DOI: https://doi.org/10.17816/0321-4443-629390

Оригинальное исследование

Методика расчёта опорных реакций статически неопределимого вала центральной передачи тракторного ведущего моста

К.Н. Серов, С.И. Худорожков

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация

АННОТАЦИЯ

Обоснование. В настоящее время в конструкции ведущих мостов транспортных средств применяются центральные передачи, образующие как статически определимые системы, так и статически неопределимые. В первом случае подшипники, на которые опираются валы центральной передачи, образуют два ряда тел качения, во втором случае — три или более. Несмотря на распространённость конструкций центральной передачи, образующих статически неопределимые системы, в процессе обучения проектированию и расчёту деталей машин рассматриваются статически определимые конструкции. Актуальность работы заключается в формализации аналитического расчёта реакций опор центральной передачи, образующей статически неопределимую систему, с выводом формул для определения реакций в лишней (дополнительной) опоре.

Цель работы — формализация метода расчёта опорных реакций центральной передачи ведущего моста, образующей статически неопределимую систему, для расчёта подшипников.

Методы. В работе используются математические зависимости теоретической механики для расчета реакций в основных опорах, следствие теоремы Кастилиано и метод сил для расчета реакций в лишних (дополнительных) опорах. Для математических расчётов использовано программного обеспечение «Mathcad».

Результаты и обсуждение. Разработана и представлена формализованная методика для аналитического расчёта опорных реакций в статически неопределимых системах, использующая теорему Кастилиано для раскрытия статической неопределимости. Рассмотрено применение методики для расчёта опорных реакций статически неопределимого ведущего вала центральной передачи ведущего моста тракторов «Кировец» серии К-7.

Заключение. Полученные в ходе расчётов зависимости позволяют рассчитывать опорные реакции центральной передачи, образующей статически неопределимую систему. Полученная в ходе расчётов математическая модель центральной передачи может быть использована в качестве основы для разработки программного обеспечения, автоматизирующего расчёт.

Ключевые слова: статически неопределимая система; расчёт подшипников; центральная передача; ведущий мост; теорема Кастилиано.

Как цитировать:
Серов К.Н., Худорожков С.И. Методика расчёта опорных реакций статически неопределимого вала центральной передачи тракторного ведущего моста // Тракторы и сельхозмашины. 2024. Т. 91, № 5. С. 572–583. DOI: https://doi.org/10.17816/0321-4443-629390

Рукопись получена: 24.03.2024 **Рукопись одобрена:** 28.07.2024 **Опубликована online:** 09.11.2024

Статья доступна по лицензии CC BY-NC-ND 4.0 International
© Эко-Вектор, 2024

DOI: https://doi.org/10.17816/0321-4443-629390

Original Study Article

The method for calculating the support reactions of a statically indeterminable final drive shaft of a tractor drive axle

Kirill N. Serov, Sergey I. Hoodorozhkov

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Saint Petersburg, Russian Federation

ABSTRACT

BACKGROUND: Currently, in the design of vehicle drive axles, bevel final drives are used, forming both statically determinable structures and statically indeterminable ones. In the first case, the bearings, on which the bevel final drive shafts rest, form two rows of rolling elements, in the second case — three or more. Despite the prevalence of bevel final drive designs that form statically indeterminable structures, the statically determinable structures are considered in the process of teaching the design and calculation of machine elements. The study relevance lies in the formalization of the analytical calculation of the reactions on the supports of the bevel final drive, forming a statically indeterminable system, with the derivation of formulae for determining the reactions in the extra support.

AIM: Formalization of the method for calculating the support reactions of the drive axle bevel final drive as a statically indeterminable system, used for analysis of bearings.

METHODS: The study is based on mathematical dependencies of Analytical Mechanics to calculate reactions in the main supports, a corollary of Castigliano theorem and the force method to calculate reactions in extra supports. The Mathcad software was used for mathematical calculations.

RESULTS: A formalized method for the analytical analysis of support reactions in statically indeterminable systems, using Castigliano theorem to solve static indetermination, has been developed and presented. The application of the method for calculating the support reactions of the statically indeterminable driveshaft of the bevel final drive of the drive axle of the Kirovets K-7 series tractors is considered.

CONCLUSION: The dependencies obtained during the calculations make it possible to calculate the support reactions of the bevel final drive, the design of which forms a statically indeterminable system. The mathematical model of the bevel final drive, obtained during the calculations, can be used as a basis for developing software that automates this analysis.

Keywords: statically indeterminable structure; analysis of bearings; final drive; drive axle; Castigliano theorem.

