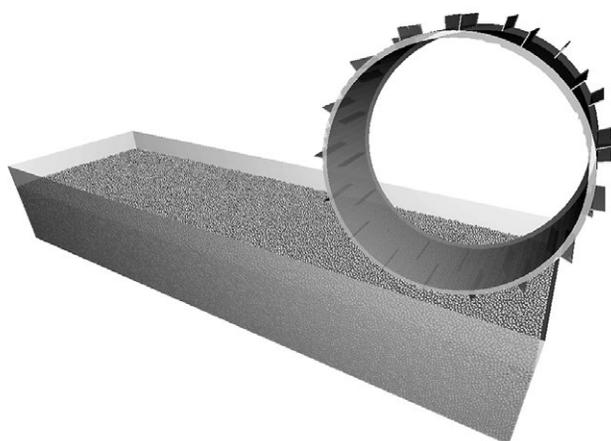
Поскольку рассматривается только установившееся движение колеса, то коэффициент продольной реакции и коэффициент буксования соответственно определяем по следующим зависимостям:

$$k_{Rx} = \frac{R_x}{R_z} = \frac{P_x}{P_z}; \quad s_0 = 1 - \frac{v}{\omega_k \cdot r_{k0}}. \quad (10)$$

На рис. 7 показан виртуальный стенд «грунтовой канал» с испытуемым колесом, разработанный в программном комплексе EDEM.

Для определения зависимости  $k_{Rx}(s_0)$  рассмотрим три режима качения колеса: свободный, ведомый и ведущий. В результате моделирования был определен вращающий момент  $M_k = M_k^f = 8,4$  Н·м, при котором  $P_x = R_x = 0$ , что соответствует свободному режиму качения колеса. Коэффициент сопротивления качению колеса в свободном режиме определяется по формуле:

$$f_{св} = \frac{M_k}{R_z \cdot r_{k0}} = 0,146. \quad (11)$$



**Рис. 7.** Грунтовой канал в EDEM.  
**Fig. 7.** The soil box in the EDEM software.

Для реализации ведомого режима качения колеса необходимо выполнение следующего условия:  $M_k = 0; P_x < 0$ . Тогда, моделируя ведомый режим качения, определим коэффициент сопротивления качению колеса:

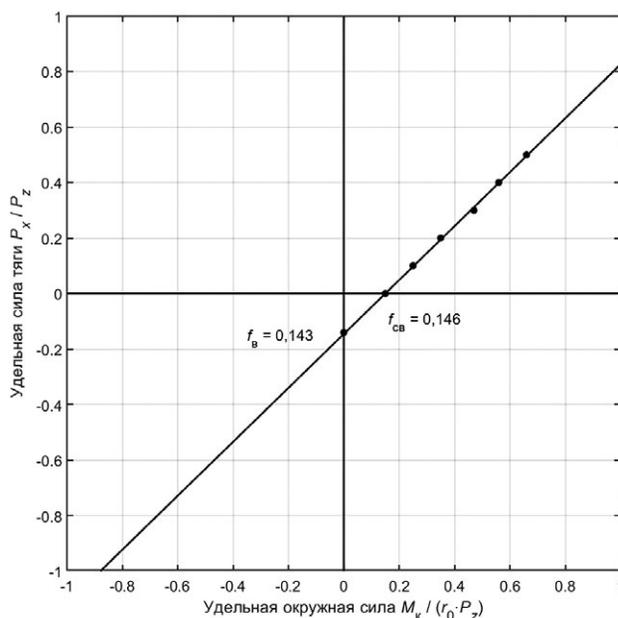
$$f_b = \frac{|R_x|}{R_z} = 0,143. \tag{12}$$

Полученное значение достаточно близко к коэффициенту сопротивления качению колеса в свободном режиме.

Для реализации ведущего режима качения колеса необходимо выполнение условия:  $M_k > 0; P_x > 0$ .

