

DOI: <https://doi.org/10.17816/0321-4443-622767>

Оригинальное исследование



# Разработка и верификация виртуального прототипа автотранспортного средства

М.М. Жилейкин<sup>1,2</sup>, А.В. Антонян<sup>1,2</sup>, Ю.М. Фурлетов<sup>2</sup><sup>1</sup> Инновационный центр «КАМАЗ», Москва, Российская Федерация;<sup>2</sup> Московский политехнический университет, Москва, Российская Федерация

## АННОТАЦИЯ

**Обоснование.** Методы математического моделирования находят широкое применение при разработке автотранспортных средств. С целью исследования динамических свойств автотранспортного средства, исследования его устойчивости и управляемости, а также для удешевления и ускорения разработки бортового программного обеспечения требуется создание цифрового двойника, описывающего пространственное движение транспортного средства с моделями узлов и агрегатов, входящих в его состав.

**Цель работы** — разработка и верификация виртуального прототипа автотранспортного средства.

**Материалы и методы.** Разработка виртуального прототипа и моделирование автотранспортного средства проводились в программном пакете MATLAB&Simulink. Приводятся основные выводы уравнений необходимых для построения моделей узлов и агрегатов автомобиля. Проводятся верификационные испытания с использованием специального измерительного оборудования.

**Результаты.** Разработан виртуальный прототип автотранспортного средства, содержащий в себе описание совместной динамики кузова, элементов трансмиссии, подвески и колес. Проводится сравнение результатов натурных и виртуальных испытаний, подтверждающих работоспособность и адекватность виртуального прототипа. Выводятся основные графики, отражающие динамику реального и виртуального автомобиля.

**Заключение.** Практическая ценность разработки и исследования заключается в возможности использования виртуального прототипа при исследованиях динамических свойств автотранспортного средства и разработке бортовых систем управления.

**Ключевые слова:** виртуальный прототип; транспортное средство; система уравнений; моделирование; верификация.

## Как цитировать:

Жилейкин М.М., Антонян А.В., Фурлетов Ю.М. Разработка и верификация виртуального прототипа автотранспортного средства // Тракторы и сельхозмашины. 2023. Т. 90, № 5. С. 455–467. DOI: <https://doi.org/10.17816/0321-4443-622767>

DOI: <https://doi.org/10.17816/0321-4443-622767>

Original Study Article

# Development and verification of a virtual prototype of a vehicle

Mikhail M. Zhileikin<sup>1,2</sup>, Akop V. Antonyan<sup>1,2</sup>, Yury M. Furletov<sup>2</sup>

<sup>1</sup> KAMAZ Innovation Center, Moscow, Russian Federation;

<sup>2</sup> Moscow Polytechnic University, Moscow, Russian Federation

## ABSTRACT

**BACKGROUND:** Methods of mathematical modelling are widely used in vehicle development. In order to study vehicle dynamics, stability and handling, as well as to accelerate and to reduce the cost of on-board software development, it is necessary to build a digital twin which contains description of special motion of a vehicle with models of units and subsystems as parts of the vehicle.

**AIMS:** Development and verification of a virtual prototype of a vehicle.

**METHODS:** Development of the virtual prototype and vehicle modelling were done in the MATLAB/Simulink software package. Main derivation of the equations necessary to build the models of vehicle's units and subsystems is given. Verification testing was conducted using special measuring equipment.

**RESULTS:** The vehicle virtual prototype containing description of combined dynamics of bodyframe, transmission elements, suspension and wheels was developed. Comparison of results of field and virtual testing was made in order to confirm operability and adequacy of the virtual prototype. Main graphs showing dynamics of real and virtual vehicles are presented.

**CONCLUSIONS:** Practical value of development and study lies in ability of using a virtual prototype in vehicle dynamic studies and development of on-board control systems.

**Keywords:** virtual prototype; vehicle; system of equations; modelling; verification.

## To cite this article:

Zhileikin MM, Antonyan AV, Furletov YuM. Development and verification of a virtual prototype of a vehicle. *Tractors and Agricultural Machinery*. 2023;90(5)455–467.

DOI: <https://doi.org/10.17816/0321-4443-622767>

Received: 27.10.2023

Accepted: 07.11.2023

Published online: 15.11.2023

## ВВЕДЕНИЕ

К математической модели цифрового двойника предъявляются требования с учетом специфики решаемой задачи [1, 2]. В разрабатываемой модели динамики транспортной машины должна быть учтена совместная динамика кузова, силовой установки, трансмиссии и ходовой части с достаточной точностью для проведения моделирования движения. Также в модели должен быть учтен неустойчивый характер связи при взаимодействии колеса с опорным основанием. Предполагается, что массы неподрессоренных элементов приведены к колесам, а поддрессоренных — к несущей системе [8]. При движении автотранспортного средства необходимо учитывать характеристики сцепления и сопротивления опорной поверхности, так как эти факторы влияют на движение транспортного средства [8].

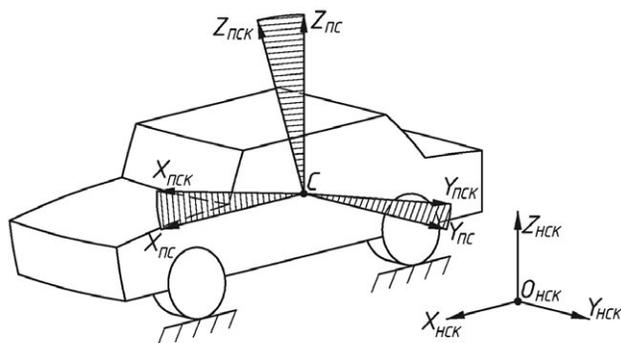
**Цель работы** — разработка и верификация виртуального прототипа автотранспортного средства.

## МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

### Система уравнений корпуса транспортного средства

Система уравнений движения автотранспортного средства содержит: уравнения динамики, которые составлены на основе закона сохранения количества движения и момента количества движения [1–3]; кинематические уравнения связи угловых и линейных скоростей с угловыми и пространственными координатами, полученными на основе уравнений связей между различными координатными системами; динамические уравнения движения неподрессоренных масс относительно корпуса [8].

Сначала составляется система уравнений корпуса автомобиля. При составлении системы уравнений рассматривается движение твердого тела в пространстве. В разрабатываемой модели используются три системы координат (рис. 1): неподвижная система координат



**Рис. 1.** Ориентация и систем координат в пространстве.  
**Fig. 1.** Spacing of coordinate systems.

(НСК,  $O_{НСК}X_{НСК}Y_{НСК}Z_{НСК}$ ), полусвязанная система координат (ПС,  $CX_{ПС}Y_{ПС}Z_{ПС}$ ) и подвижная система координат (ПСК,  $CX_{ПСК}Y_{ПСК}Z_{ПСК}$ ) [8].

Уравнения динамики следует записывать относительно подвижной системы координат, параметрами которой, являются проекции линейных скоростей ( $v_x, v_y, v_z$ ) и угловых скоростей ( $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ ).

Система уравнений корпуса колесной машины состоит из шести уравнений, из них первые три — уравнения поступательного движения (см. работы [1–4]), а вторые три уравнения — вращательного движения [1–4]. Описание поступательного и вращательного движения тела записывается по формуле Буря [3]:

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \frac{\tilde{d}\bar{Q}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{Q} = \sum_k F_k^{(e)};$$

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \frac{\tilde{d}\bar{K}_O}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{K}_O = L_O^{(e)},$$

где  $\frac{\tilde{d}\bar{Q}}{dt}$  — локальная производная по времени от век-

тора количества движения  $\bar{Q}$  в подвижной системе координат;  $\bar{\omega}$  — мгновенная угловая скорость подвижной системы координат;  $F_k^{(e)}$  — сумма сил, действующ-

их на корпус колесной машины;  $\frac{\tilde{d}\bar{K}_O}{dt}$  — локальная

производная по времени от главного момента количества движения  $\bar{K}_O$  относительно центра  $O$ ;  $L_O^{(e)}$  — главный момент внешних сил, приложенных к твердому телу, относительно центра  $O$ .