To cite this article:
Serov KN, Hoodorozhkov SI. The method for calculating the support reactions of a statically indeterminable tractor drive axle final drive shaft. *Tractors and Agricultural Machinery*. 2024;91(5):572–583. DOI: https://doi.org/10.17816/0321-4443-629390

Received: 24.03.2024 **Accepted:** 28.07.2024 **Published online:** 09.11.2024

moscow polytech

The article can be used under the CC BY-NC-ND 4.0 International license
© Eco-Vector, 2024

ECO•VECTOR

ВВЕДЕНИЕ

Система является статически определимой, если наложенные на неё связи обеспечивают её кинематическую неизменяемость, а число неизвестных сил не превышает число уравнений статики. Статически неопределимыми системами являются те, у которых число неизвестных силовых факторов превышает их количество, определяемое из уравнений равновесия твёрдого тела [1].

Для задач со статически неопределимыми системами существуют различные методы решения, такие как метод сил или метод перемещений. Однако в учебном процессе при изучении конструирования и расчёта деталей машин рассматриваются, как правило, статически определимые системы благодаря большей простоте и наглядности. Тем не менее, в практике проектирования узлов трансмиссий транспортных средств широко применяются статически неопределимые системы. Например, валы центральной передачи ведущих мостов тракторов и грузовых автомобилей, как правило, устанавливаются на трёх подшипниках качения. При расчёте подшипников в таких узлах применяются методы, раскрывающие статическую неопределимость и позволяющие определить величину опорных реакций, действующих на подшипники. Интерес представляет формализация методов раскрытия статической неопределимости при проектировании узлов трансмиссий транспортных средств, в частности, центральных передач, для расчёта подшипников.

ЦЕЛЬ ИССЛЕДОВАНИЯ

Целью работы является формализация методики определения опорных реакций в статически неопределимых центральных передачах ведущих мостов для расчёта подшипников.

Объектом исследования выбрана одинарная коническая центральная передача ведущего моста трактора «Кировец» К-7М так, как и ведущий, и ведомый валы данной центральной передачи установлены по схеме, образующей статически неопределимую систему, которая не рассматривается в литературе по проектированию трансмиссий транспортных средств.

МЕТОДЫ

Центральная передача тракторного ведущего моста состоит из ведущего и ведомого валов с коническими зубчатыми колёсами, находящимися в зацеплении (рис. 1, *a*).

Ведущий вал представляет собой вал-шестерню, закреплённую в картере центральной передачи на трёх однорядных подшипниках A’, A’’, B (рис. 1, *b*). Ведомый вал представляет собой сборочную единицу, состоящую из дифференциала в сборе и конического зубчатого колеса, закреплённого на нём (рис. 1, *c*). Ведомый вал закреплён в картере с помощью двухрядного подшипника C и однорядного подшипника D. Так как тела качения в подшипнике C расположены в два ряда, то и нормальных реакций в таком подшипнике будет две. Для определения реакций, действующих в двухрядном подшипнике, каждый ряд рассматривается по отдельности, условно заменяясь однорядным подшипником.

Возникающая в зацеплении конической передачи сила раскладывается на три составляющие: окружная, радиальная, осевая, воспринимаемые подшипниками и валами, на которых установлены зубчатые колеса.