При моделировании взаимодействия колесного движителя с грунтом задаются силовые параметры, а именно вращающий момент  $M_k$ , продольная сила  $P_x$  и нормальная сила  $P_z$ . Измеряемыми параметрами являются реакции  $R_x$  и  $R_z$ , действующие со стороны грунта на колесо, и угловая  $\omega_k$  и линейная  $v$  скорости колеса. В таблице 6 приведены полученные результаты моделирования качения колеса в ведомом, свободном и ведущем режимах. Значения приведены для установившегося режима, поэтому  $M_k = M_k^f, R_x = P_x, R_z = P_z$ .

По результатам моделирования при помощи метода наименьших квадратов получена зависимость удельной



**Рис. 8.** Зависимость удельной силы тяги от удельной окружной силы.

**Fig. 8.** Dependence of the specific traction force on the specific circumferential force.

силы тяги от удельной окружной силы на колесе, приведенная на рис. 8. Из графика видно, что зависимость линейная.

## РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Основная задача для ТС высокой проходимости – совершение полезной работы по транспортировке людей и грузов в труднодоступные места. Тягово-сцепные свойства колеса  $k_{Rx}(s_6)$  и параметры несвязанного грунта  $c_0, \varphi_0$  при отсутствии образования глубокой колеи в значительной степени определяют проходимость колесной машины.

На рис. 9 показаны полученные в ходе моделирования и эксперимента зависимости коэффициента продольной реакции  $k_{Rx}$  от коэффициента буксования  $s_6$ .

Выделим 3 условные зоны буксования: малого  $s_6 \leq 0,2$ , среднего  $0,2 < s_6 \leq 0,5$  и интенсивного

**Таблица 6.** Результаты моделирования качения колеса

**Table 6.** Wheel rolling simulation results

Режим	$M_k$ , Н·м	$R_x$ , Н	$R_z$ , Н	$r_k$ , мм	$\omega_k$ , рад/с	$v$ , мм/с	$s_6$	$k_{Rx}$
Ведомый	0	-35,0	245	252	0,147	37,1	-0,073	-0,14
Свободный	8,4	0	245	235	0,163	38,3	0	0
Ведущий	14,4	24,5	245	217	0,157	34,1	0,077	0,10
	20,3	49,0		190	0,210	40,0	0,196	0,20
	27,2	73,5		138	0,170	23,4	0,412	0,30
	32,5	98,0		92	0,162	15,7	0,609	0,40
	37,8	122,5		67	0,150	10,1	0,713	0,50