Векторные выражения теорем на оси подвижной системы координат в развернутом виде будут выглядеть представляются в форме:

$$\begin{cases} m\dot{v}_{cx} + m(\omega_y v_{cz} - \omega_z v_{cy}) = \sum_k F_x^{(e)}; \\ m\dot{v}_{cy} + m(\omega_z v_{cx} - \omega_x v_{cz}) = \sum_k F_y^{(e)}; \\ m\dot{v}_{cz} + m(\omega_x v_{cy} - \omega_y v_{cx}) = \sum_k F_z^{(e)}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dK_x}{dt} + (\bar{\omega} \times K_O)_x = L_x^{(e)}; \\ \frac{dK_y}{dt} + (\bar{\omega} \times K_O)_y = L_y^{(e)}; \\ \frac{dK_z}{dt} + (\bar{\omega} \times K_O)_z = L_z^{(e)}, \end{cases} \quad (1)$$

где  $m$  — масса колесной машины.

Учитывая, что центробежные моменты инерции могут быть приравнены к нулю, система уравнений примет вид динамических уравнений Эйлера [1–4]. Векторное

выражение теоремы на оси подвижной системы координат в конечном виде будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} J_x \dot{\omega}_x + \omega_z \omega_y (J_z - J_y) = L_x^{(e)}; \\ J_y \dot{\omega}_y + \omega_x \omega_z (J_x - J_z) = L_y^{(e)}; \\ J_z \dot{\omega}_z + \omega_x \omega_y (J_y - J_x) = L_z^{(e)}; \end{cases} \quad (2)$$

Если совместить системы уравнений (1) и (2), в одну систему, то можно записать общее уравнение движения кузова автомобиля в проекциях на оси подвижной системы координат:

$$\begin{cases} m\dot{v}_{cx} + m(\omega_y v_{cz} - \omega_z v_{cy}) = G_x + F_x + \sum_{i=1}^4 R_{xi}; \\ m\dot{v}_{cy} + m(\omega_z v_{cx} - \omega_x v_{cz}) = G_y + F_y + \sum_{i=1}^4 R_{yi}; \\ m\dot{v}_{cz} + m(\omega_x v_{cy} - \omega_y v_{cx}) = G_z + F_z + \sum_{i=1}^4 R_{zi}; \\ J_x \dot{\omega}_x + \omega_z \omega_y (J_z - J_y) = M_x(F) + \sum_{i=1}^4 M_x(R_i); \\ J_y \dot{\omega}_y + \omega_x \omega_z (J_x - J_z) = M_y(F) + \sum_{i=1}^4 M_y(R_i); \\ J_z \dot{\omega}_z + \omega_x \omega_y (J_y - J_x) = M_z(F) + \sum_{i=1}^4 M_z(R_i), \end{cases}$$

где  $\omega_x, \omega_y, \omega_z, \dot{\omega}_x, \dot{\omega}_y, \dot{\omega}_z$  — проекции угловых скоростей и ускорений математической модели;  $v_{cx}, v_{cy}, v_{cz}, \dot{v}_{cx}, \dot{v}_{cy}, \dot{v}_{cz}$  — проекции линейных скоростей и ускорений центра масс  $C$ ;  $G_x, G_y, G_z$  — проекции силы тяжести;  $F_x, F_y, F_z$  — проекции силы внешнего воздействия;  $R_{xi}, R_{yi}, R_{zi}$  — проекции реакций в пятне контакта между опорной поверхностью;  $M_x(F), M_y(F), M_z(F)$  — проекции момента от сил внешнего воздействия;  $M_x(R_i), M_y(R_i), M_z(R_i)$  — проекции момента от реакции в пятне контакта.

Взаимосвязь между положением корпуса автомобиля в пространстве и неподвижной системой координат характеризуется углами Эйлера–Крылова (рис. 2), углом рыскания ( $\theta$ ), углом дифферента ( $\phi$ ), углом крена ( $\psi$ ) [1–4, 8]:

$$\begin{cases} \dot{\psi} = \omega_x \cos(\phi) - \omega_z \sin(\phi); \\ \dot{\theta} = \frac{\omega_z \cos(\phi) - \omega_x \sin(\phi)}{\cos(\phi)}; \\ \dot{\phi} = \omega_y \operatorname{tg}(\psi)(\omega_z \cos(\phi) - \omega_x \sin(\phi)). \end{cases} \quad (3)$$

Полученные углы необходимы для вычисления коэффициентов матрицы направляющих косинусов:

$$\begin{aligned} b_{11} &= \cos(\theta) \cos(\phi); \\ b_{12} &= \cos(\theta) \sin(\phi) \sin(\psi) - \sin(\theta) \cos(\psi); \\ b_{13} &= \cos(\theta) \sin(\phi) \cos(\psi) + \sin(\theta) \sin(\psi); \\ b_{21} &= \sin(\theta) \cos(\phi); \\ b_{22} &= \sin(\theta) \sin(\phi) \sin(\psi) + \cos(\theta) \cos(\psi); \\ b_{23} &= \sin(\theta) \sin(\phi) \cos(\psi) - \cos(\theta) \sin(\psi); \\ b_{31} &= -\sin(\phi); \\ b_{32} &= \cos(\theta) \sin(\psi); \\ b_{33} &= \cos(\phi) \cos(\psi). \end{aligned}$$

Матрицы линейного преобразования:

$$\begin{bmatrix} v_{cx\text{HCK}} \\ v_{cy\text{HCK}} \\ v_{cz\text{HCK}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{cx\text{ПСК}} \\ v_{cy\text{ПСК}} \\ v_{cz\text{ПСК}} \end{bmatrix},$$

где  $v_{cx\text{ПСК}}, v_{cy\text{ПСК}}, v_{cz\text{ПСК}}, v_{cx\text{HCK}}, v_{cy\text{HCK}}, v_{cz\text{HCK}}$  — проекции мгновенной скорости движения центра масс на оси подвижной и неподвижной систем координат.

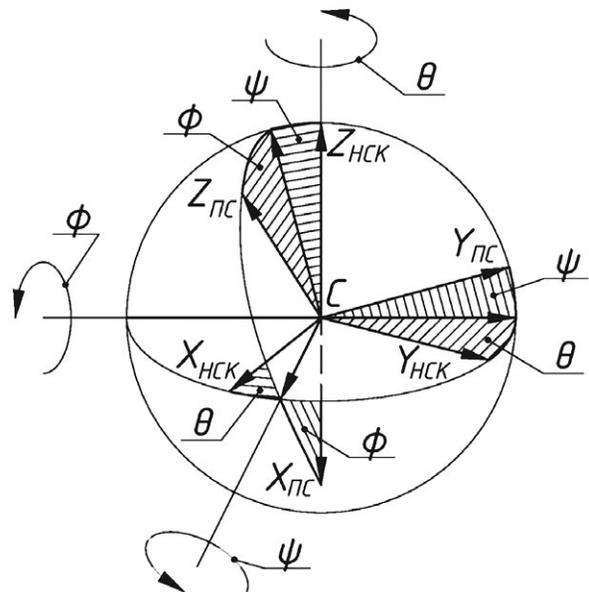


Рис. 2. Углы Эйлера–Крылова:  $\phi, \psi, \theta$  — углы дифферента, крена, рыскания.