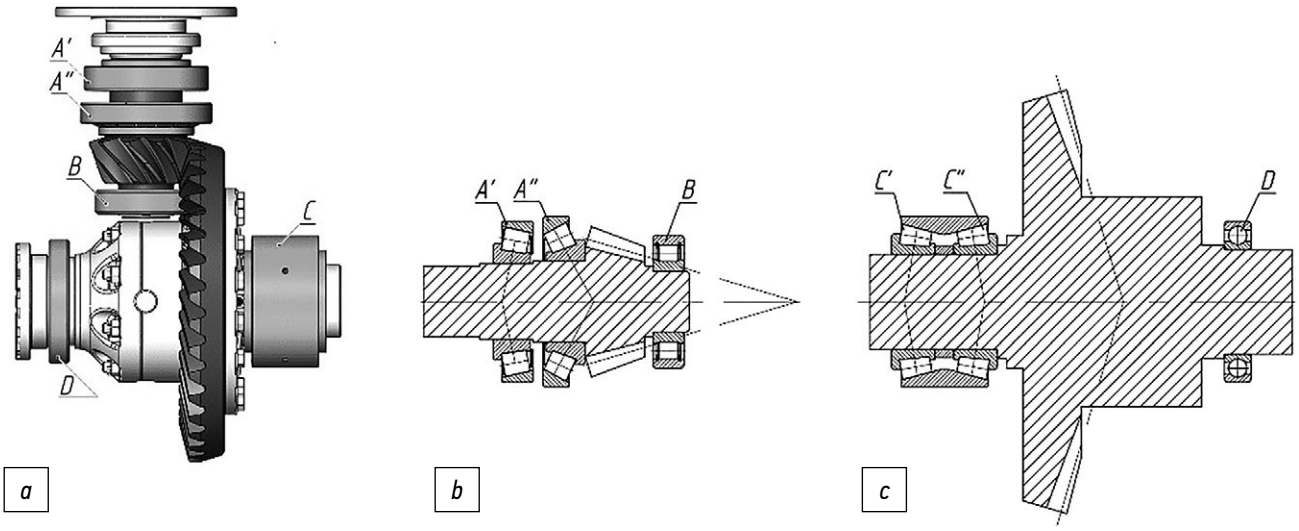

Рис 1. Центральная передача тракторного ведущего моста: *a* — центральная передача в сборе; *b* — эскиз ведущего вала; *c* — эскиз ведомого вала.
Fig 1. The bevel final drive of the tractor drive axle: *a* — the final drive assembly; *b* — a sketch of the input shaft; *c* — a sketch of the output shaft.

DOI: https://doi.org/10.17816/0321-4443-629390

За точку приложения сил принимают точку зацепления в средней плоскости колеса [2]. Радиальная сила F_r и изгибающий момент M_a, создаваемый осевой силой F_a создают поперечный изгиб; окружная сила F_t изгибает вал, а крутящий момент M, создаваемый ей, вал скручивает. Данные составляющие указываются на расчётной схеме валов. Также, при составлении расчётной схемы учитывается внутренняя геометрия подшипников для того, чтобы верно оценить координаты точек приложения нормальных реакций опор.

Смещение точки приложения реакции a для конических подшипников рассчитывается по следующей формуле [2]:

$$a = 0,5 \cdot \left(T + \frac{d + D}{4} \cdot e \right),$$

где: e — коэффициент влияния осевого нагружения. Рассчитывается по формуле [3]:

$$e = 1,5 \cdot \operatorname{tg} \alpha .$$

Для раскрытия статической неопределимости используется метод, в основе которого лежит теорема Кастилиано, применяемая для определения упругих перемещений в стержневых системах. Формулируется теорема Кастилиано следующим образом: обобщённое перемещение точки приложения обобщённой силы по направлению её действия равно частной производной от потенциальной энергии деформации по соответствующей этому перемещению обобщающей силе [1]. Формальная запись в соответствии с источником [4]:

$$\Delta = \frac{\partial U}{\partial X},$$

где U — потенциальная энергия деформации, Дж; X — обобщённая сила, Н.

Для системы с лишними связями энергия деформации имеет минимальное значение: $\Delta = 0$, и статически неопределимые усилия определяются из соотношения [4]:

$$0 = \frac{\partial U}{\partial X}. \qquad (1)$$

Потенциальная энергия деформации численно равна работе внешних сил при нагружении системы или работе внутренних сил, совершаемой в процессе разгрузки [1].

При изгибе вала потенциальная энергия деформации определяется по формуле [5]:

$$U = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \cdot \int_0^l \frac{M_x^2}{E \cdot J_z} \cdot dz , \qquad (2)$$

где: $E \cdot J_z$ — жёсткость поперечного сечения вала при изгибе; E — модуль упругости, Па; J_z — осевой момент инерции вала, кг·м^2; M_x — изгибающий момент, Н·м; l — длина участка вала, м; n — количество рассматриваемых участков.

При кручении вала, потенциальная энергия деформации вала определяется по формуле [6]:

$$U = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \cdot \int_0^l \frac{M_z^2}{G \cdot J_p} \cdot dz , \qquad (3)$$

где: G — модуль сдвига, Па; J_p — полярный момент инерции, кг·м^2; M_z — крутящий момент, Н·м; l — длина участка вала, м; n — количество рассматриваемых участков.