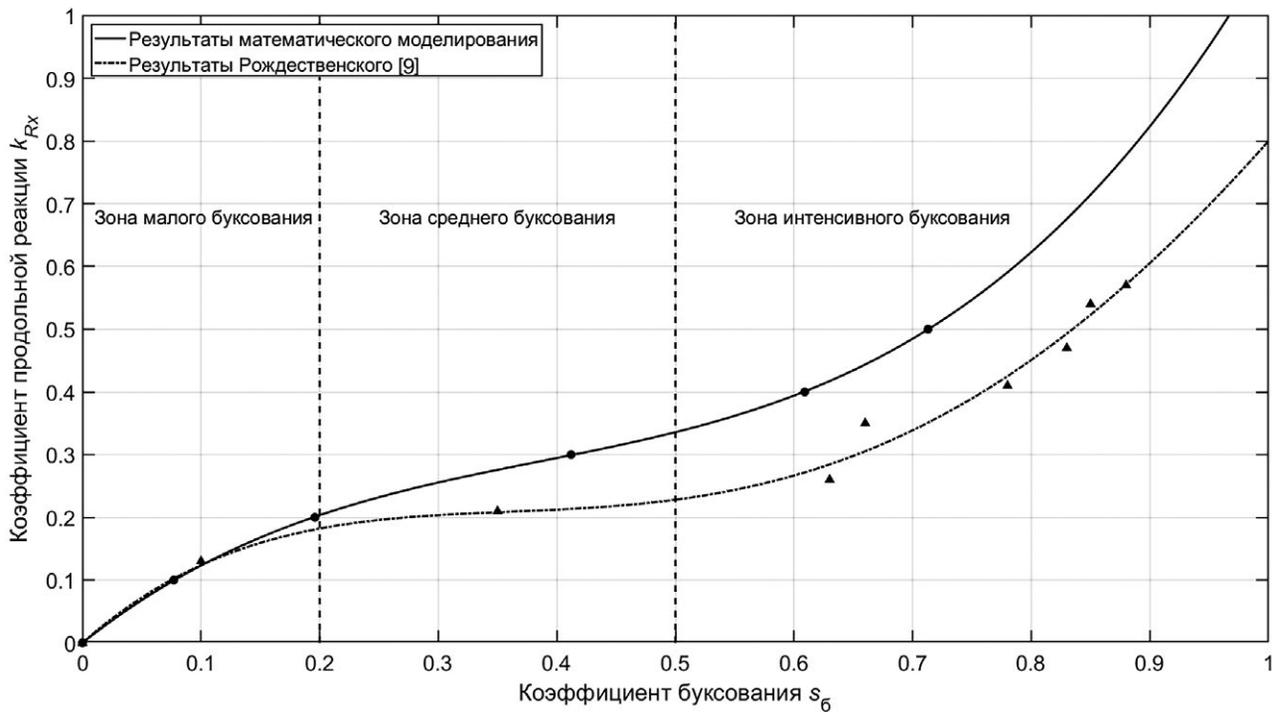


Рис. 9. Тягово-сцепная характеристика.

Fig. 9. Traction curves.

$s_6 > 0,5$ . При  $s_6 > 0,5$  визуально наблюдается активная экскавация частиц грунта в модели, а при  $s_6 \leq 0,2$  – частицы находятся в состоянии покоя, что соответствует зоне упругого скольжения. Результаты, полученные при использовании разработанной математической модели взаимодействия колеса с опорным основанием, совпадают с результатами эксперимента в зоне малого буксования. В зоне интенсивного буксования начинается значительная экскавация грунта, в результате чего погрешность увеличивается. Для того чтобы получить полную повторяемость эксперимента, в этой области необходимо провести уточненные исследования по верификации математической модели грунта. Данная задача является весьма трудоемкой, так как на буксование влияет уже не только силовые факторы: подводимый крутящий момент  $M_k$  и преодолеваемая сила  $P_x$ , но и скорость движения самих частиц, которая зависит от линейной и угловой скорости колесного движителя, а также упругие свойства движителя. В целом

данный режим качения колеса не стоит рассматривать в качестве эксплуатационного, так как опорная проходимость ТС снижается из-за значительной экскавации грунта.

Результаты сравнительной оценки разработанной математической модели и натурного эксперимента представлены в таблице 7. Коэффициенты сопротивления качению в свободном режиме и коэффициенты продольной реакции при 10%-ом буксовании подтверждают адекватность разработанной математической модели грунта. При буксовании  $s_6 = 0,2$  коэффициент продольной реакции в модели больше в 1,1 раза ( $\varepsilon = 10\%$ ), а при буксовании  $s_6 = 0,5$  – в 1,5 раза ( $\varepsilon = 47,8\%$ ). Отклонение результатов обусловлено дополнительным влиянием непосредственного взаимодействия частиц с колесом. У колеса при проведении натуральных испытаний поверхность, контактируемая с песком, была выполнена из металлической сетки, и тягово-сцепные свойства колеса в основном обеспечивались грунтозацепами.

Таблица 7. Результаты сравнительной оценки

Table 7. Comparative evaluation results

Результаты	$f_{св}$	$k_{Rx}$ при $s_6 = 0,1$	$k_{Rx}$ при $s_6 = 0,2$	$k_{Rx}$ при $s_6 = 0,5$
Натурные испытания	0,150	0,12	0,18	0,23
Математическая модель	0,146	0,12	0,2	0,34
Погрешность, %	2,7	0,0	10,0	47,8

В разработанной модели контактируемая поверхность с грунтом выполнена цельной, поэтому площадь взаимодействия колесного движителя с частицами больше. Кроме этого, реальное колесо является деформируемым и возможно проявление краевых эффектов из-за небольшой глубины грунтового канала.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Верифицирована математическая модель грунта и определены параметры отдельных частиц. Анализ полученных результатов показал качественную зависимость угла внутреннего трения от коэффициента трения скольжения  $\mu_s$  и позволил выбрать наиболее подходящие параметры модели для дальнейшего исследования.