Fig. 2. Euler–Krylov angles:  $\phi, \psi, \theta$  — pitch, roll, yaw angles.

## РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КАЧЕНИЯ КОЛЕСА

Скорость движения автотранспортного средства в математической модели обеспечивается за счет приложения крутящего момента на вал колеса [1, 7–9]. Динамика вала колеса описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} J_{ki} \cdot \dot{\omega}_{ki} = M_{kpi} - M_{ci}; \\ M_{ci} = R_{xi}r_0 + M_{\text{торм}i} + M_{fi}, \end{cases}$$

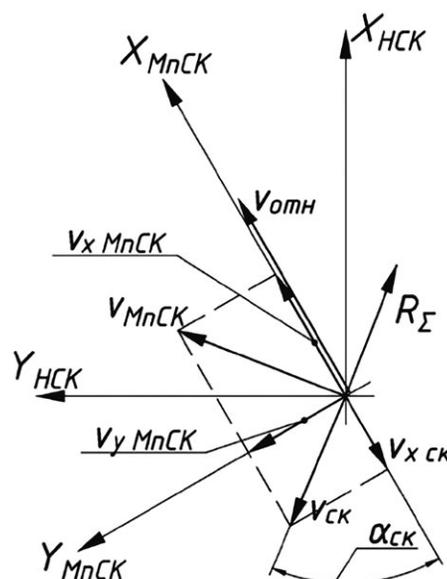
где  $\dot{\omega}_{ki}$  — угловое ускорение колеса;  $M_{kpi}$  — крутящий момент на колесе;  $M_{ci}$  — сумма моментов сопротивления на колесе;  $M_{\text{торм}}$  — тормозной момент;  $M_{fi}$  — момент сопротивления качению колеса;  $r_0$  — радиус качения колеса.

При моделировании взаимодействия колеса следует принять следующее предположение: опорное снование неровное и недеформируемое; трение шины об опорное снование стабильно [1, 7–9]. Для построения расчётной схемы качения колеса (рис. 3 и 4), необходимо ввести микроподвижную систему координат (МпСК), в которой происходит взаимодействие колеса с опорным снованием (см. рис. 4).

Линейная скорость колеса относительно подвижной системы координат рассчитывается по следующей формуле [1, 7–9]:

$$v_{кпСК} = v_{спСК} + \omega_{спСК} \times L_{кпСК},$$

где  $v_{спСК}$  — вектор скорости центра масс автомобиля;  $\omega_{спСК}$  — вектор угловой скорости центра масс



**Рис. 3.** Расчётная схема реакции и скоростей в пятне контакта. **Fig. 3.** Analytical scheme of reaction and velocities acting in a contact patch.

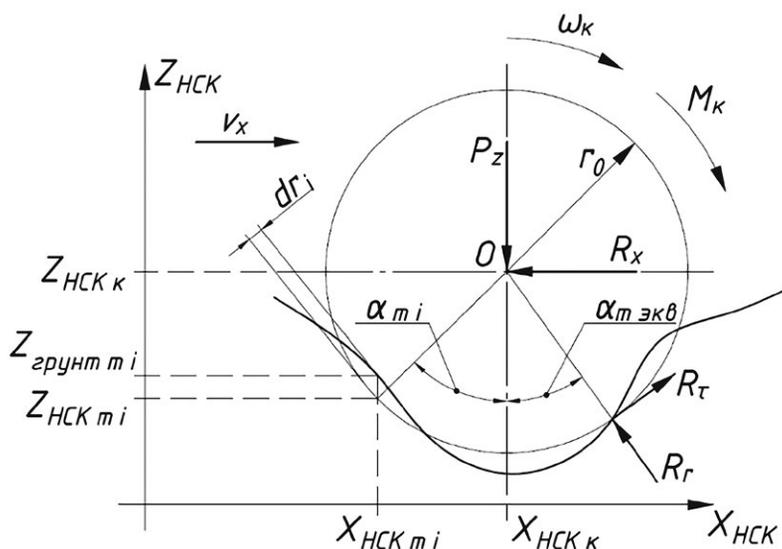
автомобиля;  $L_{кпСК}$  — радиус-вектор крепления центров колес к корпусу.

Скорость скольжения колеса (см. рис. 3) в микроподвижной системе координат [1, 5, 6, 8, 9] вычисляется согласно:

$$v_{ск} = \sqrt{v_{x,ск}^2 + v_{y,ск}^2};$$

$$v_{x,ск} = v_{к,х.МпСК} - v_{отн};$$

$$v_{y,ск} = v_{к,у.МпСК};$$



**Рис. 4.** Расчётная схема качения эластичного колеса.

**Fig. 4.** Analytical scheme of elastic wheel rolling on uneven and non-deformable ground surface.

Угол скольжения  $\alpha_{\text{СК}}$  изменяется в пределах

$$0 \leq \alpha_{\text{СК}} \leq \frac{\pi}{2}.$$

Моделирование эластичного колеса можно представить в виде взаимодействия точек на нижней полуокружности колеса и неровной опорного основания. Положение  $i$ -ой точки определяется кратчайшим расстоянием от точки на окружности колеса до центра колеса и вертикальной прямой, проходящей через центр колеса углом  $\alpha_{\text{T},i}$  (рис. 4).

Координаты точек на продольной  $X_{\text{HCK}}$ , поперечной  $Y_{\text{HCK}}$  и вертикальной  $Z_{\text{HCK}}$  осей неподвижной системы координат вычисляются следующим образом [8, 10]:

$$X_{\text{HCK},i} = X_{\text{HCK},k} + r_0 \cdot \sin(\alpha_{\text{T},i}) \cdot \sin(\theta + \beta);$$

$$Y_{\text{HCK},i} = Y_{\text{HCK},k} + r_0 \cdot \sin(\alpha_{\text{T},i}) \cdot \sin(\theta + \beta);$$

$$Z_{\text{HCK},i} = Z_{\text{HCK},k} - r_0 \cdot \cos(\alpha_{\text{T},i}),$$

где  $X_{\text{HCK},k}$ ,  $Y_{\text{HCK},k}$  и  $Z_{\text{HCK},k}$  — координаты центра эластичного колеса в неподвижной системе координат;  $\beta$  — угол поворота управляемого колеса.

Прогиб шины  $q$  вычисляется согласно [8, 10]:

$$q_{\text{T,ЭКВ}} = \begin{cases} 0, & Z_{\text{грунт},i} \leq Z_{\text{HCK},i}; \\ (Z_{\text{грунт},i} - Z_{\text{HCK},i}) \cos(\alpha_{\text{T},i}), & Z_{\text{грунт},i} > Z_{\text{HCK},i}, \end{cases}$$

где  $Z_{\text{грунт},i}$  — вертикальная координата профиля неровности.

Далее рассчитывается эквивалентный угол  $\alpha_{\text{T,ЭКВ}}$  точки приложения радиальной реакции  $R_r$  и тангенциальной реакции  $R_\tau$  и эквивалентный прогиб эластичного колеса [10]:

$$\alpha_{\text{T,ЭКВ}} = \frac{\sum_i^{n_T} \alpha_{\text{T},i} \cdot q_{\text{T},i}}{\sum_i^{n_T} q_{\text{T},i}}; \quad q_{\text{T,ЭКВ}} = \frac{\sum_i^{n_T} q_{\text{T},i}}{n_T},$$

где  $n_T$  — число точек в полуокружности эластичного колеса.