С учётом формулы (1), дифференцируя выражения (2) и (3), получаем:

$$\frac{1}{E \cdot J_z} \sum_{i=1}^{n} \int_0^{l_i} M_{x_i} \frac{\partial M_{x_i}}{\partial X} \cdot dz_i = 0 ,$$

$$\frac{1}{G \cdot J_p} \sum_{i=1}^{n} \int_0^{l_i} M_{z_i} \frac{\partial M_{z_i}}{\partial X} \cdot dz_i = 0 .$$

В силу того, что $\frac{1}{E \cdot J_z} \neq 0$ и $\frac{1}{G \cdot J_p} \neq 0$, получаем следующую общую формулу:

$$\sum_{i=1}^{n} \int_0^{l_i} M_i \frac{\partial M_i}{\partial X} \cdot dz_i = 0 . \qquad (4)$$

РЕЗУЛЬТАТЫ

Значения, сил, действующих в зацеплении конической передачи приведены в табл. 1. Данные были получены при расчете сил, действующих в элементах трансмиссии трактора «Кировец» К-7М на основании внешней скоростной характеристики двигателя, размера колёсных шин, массы трактора, передаточных чисел коробки переключения передач и геометрических

Таблица 1. Силы, действующие в зацеплении конической передачи
Table 1. Forces acting in the bevel gear coupling

Силовые параметры	Окружная сила, F_t, кН	Радиальная сила, F_r, кН	Осевая сила F_a, кН	Изгибающий момент, M_a, кН·м
Ведущая шестерня	41,016	9,258	33,039	1,898
Ведомое колесо	41,016	33,039	9,258	0,532

характеристик конических зубчатых колес центральной передачи.

Геометрические характеристики подшипников, устанавливаемых в качестве опор валов центральной передачи, приведены в табл. 2.

Ведущий вал

На рис. 2 приведена расчётная схема ведущего вала. На схеме обозначены три участка, на которых действуют напряжения: l_{11}, l_{12}, l_{13}, а общая длина участка составляет $L1$.

Исходя из геометрических размеров элементов, представленных на расчётной схеме, определены расчётные значения длин рассматриваемых участков (табл. 3).

Для раскрытия статической неопределимости по формуле (4) реакции B_x и B_y заменены обобщёнными силами X_x и X_y, соответственно, и составлены расчётные схемы сил, спроецированных на плоскости YOZ (рис. 3) и XOZ (рис. 4).

Для каждой проекции составлены уравнения моментов на каждом участке, чтобы найти обобщённую силу, и два уравнения равновесия, чтобы найти нормальные реакции в опорах A' и A''.

Вертикальная плоскость

Уравнения равновесия:

Первое уравнение равновесия:

$$\sum M_{i_{A''}} = 0;$$

$$-A''_y \cdot l_{11} + F_r \cdot (l_{11} + l_{12}) - M_a - X_Y \cdot L_1 = 0;$$

$$A''_y = \frac{F_r \cdot (l_{11} + l_{12}) - M_a - X_Y \cdot L_1}{l_{11}}. \quad (5)$$

Второе уравнение равновесия:

$$\sum M_{i_{A'}} = 0;$$

$$-A'_y \cdot l_{11} + F_r \cdot l_{12} - M_a - X_Y \cdot (l_{12} + l_{13}) = 0;$$

$$A'_y = \frac{M_a + X_Y \cdot (l_{12} + l_{13}) - F_r \cdot l_{12}}{l_{11}}. \quad (6)$$

Уравнения моментов:

Участок $0 \le z_{11} \le l_{11}$:

$$M_{x_{11}} = A'_y \cdot z_{11}.$$

С учётом выражения (6):

$$M_{x_{11}} = \frac{M_a + X_Y \cdot (l_{12} + l_{13}) - F_r \cdot l_{12}}{l_{11}} \cdot z_{11};$$

$$\frac{\partial M_{x_{11}}}{\partial X_Y} = \frac{z_{11} \cdot (l_{12} + l_{13})}{l_{11}}.$$

Участок $l_{11} \le z_{12} \le l_{11} + l_{12}$:

$$M_{x_{12}} = X_Y \cdot (l_{13} + z_{12}) - F_r \cdot z_{12} + M_a;$$

$$\frac{\partial M_{x_{12}}}{\partial X_Y} = l_{13} + z_{12}.$$

Таблица 2. Подшипники центральной передачи ведущего моста трактора «Кировец» серии К-7

Table 2. Bearings the bevel final drive of the drive axle of the Kirovets K-7 series tractor