Разработана математическая модель взаимодействия колесного движителя с опорным основанием. Установлено, что зависимость удельной силы тяги от удельной окружной силы является линейной функцией, что также подтверждается данными работы [1].

При помощи математической модели взаимодействия колесного движителя с опорным основанием построена тягово-сцепная характеристика. Проведенный сравнительный анализ результатов натурных испытаний показал, что модель достаточно точно воспроизводит процесс взаимодействия колеса с песчаным грунтом в зоне малого буксования. Применение регрессионного анализа для дальнейшего уточнения модели поможет достичь более точных результатов. Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего изучения взаимодействия колесного движителя с деформируемым основанием и разработки рациональной конструкции движителя.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Смирнов Г.А. Теория движения колесных машин: учебник для вузов. М.: Машиностроение, 1990.
2. Рождественский Ю.Л., Машков К.Ю. О формировании реакций при качении упругого колеса по недеформируемому основанию // Труды МВТУ. 1982. № 390. С. 56–64.
3. Агейкин Я.С., Вольская Н.С. Моделирование движения автомобиля по мягким грунтам: проблемы и решения // Автомобильная промышленность. 2004. № 10. С. 24–25.
4. Ларин В.В. Теория движения полноприводных колесных машин. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010.
5. Вольская Н.С. Оценка проходимости колесных машин при движении по неровной грунтовой поверхности. М.: МГИУ, 2007.
6. Агейкин Я.С. Проходимость автомобилей. М.: Машиностроение, 1981.
7. Беккер М.Г. Введение в теорию систем местность – машина. М.: Машиностроение, 1973.
8. Беляков В.В., Бескин И.А., Козлов В.С., и др. Вездеходные транспортно-технологические машины.

## ДОПОЛНИТЕЛЬНО

**Вклад авторов.** Р.Р. Пашковский — поиск публикаций по теме статьи, написание текста рукописи, создание изображений; К.Б. Евсеев — редактирование текста рукописи, экспертная оценка, утверждение финальной версии. Авторы подтверждают соответствие своего авторства международным критериям *ICMJE* (все авторы внесли существенный вклад в разработку концепции, проведение исследования и подготовку статьи, прочли и одобрили финальную версию перед публикацией).

**Конфликт интересов.** Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

**Источник финансирования.** Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

## ADDITIONAL INFORMATION

**Authors' contribution.** R.R. Pashkovsky — search for publications, writing the text of the manuscript, creating images; K.B. Evseev — editing the text of the manuscript, expert opinion, approval of the final version. All authors made a substantial contribution to the conception of the work, acquisition, analysis, interpretation of data for the work, drafting and revising the work, final approval of the version to be published and agree to be accountable for all aspects of the work.

**Competing interests.** The authors declare that they have no competing interests.

**Funding source.** This study was not supported by any external sources of funding.

Основы теории движения. Нижний Новгород: Талам, 2004.

9. Рождественский Ю.Л. Анализ и прогнозирование тяговых качеств колесных движителей планетоходов. дисс. ... канд. техн. наук. Москва, 1982.

10. Агейкин Я.С., Вольская Н.С., Чичекин И.В. Проходимость автомобиля: учебник. М.: МГИУ, 2010.