Далее проецируется вектор линейных скоростей на оси микроподвижной системы координат с учетом эквивалентного угла  $\alpha_{\text{T,ЭКВ}}$  точки [10]:

$$v_{\text{к.х.МпСК}} = v_{\text{к.з}} \cdot \sin(\alpha_{\text{T,ЭКВ}}) + (v_{\text{к.х}} \cdot \cos(\beta) + v_{\text{к.у}} \cdot \sin(\beta)) \cdot \cos(\alpha_{\text{T,ЭКВ}});$$

$$v_{\text{к.у.МпСК}} = -v_{\text{к.х}} \cdot \sin(\beta) + v_{\text{к.з}} \cdot \cos(\beta);$$

$$v_{\text{к.з.МпСК}} = v_{\text{к.з}} \cdot \cos(\psi) \cos(\psi).$$

Скорость деформации профиля  $i$ -ой точки в радиальном направлении:

$$\frac{dq_{\text{T},i}}{dt} = \frac{dZ_{\text{грунт},i}}{dt} \cdot \cos(\alpha_{\text{T},i}) - v_{r,i},$$

где  $v_{r,i}$  — вектор линейной скорости  $i$ -ой точки в радиальном направлении, вычисляемая согласно:

$$v_{r,i} = v_{\text{х.МпСК},i} \cdot \sin(\alpha_{\text{T},i}) + v_{\text{з.МпСК},i} \cdot \cos(\alpha_{\text{T},i}).$$

Скорости точек контура эластичного колеса вычисляются по формуле [8, 10]:

$$v_{\text{х.МпСК},i} = \omega_k (r_0 - q_i) \cos(\alpha_{\text{T},i}) + v_{\text{к.х.МпСК}};$$

$$v_{\text{з.МпСК},i} = \omega_k (r_0 - q_i) \sin(\alpha_{\text{T},i}) + v_{\text{к.з.МпСК}}.$$

Сила взаимодействия с опорной поверхностью в соответствии с [1, 5–9] равна:

$$R_i = -\mu_s \cdot |P_{\text{ш},i}| \frac{v_{\text{СК}}}{|v_{\text{СК}}|};$$

$$\mu_s = \mu_{\text{сх.макс}} \cdot \left( 1 - e^{-\frac{s_k}{s_0}} \right) \cdot \left( 1 + e^{-\frac{s_k}{s_1}} \right),$$

где:  $P_{\text{ш},i}$  — радиальная реакция в шине  $i$ -го колеса;  $\mu_s$  — коэффициент трения частичного скольжения [1, 5–9] (рис. 5);  $\mu_{\text{сх.макс}}$  — коэффициент трения полного скольжения;  $s_k$  — коэффициент буксования  $s_k = v_{\text{СК}} / (\omega_k \cdot r_k)$  — для тягового режима,  $s_k = v_{\text{СК}} / v_{\text{к.х.МпСК}}$  — для тормозного режима,  $s_0$  — константа.

Предельная сила, в продольном и поперечном направлении, ограничена эллипсом трения. Так как предельная сила напрямую связана с коэффициентом трения предельного скольжения, тогда в качестве параметров эллипса будут приняты коэффициенты трения при полном буксовании на продольную ось  $X_{\text{МпСК}}$  и поперечную ось  $Y_{\text{МпСК}}$  соответственно:  $\mu_{\text{сх.макс}}$ ,  $\mu_{\text{сх.макс}}$  (рис. 6).

Коэффициент трения полного скольжения, зависящий от угла скольжения, может быть рассчитан по формуле:

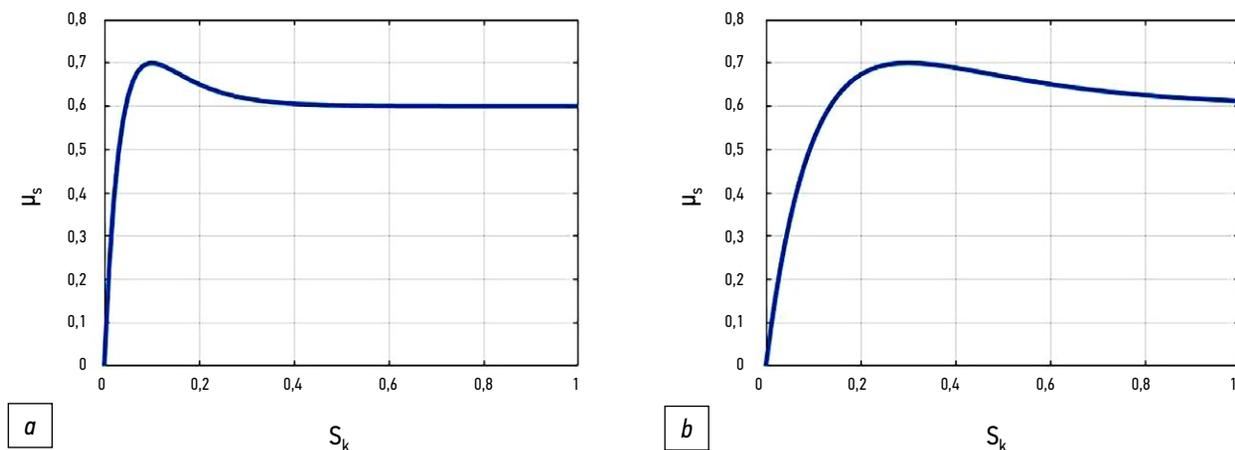
$$\mu_{\text{сх.макс}} = \frac{\mu_{\text{сх.макс}} \cdot \mu_{\text{сх.макс}}}{\sqrt{\mu_{\text{сх.макс}}^2 \cos^2(\alpha_{\text{СК}}) + \mu_{\text{сх.макс}}^2 \sin^2(\alpha_{\text{СК}})}}.$$

Радиальная и тангенциальная силы вычисляются по формулам [4, 8]:

$$R_r = \frac{P_{\text{ш},i}}{\cos(\alpha_{\text{T},i})};$$

$$R_\tau = R_r \cdot \mu_s.$$

Все силы, действующие на корпус модели автомобиля, должны быть спроецированы на оси подвижной си-



**Рис. 5.** Графики функции  $\mu_s(s_k)$  при различных значениях  $\mu_{s\alpha, \max}$  и  $s_0$  для связных грунтов: а)  $\mu_{s\alpha, \max} = 0,6$ ;  $s_0 = 0,0458$ ;  $s_1 = 0,0864$ ; б)  $\mu_{s\alpha, \max} = 0,6$ ;  $s_0 = 0,1373$ ;  $s_1 = 0,2539$ .  
**Fig. 5.** Graphs of the  $\mu_s(s_k)$  function at various values  $\mu_{s\alpha, \max}$  and  $s_0$  for cohesive soils: а)  $\mu_{s\alpha, \max} = 0,6$ ;  $s_0 = 0,0458$ ;  $s_1 = 0,0864$ ; б)  $\mu_{s\alpha, \max} = 0,6$ ;  $s_0 = 0,1373$ ;  $s_1 = 0,2539$ .