Обозначение опоры	A'	A''	B	C	C', C''	D
Обозначение подшипника	7316A ГОСТ 27365-87	7317A ГОСТ 27365-87	102313A ГОСТ 8328-75	97520 ГОСТ 6364-78	7520A ГОСТ 27365-87	122 ГОСТ 8338-75
Диаметр отверстия, d, мм	80 [7]	85 [7]	65 [8]	100 [9]	100 [7]	110 [10]
Наружный диаметр, D, мм	170 [7]	180 [7]	140 [8]	180 [9]	180 [7]	170 [10]
Общая ширина, T, мм	42,5 [7]	44,5 [7]	33 [8]	112 [9]	49 [7]	28 [10]
Ширина внутреннего кольца, B, мм	39 [7]	41 [7]	33 [8]	46 [9]	46 [7]	28 [10]
Угол наклона дорожки качения, α, град	12°57'10'' [7]	12°57'10'' [7]	0	-	15°38'32'' [7]	0
Смещение точки приложения реакции, a, мм	35,625	37,488	0	-	44,1	0

Таблица 3. Геометрические характеристики ведущего вала

Table 3. Geometric characteristics of the input shaft

Участок	$L1$	l_{11}	l_{12}	l_{13}
Длина, мм	185,12	89,61	38,76	56,75

DOI: https://doi.org/10.17816/0321-4443-629390

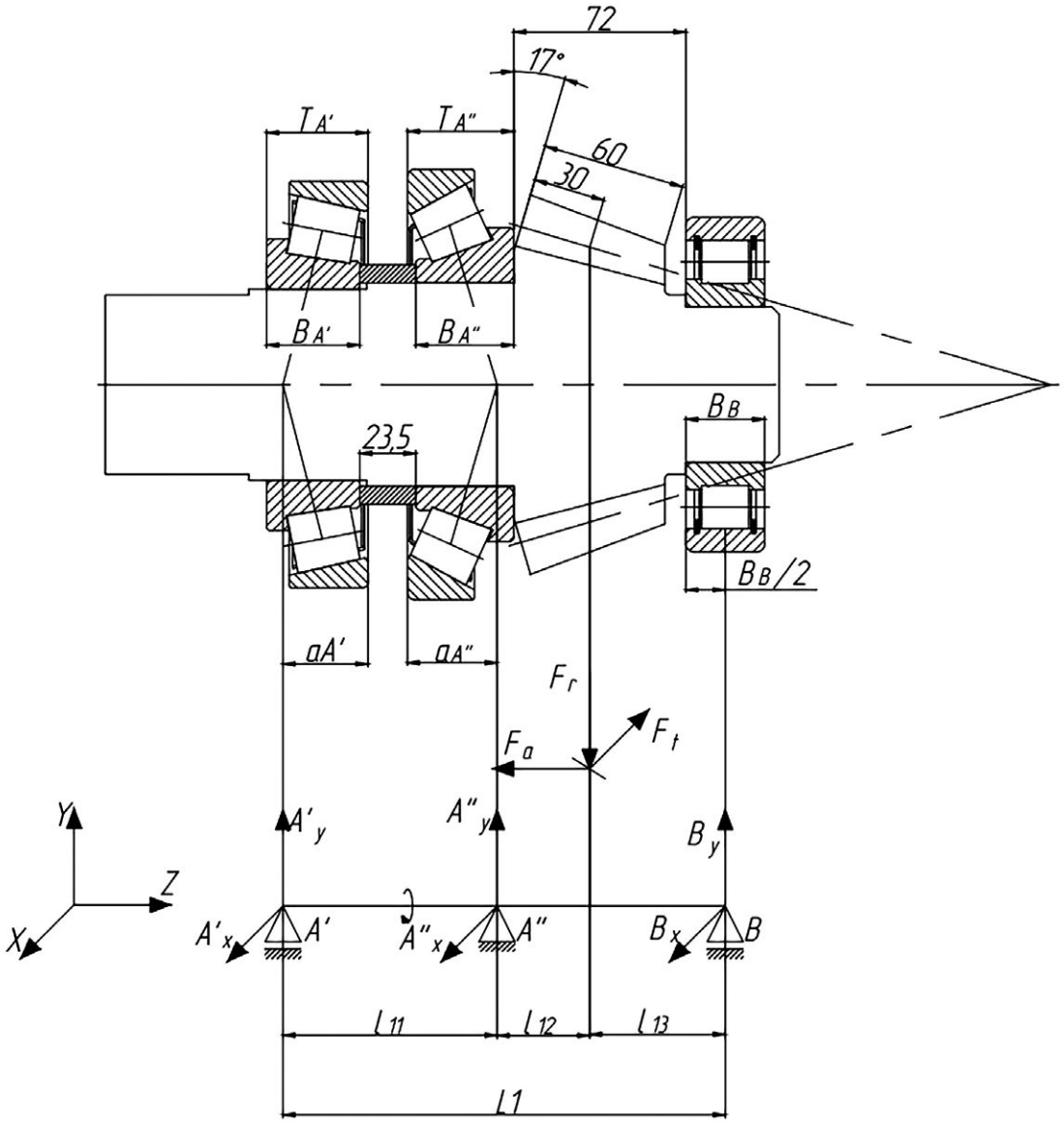

Рис. 2. Расчётная схема ведущего вала.
Fig. 2. Calculation scheme of the input shaft.