11. Пашковский Р.Р. Анализ существующих подходов к определению физико-механических параметров несвязанного грунта и моделированию динамики его частиц // Политехнический молодежный журнал. 2023. № 01(78). doi: 10.18698/2541-8009-2023-1-853

12. EDEM help [internet] Дата обращения: 06.04.2023. Режим доступа: <https://altairuniversity.com/learning-library/edem-tutorials/>  
13. Zhou L., Gao J., Hu C., et al. Numerical simulation and testing verification of the interaction between track and sandy ground based on discrete element method // J. Terramech. 2021. Vol. 95. P. 73–88. doi: 10.1016/j.jterra.2021.03.002

## REFERENCE

1. Smirnov GA. The theory of the movement of wheeled vehicles: a textbook for universities. Moscow: Mashinostroenie; 1990. (in Russ.)
2. Rozhdestvensky YuL, Mashkov KYu. On the formation of reactions during the rolling of an elastic wheel on a non-deformable base. *Trudy MVTU*. 1982;390:56–64. (in Russ.)
3. Ageikin YaS, Volskaya NS. Modeling the movement of a car on soft soils: problems and solutions. *Avtomobilnaya promyshlennost*. 2004;10:24–25. (in Russ.)
4. Larin VV. Theory of motion of all-wheel drive wheeled vehicles. Moscow: MGTU im NE Bauman; 2010. (in Russ.)
5. Volskaya NS. Assessment of the patency of wheeled vehicles when driving on an uneven ground surface. Moscow: MGIU; 2007. (in Russ.)
6. Ageikin YaS. Vehicle patency. Moscow: Mashinostroenie; 1981. (in Russ.)
7. Becker MG. Introduction to Systems Theory Terrain – Machine. Moscow: Mashinostroenie; 1973. (in Russ.)
8. Belyakov VV, Beskin IA, Kozlov VS, et al. Cross-country transport and technological machines. Fundamentals of the theory of motion. Nizhny Novgorod: Talam; 2004. (in Russ.)
9. Rozhdestvensky YuL. Analiz i prognozirovaniye tyagovykh kachestv kolesnykh dvizhiteley planetokhodov [dissertation] Moscow; 1982. (in Russ.)
10. Ageikin YaS, Volskaya NS, Chicheckin IV. Passability of the car: textbook. Moscow: MGIU; 2010. (in Russ.)
11. Pashkovsky RR. Analysis of existing approaches to determining the physical and mechanical parameters of unbound soil and modeling the dynamics of its particles. *Politekhnicheskiiy molodezhnyy zhurnal*. 2023;01(78). (in Russ.) doi: 10.18698/2541-8009-2023-1-853
12. EDEM help [internet] Accessed: 06.04.2023. Available from: <https://altairuniversity.com/learning-library/edem-tutorials/>
13. Zhou L, Gao J, Hu C, et al. Numerical simulation and testing verification of the interaction between track and sandy ground based on discrete element method. *J. Terramech*. 2021;95:73–88. doi: 10.1016/j.jterra.2021.03.002

## ОБ АВТОРАХ

### \* Пашковский Роман Родионович;

студент кафедры «Колесные машины»;  
адрес: Российская Федерация, 117437, Москва, ул. Ак. Арцимовича, д. 12 корп. 2;  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0974-4164>;  
eLibrary SPIN: 6519-4034;  
e-mail: pashkovsky@bmstu.ru

### Евсеев Кирилл Борисович,

доцент, канд. техн. наук,  
доцент кафедры «Колесные машины»;  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7193-487X>;  
eLibrary SPIN: 7753-2047;  
e-mail: kb\_evseev@bmstu.ru

\* Автор, ответственный за переписку

## AUTHORS' INFO

### \* Roman R. Pashkovsky;

Student of the Wheeled Vehicles Department;  
address: 12 2 Ak. Artsimovicha street, 117437 Moscow, Russian Federation;  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0974-4164>;  
eLibrary SPIN: 6519-4034;  
e-mail: pashkovsky@bmstu.ru

### Kirill B. Evseev,

Associate Professor, Cand. Sci. (Tech.),  
Associate Professor of the Wheeled Vehicles Department;  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7193-487X>;  
eLibrary SPIN: 7753-2047;  
e-mail: kb\_evseev@bmstu.ru

\* Corresponding author