стемы координат, для чего необходим переход от микроподвижной системы координат колеса к подвижной системе. Сначала вычисляются проекции суммарной реакции на оси микроподвижной системы координат [8, 10]:

$$R_{x, \text{МпСК}} = -(R_t \cos(\alpha_{\text{Т.ЭКВ}}) - R_r \sin(\alpha_{\text{Т.ЭКВ}})) \cos(\alpha_{\text{СК}});$$

$$R_{y, \text{МпСК}} = -R_r \cdot \mu_s \cdot \sin(\alpha_{\text{СК}});$$

$$R_{z, \text{МпСК}} = R_t \sin(\alpha_{\text{Т.ЭКВ}}) - R_r \cos(\alpha_{\text{Т.ЭКВ}}),$$

где

$$\cos(\alpha_{\text{СК}}) = \frac{v_{x, \text{СК}}}{v_{\text{СК}}}, \quad \sin(\alpha_{\text{СК}}) = \frac{v_{y, \text{СК}}}{v_{\text{СК}}}.$$

Перенос проекций от микроподвижной системы координат на подвижную осуществляется по следующим формулам [8, 10]:

$$R_{x, \text{ПСК}} = (R_{x, \text{МпСК}} \cos(\alpha_{\text{Т.ЭКВ}}) - R_r \sin(\alpha_{\text{Т.ЭКВ}})) \cdot \cos(\beta) - R_{y, \text{МпСК}} \sin(\beta);$$

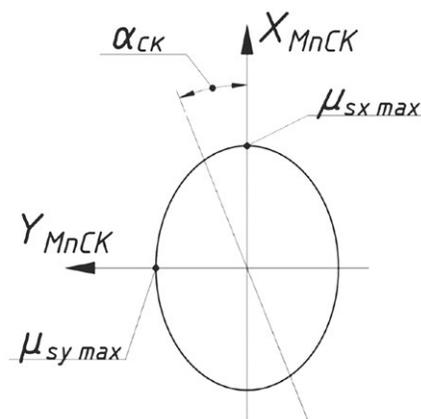
$$R_{y, \text{ПСК}} = R_{x, \text{МпСК}} \sin(\beta) + R_{y, \text{МпСК}} \cos(\beta);$$

$$R_{z, \text{ПСК}} = R_{z, \text{МпСК}} \cos(\psi) \cos(\varphi).$$

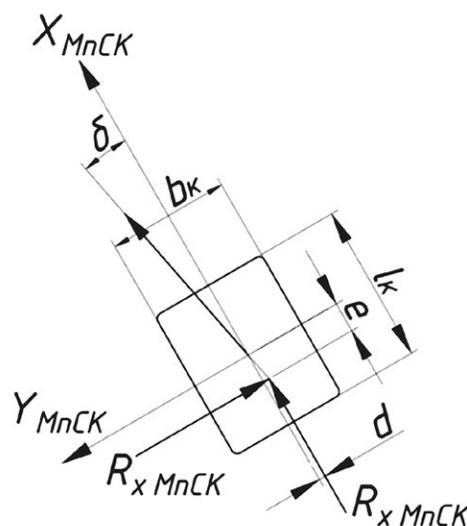
Также моделируются моменты сопротивления качения и момент сопротивления повороту. Момент сопротивления качению вызванный продольным смещением радиальной реакции  $R_r$ , рассчитываются согласно:

$$M_{JR} = R_{z, \text{МпСК}} (r_0 - q_{\text{Т.ЭКВ}}) \sin(\alpha_{\text{Т.ЭКВ}}).$$

Общий момент сопротивления повороту состоит из момента сопротивления повороту колеса



**Рис. 6.** Эллипс трения.  
**Fig. 6.** Ellipsis of friction.



**Рис. 7.** Расчетная схема действия боковой силы на эластичное колесо.  
**Fig. 7.** Analytical scheme of lateral force acting at an elastic wheel.

и стабилизирующего момента, возникающего при уводе (рис. 7). Момент сопротивления согласно [8, 11] можно рассчитать по следующей формуле:

$$M_{н.к.макс} = 0.375 \cdot \mu_{ср.макс} \cdot R_{z.МпСК} \sqrt{\frac{\pi l_k b_k}{4}},$$

где  $l_k$  — длина пятна контакта;  $b_k$  — ширина пятна контакта.

Длина пятна контакта вычисляется по формуле:

$$l_k = 2\sqrt{r_k^2 - (r_k - q_{т.э.кв})^2}.$$

Для поворачивающегося катящегося колеса момент сопротивления повороту колеса и стабилизирующий момент колеса примут вид [11]:

$$M_{н.к} = \frac{M_{н.к.макс}}{\left(1 + 0,15 \left(\frac{R_{н.к}}{b_k}\right)\right)};$$

$$M_{ст} = R_{y.к.МпСК} \cdot e + R_{x.к.МпСК} \cdot d,$$

где:  $R_{н.к}$  — радиус траектории катящегося колеса;  $e$  — плечо поперечной реакции,  $e = l_k/6$ ;  $d$  — плечо продольной реакции,  $d = \text{tg}(\delta)e$ .

Общий момент сопротивления повороту колеса равен:

$$M_{\Sigma сп} = M_{н.к} + M_{ст}.$$

## РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПОДВЕСКИ

При моделировании движения автомобиля моделируется перемещение центра колеса относительно корпуса в вертикальном направлении [12]. Силы в шине и подвеске зависят от их упругодемпфирующих свойств. Принято, что колесо перемещается вертикально, параллельно вертикальной оси подвижной системы координат.

Расчетная схема, согласно которой составляется дифференциальное уравнение, показана на (рис. 8):

$$m_k \ddot{z}_{к.и} = P_{ш.и} - P_{z.подв.и} - m_k g,$$

где  $m_k$  — масса колеса;  $g$  — ускорение свободного падения;  $\ddot{z}_{к.и}$  — ускорение центра колеса в вертикальном направлении;  $P_{z.подв.и}$  — сила со стороны подвески.

Радиальная реакция в шине  $P_{ш.и}$ , зависит от упругодемпфирующих свойств [1, 5–9]:

$$P_{ш.и} = P_{ш.у.и} + P_{ш.д.и},$$

где  $P_{ш.у.и} = f(h_{ш.и})$ ,  $P_{ш.д.и} = f(\dot{h}_{ш.и})$  — упругая и демпфирующая силы в шине, которая является функцией от прогиба шины.

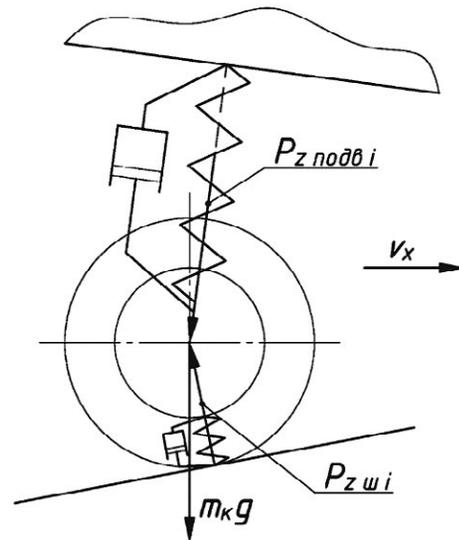


Рис. 8. Расчетная схема подвески.  
Fig. 8. Analytical scheme of suspension.

Сила в подвеске  $P_{подв.и}$ , так же зависит от упруго-демпфирующих свойств [1, 5–9]:

$$P_{подв.и} = P_{подв.у.и} + P_{подв.д.и},$$

где  $P_{подв.у.и} = f(h_{подв.и})$ ,  $P_{подв.д.и} = f(\dot{h}_{подв.и})$  — упругая и демпфирующая силы в подвеске, которая является функцией от прогиба подвески.