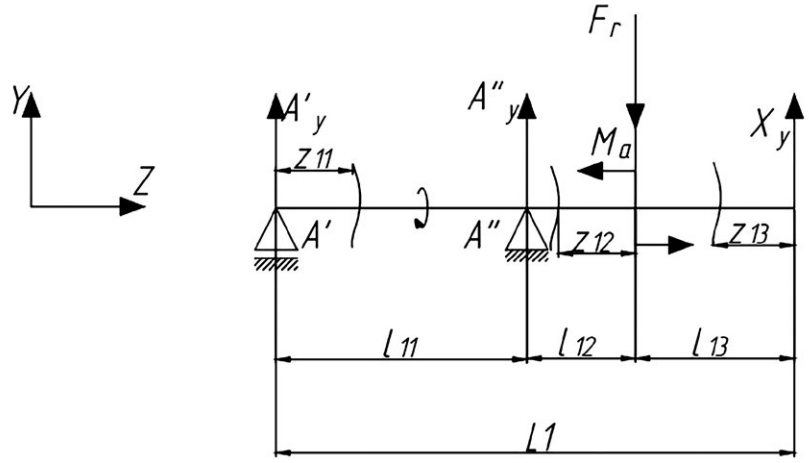

Рис. 3. Расчётная схема сил, спроецированных на плоскости YOZ.
Fig. 3. Calculation scheme of forces projected onto the YOZ plane.

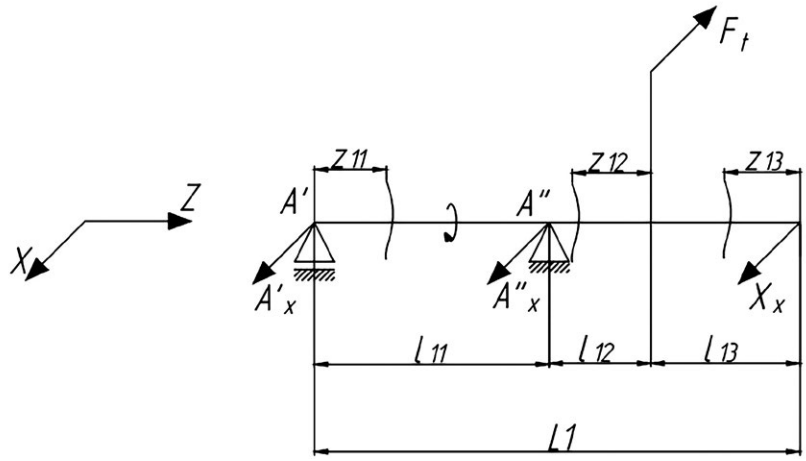

Рис. 4. Расчётная схема сил, спроецированных на плоскости XOZ.
Fig. 4. Calculation scheme of forces projected onto the XOZ plane.

Участок $0 \le z_{13} \le l_{13}$:

$$M_{x_{13}} = X_Y \cdot z_{13};$$

$$\frac{\partial M_{x_{13}}}{\partial X_Y} = z_{13}.$$

Равенство (4) для всего участка $L1$:

$$\int_0^{l_{11}} \left(\frac{M_a + X_Y \cdot \left(l_{12} + l_{13}\right) - F_r \cdot l_{12}}{l_{11}} \cdot z_{11} \right) \cdot \left[\frac{z_{11} \cdot \left(l_{12} + l_{13}\right)}{l_{11}} \right] dz_{11} +$$

$$+ \int_0^{l_{12}} \left(M_a + X_Y \cdot \left(l_{12} + l_{13}\right) - F_r \cdot l_{12} \right) \cdot \left[l_{13} + z_{12} \right] dz_{12} + \int_0^{l_{13}} z_{13} \cdot \left(X_Y \cdot z_{13} \right) dz_{13} = 0$$

$$\frac{X_Y \cdot l_{13}^3}{3} + \frac{l_{12} \cdot \left(2 \cdot X_Y \cdot l_{12}^2 - 2 \cdot F_r \cdot l_{12}^2 + 6 \cdot X_Y \cdot l_{13}^2 + 3 \cdot M_a \cdot l_{12}\right)}{6} +$$

$$+ \frac{l_{12} \cdot \left(6 \cdot M_a \cdot l_{13} - 3 \cdot F_r \cdot l_{12} \cdot l_{13} + 6 \cdot X_Y \cdot l_{12} \cdot l_{13}\right)}{6} +$$

$$+ \frac{l_{11} \cdot \left(l_{12} + l_{13}\right) \cdot \left(M_a - F_r \cdot l_{12} + X_Y \cdot \left(l_{12} + l_{13}\right)\right)}{3} = 0$$