Моменты сил, действующие на автотранспортное средство в подвижной системе координат, зависят от усилий, прикладываемых на корпус автомобиля и координат точек приложения этих усилий относительно центра масс. С учетом того, что в качестве координат точек приложения усилий выступают геометрические характеристики корпуса, моменты сил от колес относительно осей подвижной системы координат записаны ниже:

$$M_x(R_i) = R_{z.i} \cdot (B_k / 2) - R_{y.i} \cdot Z_k;$$

$$M_y(R_i) = R_{x.i} \cdot Z_k - R_{z.i} \cdot (L_k / 2);$$

$$M_z(R_i) = R_{y.i} \cdot (L_k / 2) - R_{x.i} \cdot (B_k / 2),$$

где  $B_k$  — колея колес;  $Z_k$  — вертикальная координата крепления колес;  $L_k$  — колесная база.

Похожим образом записываются моменты внешних сил, приложенных на корпус колесной машины:

$$M_x(F) = F_{z.i} \cdot y - F_{y.i} \cdot z;$$

$$M_y(F) = F_{x.i} \cdot z - F_{z.i} \cdot x;$$

$$M_z(F) = F_{y.i} \cdot x - F_{x.i} \cdot y.$$

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИГАТЕЛЯ И ТРАНСМИССИИ

В разрабатываемой модели трансмиссии принимается ограничение [8], что не учитываются потери в трансмиссии и упругие свойства валов [13]. Рассмотрены следующие узлы: двигатель, коробка передач, главная передача.

Уравнение динамики вала двигателя принимает вид [8]:

$$J_{\text{дв}} \cdot \dot{\omega}_{\text{дв}} = M_{\text{кр.дв}} - M_{\text{с.дв}},$$

где  $J_{\text{дв}}$  — момент инерции движущихся частей двигателя;  $\dot{\omega}_{\text{дв}}$  — угловое ускорение вала двигателя;  $M_{\text{кр.дв}}$  — крутящий момент двигателя;  $M_{\text{с.дв}}$  — момент сопротивления, приложенный к валу двигателя.

Система уравнений коробки передач [8]:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_{\text{дв}} = i_{\text{кп}} \cdot \dot{\omega}_{\text{кп}}; \\ J_{\text{кп}} \cdot \dot{\omega}_{\text{кп}} = M_{\text{кр.кп}} - M_{\text{с.кп}}, \end{cases}$$

где  $J_{\text{кп}}$  — момент инерции движущихся частей коробки передач;  $\dot{\omega}_{\text{кп}}$  — угловое ускорение выходного вала коробки передач;  $i_{\text{кп}}$  — передаточное число коробки передач;  $M_{\text{кр.кп}}$  — крутящий момент на выходном валу коробки передач;  $M_{\text{с.кп}}$  — момент сопротивления, приложенный от главной передачи к выходному валу коробки передач.

Система уравнений передней главной передачи [8]:

$$\begin{cases} J_{\text{к}} \cdot \dot{\omega}_{\text{к.прав}} = i_{\text{гп}} \cdot \frac{M_{\text{кр.вх}}}{2} - M_{\text{с.прав}}; \\ J_{\text{к}} \cdot \dot{\omega}_{\text{к.лев}} = i_{\text{гп}} \cdot \frac{M_{\text{кр.вх}}}{2} - M_{\text{с.лев}}; \\ \dot{\omega}_{\text{вх}} = i_{\text{гп}} \cdot \frac{\dot{\omega}_{\text{к.прав}} + \dot{\omega}_{\text{к.лев}}}{2}, \end{cases}$$

где  $\dot{\omega}_{\text{к.прав}}$  — угловое ускорение выходного вала правого колеса;  $\dot{\omega}_{\text{к.лев}}$  — угловое ускорение выходного вала левого колеса;  $\dot{\omega}_{\text{вх}}$  — угловое ускорение входного вала;  $i_{\text{гп}}$  — передаточное число главной передачи;  $M_{\text{кр.вх}}$  — крутящий момент входного вала главной передачи;  $M_{\text{с.прав}}$ ,  $M_{\text{с.лев}}$  — момент сопротивления, приложенный к правой и левой полуосей.

## ВЕРИФИКАЦИЯ ВИРТУАЛЬНОГО ПРОТОТИПА

Испытательные заезды проводились на дорогах Инновационного центра «Сколково». В заездах использовался автомобиль Toyota Prius Hybrid (рис. 9). Через бортовую информационную шину CAN, посредством бортовых датчиков записывались сигналы продольного и поперечного ускорения, угловой скорости вокруг вертикальной оси, угла положения рулевого колеса, частот вращения колес.

Заезд проводился по замкнутой траектории изображенной на рис. 10.

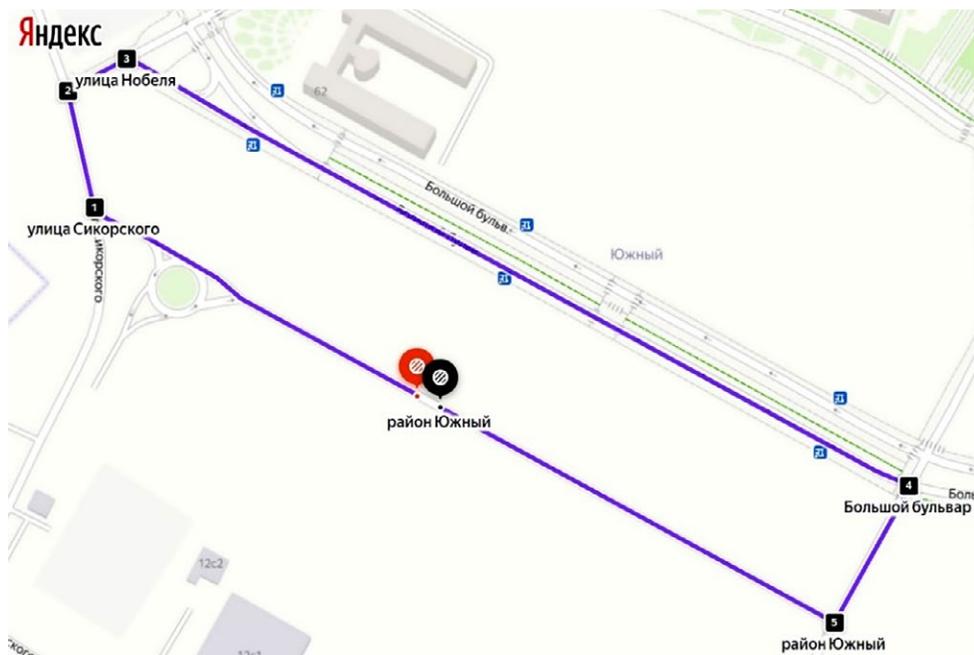
## РЕЗУЛЬТАТЫ

Вначале проводится заезд, а затем сравниваются параметры движения автомобиля. На рис. 11 показана траектория движения цифрового двойника автомобиля. Откуда видно, что транспортное средство вернулось в точку старта.

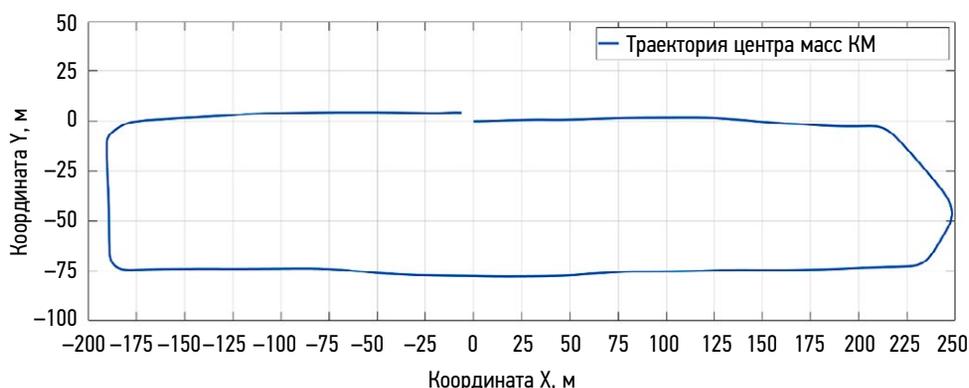
При сравнении испытания и моделирования движения (табл. 1) выяснилось, что относительная среднеквадратическая ошибка ускорений составила 15,37% и 16,7% соответственно. В то время как относительная среднеквадратическая ошибка угловой



**Рис. 9.** Автомобиль Toyota Prius Hybrid во время заездов.  
**Fig. 9.** The Toyota Prius Hybrid during the events.



**Рис. 10.** Маршрут испытательного заезда.  
**Fig. 10.** The vehicle motion route.



**Рис. 11.** Траектория центра масс математической модели цифрового двойника автомобиля.  
**Fig. 11.** Path of the center of gravity of the mathematical model of the vehicle's digital twin.

скорости вращения автомобиля вокруг вертикальной оси составила 8,09% (рис. 12).

**Таблица 1.** Результаты верификационных заездов  
**Table 1.** Results of verification events

Относительная среднеквадратическая ошибка:	Заезд на территории «Сколково»
Продольное ускорение	15,37 %
Поперечное ускорение	16,7 %
Угловая скорость вращения КМ	8,09 %

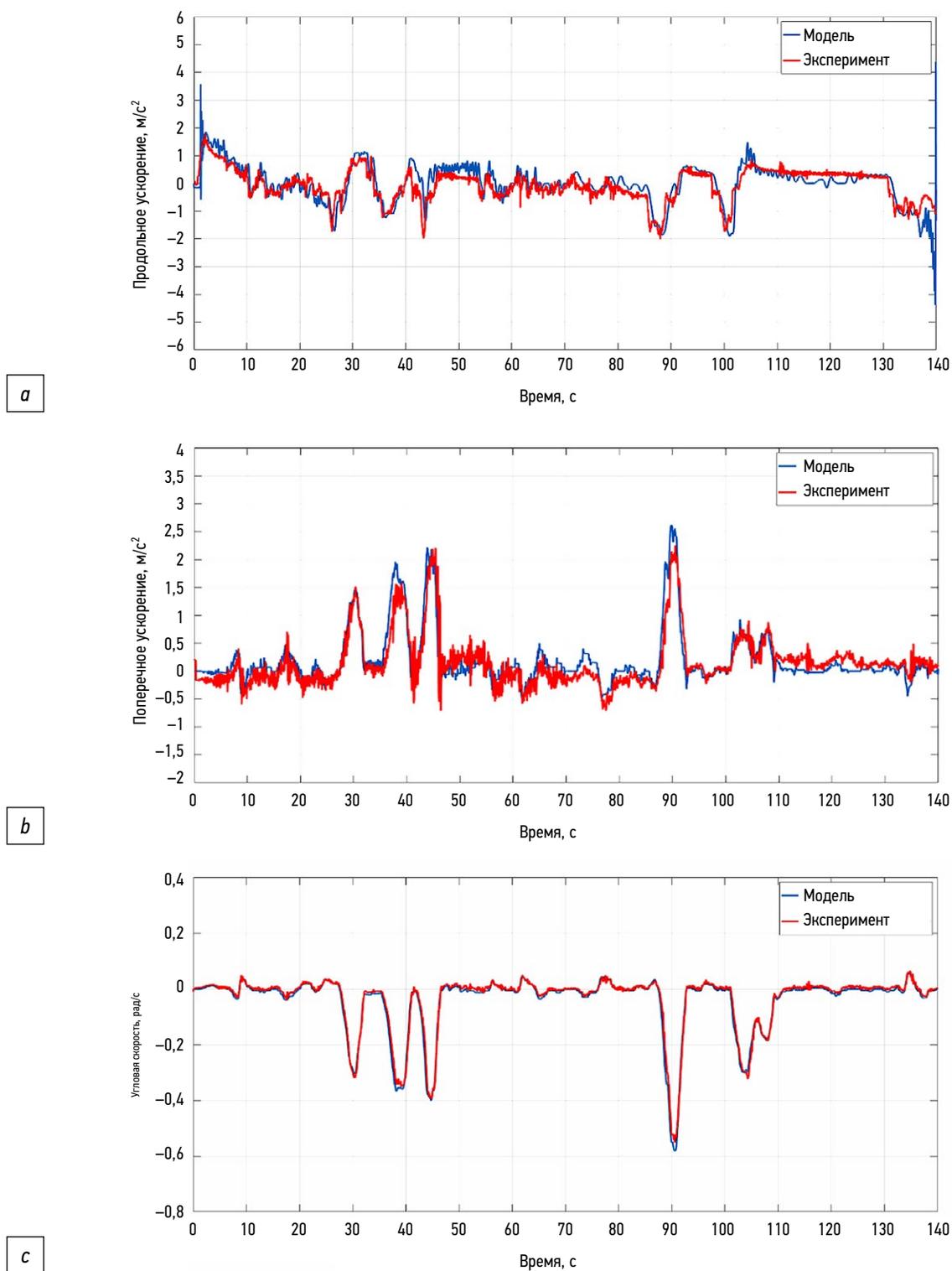
Результаты свидетельствуют о возможности ее дальнейшего применения для исследования для задач исследования динамики автотранспортных средств.

## ВЫВОДЫ

В работе представлена математическая модель движения автотранспортного средства в среде имитационного моделирования MATLAB&Simulink, с различными схемами трансмиссии. В математической модели учтены такие явления как скольжение колеса в боковом направлении, деформация шины при движении по неровной недеформируемой опорной поверхности. Верификационные заезды показали работоспособность и адекватность разработанного цифрового прототипа.

## ДОПОЛНИТЕЛЬНО

**Вклад авторов.** А.В. Антонян — разработка математической модели движения автотранспортного средства,



**Рис. 12.** Сравнение параметров движения автомобиля: *a)* — продольное ускорение, *b)* — поперечное ускорение, *c)* — угловая скорость.

**Fig. 12.** Comparison of vehicle motion indicators: *a)* longitudinal acceleration; *b)* lateral acceleration; *c)* yaw rate.

проведение верификационных испытаний; М.М. Жилейкин — разработка математической модели движения автотранспортного средства, проведение верификационных испытаний; Ю.М. Фурлетов — разработка математической модели движения автотранспортного средства, поиск литературных источников. Авторы подтверждают соответствие своего авторства международным критериям *ICMJE* (все авторы внесли существенный вклад в разработку концепции, проведение исследования и подготовку статьи, прочли и одобрили финальную версию перед публикацией).

**Конфликт интересов.** Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

**Источник финансирования.** Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках проекта «Разработка математической модели эксплуатации шасси (трансмиссии, ходовой части и механизмов управления) в статическом и динамическом состоянии и создание на ее основе цифрового двойника платформы легкового автомобиля» (шифр: FZRR-2023-0007).

## ADDITIONAL INFORMATION

**Authors' contribution.** A.V. Antonyan — development of a mathematical model of the movement of a motor vehicle, conducting verification tests; M.M. Zhileikin — development of a mathematical model of the movement of a motor vehicle, conducting verification tests; Yu.M. Furletov — development of a mathematical model of the movement of a motor vehicle, search for literary sources. All authors made a substantial contribution to the conception of the work, acquisition, analysis, interpretation of data for the work, drafting and revising the work, final approval of the version to be published and agree to be accountable for all aspects of the work.