Из последнего равенства выражается XY:

$$X_Y = \frac{\frac{l_{12} \cdot \left(2 \cdot F_r \cdot l_{12}^2 - 3 \cdot M_a \cdot l_{12} - 6 \cdot M_a \cdot l_{13} + 3 \cdot F_r \cdot l_{12} \cdot l_{13}\right)}{6} - \frac{l_{11} \cdot \left(M_a - F_r \cdot l_{12}\right) \cdot \left(l_{12} + l_{13}\right)}{3}}{\frac{l_{11} \cdot \left(l_{12} + l_{13}\right)^2}{3} + \frac{l_{13}^3}{3} + \frac{l_{12} \cdot \left(2 \cdot l_{12}^2 + 6 \cdot l_{12} \cdot l_{13} + 6 \cdot l_{13}^2\right)}{6}}. \quad (7)$$

Горизонтальная плоскость

Уравнения равновесия:

Первое уравнение равновесия:

$$\sum M_{i_{A''}} = 0;$$

$$-A'_X \cdot l_{11} + F_t \cdot l_{12} - X_X \cdot \left(l_{12} + l_{13}\right) = 0;$$

$$A'_X = \frac{X_X \cdot \left(l_{12} + l_{13}\right) - F_t \cdot l_{12}}{l_{11}}. \qquad (8)$$

Второе уравнение равновесия:

$$\sum M_{i_{A'}} = 0;$$

$$-A''_X \cdot l_{11} + F_t \cdot \left(l_{12} + l_{13}\right) - X_X \cdot L_1 = 0;$$

$$A''_X = \frac{F_t \cdot \left(l_{12} + l_{13}\right) - X_X \cdot L_1}{l_{11}}. \qquad (9)$$

Уравнения моментов:

Участок $0 \le z_{11} \le l_{11}$:

$$M_{y_{11}} = A'_x \cdot z_{11}$$

С учётом выражения (8):

$$M_{y_{11}} = \frac{X_X \cdot \left(l_{12} + l_{13}\right) - F_t \cdot l_{12}}{l_{11}} \cdot z_{11};$$

$$\frac{\partial M_{y_{11}}}{\partial X_X} = \frac{z_{11} \cdot \left(l_{12} + l_{13}\right)}{l_{11}}$$

Участок $l_{11} \le z_{12} \le l_{11} + l_{12}$:

$$M_{y_{12}} = X_X \cdot \left(l_{13} + z_{12}\right) - F_t \cdot z_{12};$$

$$\frac{\partial M_{y_{12}}}{\partial X_X} = l_{13} + z_{12}.$$

Участок $0 \le z_{13} \le l_{13}$:

$$M_{y_{13}} = X_X \cdot z_{13};$$

$$\frac{\partial M_{y_{13}}}{\partial X_X} = z_{13}.$$

Равенство (4) для всего участка $L1$:

$$\int_0^{l_{11}} \left(\frac{X_X \cdot \left(l_{12} + l_{13}\right) - F_t \cdot l_{12}}{l_{11}} \cdot z_{11} \right) \cdot \left[\frac{z_{11} \cdot \left(l_{12} + l_{13}\right)}{l_{11}} \right] dz_{11} +$$

$$+ \int_0^{l_{12}} \left(X_X \cdot \left(l_{13} + z_{12}\right) - F_t \cdot z_{12} \right) \cdot \left[l_{13} + z_{12} \right] dz_{12} + \int_0^{l_{13}} z_{13} \cdot \left(X_X \cdot z_{13} \right) dz_{13} = 0$$

$$\frac{X_X \cdot l_{12}^3}{3} - \frac{F_t \cdot l_{12}^3}{3} + \frac{X_X \cdot l_{13}^3}{3} - \frac{F_t \cdot l_{12}^2 \cdot l_{13}}{2} +$$

$$+ X_X \cdot l_{12} \cdot l_{13}^2 + X_X \cdot l_{12}^2 \cdot l_{13} + \frac{l_{11} \cdot \left(l_{12} + l_{13}\right) \cdot \left(X_X \cdot \left(l_{12} + l_{13}\right) - F_t \cdot l_{12}\right)}{3} = 0$$