**Competing interests.** The authors declare that they have no competing interests.

**Funding source.** The research was carried out with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the project “Development of a mathematical model of chassis operation (transmission, chassis and control mechanisms) in static and dynamic states and creation of a digital twin of a passenger car platform on its basis” (code: FZRR-2023-0007).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жилейкин М.М. Теоретические основы повышения показателей устойчивости и управляемости колесных машин на базе методов нечеткой логики. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016.
2. Dygalo V., Keller A., Shcherbin A. Principles of application of virtual and physical simulation technology in production of digital twin of active vehicle safety systems // *Transportation Research Procedia*. 2020. Vol. 50. P. 121–129. doi: 10.1016/j.trpro.2020.10.015
3. Дронг В.И., Дубинин В.В., Ильин М.М. и др. Курс теоретической механики: учеб. для вузов. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011.
4. Бюшгенс Г.С., Студнев Р.В. Динамика самолета. Пространственное движение. М.: Машиностроение, 1983.
5. Дик А.Б. Расчет стационарных и нестационарных характеристик тормозящего колеса при движении с уводом: Дисс. ... канд. техн. наук. Омск, 1988.
6. Рождественский Ю.Л., Машков К.Ю. О формировании реакции при качении упругого колеса по недеформируемому опорному основанию // *Труды МВТУ*. 1982. № 390. С. 56–64.
7. Aliukov S., Keller A., Alyukov A. Method of Calculating of Relay Type Free-Wheel Mechanism // *SAE Technical Paper*. 2015. P. 2015-01-2782. doi: 10.4271/2015-01-2782

8. Антонян А.В. Повышение устойчивости и управляемости автомобилей колесной формулой 4x4 путем перераспределения подводимых к колесам вращающихся моментов. Дисс. ... канд. техн. наук. М., 2021.
9. Жилейкин М.М., Котиев Г.О. Моделирование систем транспортных средств: учебник. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2021.
10. Жилейкин М.М., Падалкин Б.В. Математическая модель качения эластичного колеса по неровностям недеформируемого опорного основания // *Известия ВУЗов. Машиностроение*. 2016. № 3. С. 24–29.
11. Смирнов Г.А. Теория движения колесных машин. М.: Машиностроение, 1990.
12. Dubrovskiy A., Aliukov S., Keller A., et al. Adaptive Suspension of Vehicles with Wide Range of Control // *SAE Technical Paper*. 2016. P. 2016-01-8032. doi: 10.4271/2016-01-8032
13. Keller A., Aliukov S. Effectiveness of Methods of Power Distribution in Transmissions of All-Wheel-Drive Trucks // *SAE Technical Paper*. 2015. P. 2015-01-2732. doi: 10.4271/2015-01-2732

## REFERENCES

1. Zhileikin MM. *Theoretical foundations for increasing the stability and controllability of wheeled vehicles based on fuzzy logic methods*. Moscow: MG TU im NE Bauman; 2016. (In Russ).
2. Dygalo V, Keller A, Shcherbin A. Principles of application of virtual and physical simulation technology in production of digital twin of active vehicle safety systems. *Transportation Research Procedia*. 2020;50:121–129. doi: 10.1016/j.trpro.2020.10.015
3. Drong VI, Dubinin VV, Ilyin MM, et al. *Course of theoretical mechanics: textbook*. Moscow: MG TU im NE Bauman; 2011. (In Russ).
4. Byushgens GS, Studnev RV. *Aircraft dynamics. Spatial movement*. Moscow: Mashinostroenie; 1983. (In Russ).
5. Dik AB. *Raschet stacionarnykh i nestacionarnykh kharakteristik tormozyashchego kolesa pri dvizhenii s uvodom [dissertation]* Omsk; 1988. (In Russ).

6. Rozhdestvensky YuL, Mashkov KYu. On the formation of a reaction when an elastic wheel rolls on a non-deformable support base. *Trudy MVTU*. 1982;390:56–64. (In Russ).
7. Aliukov S, Keller A, Alyukov A. Method of Calculating of Relay Type Free-Wheel Mechanism. *SAE Technical Paper*. 2015:2015-01-2782. doi: 10.4271/2015-01-2782
8. Antonyan AV. Povyshenie ustoychivosti i upravlyaemosti avtomobiley kolesnoy formu-loy 4kh4 putem pereraspredeleniya podvodimyykh k kolesam vrashchayushchikh momentov [dissertation] Moscow; 2021. (In Russ).
9. Zhileikin MM, Kotiev GO. *Modeling Vehicle Systems: A Tutorial*. Moscow: MGTU im NE Baumana; 2021. (In Russ).
10. Zhileikin MM, Padalkin BV. Mathematical model of elastic wheel rolling over unevenness of a non-deformable support base. *Izvestiya VUZov. Mashinostroenie*. 2016;3:24–29. (In Russ).
11. Smirnov GA. Theory of movement of wheeled vehicles. Moscow: Mashinostroenie; 1990. (In Russ).
12. Dubrovskiy A, Aliukov S, Keller A, et al. Adaptive Suspension of Vehicles with Wide Range of Control. *SAE Technical Paper*. 2016:2016-01-8032. doi: 10.4271/2016-01-8032
13. Keller A, Aliukov S. Effectiveness of Methods of Power Distribution in Transmissions of All-Wheel-Drive Trucks. *SAE Technical Paper*. 2015:2015-01-2732. doi: 10.4271/2015-01-2732

## ОБ АВТОРАХ

### \* Жилейкин Михаил Михайлович,

д-р техн. наук,  
руководитель группы инженерных расчетов;  
профессор Передовой инженерной школы электротранспорта;  
адрес: Российская Федерация, 121205, Москва,  
Инновационный центр Сколково, Большой б-р, д. 62;  
ORCID: 0000-0002-8851-959X;  
eLibrary SPIN: 6561-3300;  
e-mail: jileykin\_m@mail.ru

### Антонян Аноп Ваганович,

канд. техн. наук,  
главный специалист по программированию и имитационному моделированию;  
доцент Передовой инженерной школы электротранспорта;  
ORCID: 0000-0002-5566-6569;  
eLibrary SPIN: 4797-9808;  
e-mail: AntonyanAV@kamaz.ru

### Фурлетов Юрий Михайлович,

канд. техн. наук,  
доцент Передовой инженерной школы электротранспорта;  
ORCID: 0000-0002-7131-0933;  
eLibrary SPIN: 4919-9869;  
e-mail: yury.furletov@gmail.com

## AUTHORS' INFO

### \* Mikhail M. Zhileikin,

Dr. Sci. (Tech.),  
Head of the Engineering Calculations Group; Professor  
of the Advanced Engineering School of Electric Transport;  
address: 62 Bolshoy boulevard, Skolkovo Innovation Center,  
121205 Moscow, Russian Federation;  
ORCID: 0000-0002-8851-959X;  
eLibrary SPIN: 6561-3300;  
e-mail: jileykin\_m@mail.ru

### Akop V. Antonyan,

Cand. Sci. (Tech.),  
Lead Software and Simulation Engineer;  
Associate Professor of the Advanced Engineering School  
of Electric Transport;  
ORCID: 0000-0002-5566-6569;  
eLibrary SPIN: 4797-9808;  
e-mail: AntonyanAV@kamaz.ru

### Yury M. Furletov,

Cand. Sci. (Tech.),  
Associate Professor of the Advanced Engineering School  
of Electric Transport;  
ORCID: 0000-0002-7131-0933;  
eLibrary SPIN: 4919-9869;  
e-mail: yury.furletov@gmail.com

\* Автор, ответственный за переписку / Corresponding author