Из последнего равенства выражается X_X:

$$X_X = \frac{\frac{F_t \cdot l_{12}^3}{3} + \frac{F_t \cdot l_{13}^2 \cdot l_{11}}{2} + \frac{F_t \cdot l_{11} \cdot l_{12} \cdot \left(l_{12} + l_{13}\right)}{3}}{\frac{l_{11} \cdot \left(l_{12} + l_{13}\right)^2}{3} + l_{12} \cdot l_{13}^2 + l_{12}^2 \cdot l_{13} + \frac{l_{12}^3}{3} + \frac{l_{13}^3}{3}}. \qquad (10)$$

Подставив значения сил (см. табл. 1) и значения размеров (см. табл. 3) в формулы (7) и (10) получены X_Y = –16,731 кН и X_X = 12,578 кН. По формулам (5), (6), (8), (9) найдены значения реакций в соответствующих опорах: A'_y = 0,656 кН, A''_y = 26,645 кН, A'_x = –4,335 кН, A''_x = 32,773 кН.

Для проверки правильности полученных результатов произведён расчёт равнодействующей силы в обеих плоскостях.

Вертикальная плоскость:

$$A'_y + A''_y + X_Y - F_r = 0;$$

$$-656 + 26645 - 16731 - 9258 = 0. \quad (11)$$

Горизонтальная плоскость:

$$A'_x + A''_x + X_X - F_t = 0;$$

$$-4335 + 32773 + 12578 - 41016 = 0. \quad (12)$$

Левая и правая части равенств (11), (12) равны, следовательно, значения опорных реакций определены корректно.

Учитывая значения реакций в проекциях на вертикальную и горизонтальную плоскости, определяются результирующие радиальные реакции в опорах по формуле ниже.

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}.$$

Итоговые значения опорных реакций:

$$A' = \sqrt{(-4335)^2 + (-656)^2} = 4384 \text{ Н}$$

$$A'' = \sqrt{26645^2 + 32773^2} = 42238 \text{ Н}$$

$$B = \sqrt{(-16731)^2 + (-12578)^2} = 20932 \text{ Н}$$

Ведомый вал

На рис. 5 приведена расчётная схема ведомого вала. На схеме обозначены 3 участка, на которых действуют напряжения: l_{21}, l_{22}, l_{23}, а общая длина участка составляет $L2$. Исходя из геометрических размеров элементов, представленных на расчётной схеме, определены расчётные значения длин рассматриваемых участков (табл. 4).

Для раскрытия статической неопределимости по формуле (4), аналогично ведущему валу, реакции D_x и D_y заменены обобщёнными силами X_x и X_y, соответственно, и составлены расчётные схемы сил, спроецированных на плоскости YOZ и XOZ.

Расчет опорных реакций ведомого вала выполняется по данной методике аналогично расчёту реакций ведущего вала. Схема сил, действующих на ведомый вал (рис. 5) идентична схеме сил, действующих на ведущий вал (см. рис. 2). Следовательно, формулы (5)–(10) могут быть использованы для расчёта опорных реакций ведомого вала.

Полученные значения радиальных реакций в опорах ведущего (см. рис. 2) и ведомого (см. рис. 5) валов приведены в табл. 5.

Таблица 4. Геометрические характеристики ведомого вала
Table 4. Geometric characteristics of the output shaft

Участок	$L1$	l_{11}	l_{12}	l_{13}
Длина, мм	361,6	102,2	81,18	178,22

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработаны расчётные схемы статически неопределимых валов центральной передачи ведущего моста тракторов «Кировец» серии К-7. На основании расчётных схем составлены уравнения моментов и уравнения равновесия. С помощью теоремы Кастилиано и уравнений моментов была выведена формула, раскрывающая статическую неопределимость валов, что позволило вычислить значение реакции «лишней» опоры. Применение уравнений равновесия позволило вычислить значения оставшихся опорных реакций.

Проверка на равенство нулю равнодействующих сил показала, что данная методика аналитического расчёта верна и может быть использована для определения опорных реакций в статически неопределимых валах.

Полученная и апробированная в ходе расчётов математическая модель статически неопределимых валов центральной передачи может быть использована в качестве основы для разработки программного обеспечения, автоматизирующего расчет опорных реакций в статически неопределимых валах.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ИНФОРМАЦИЯ

Вклад авторов. К.Н. Серов — формулирование идеи, формулирование исследовательских целей и задач, написание текста, анализ полученных данных и подготовка первоначальных выводов; С.И. Худорожков — научное руководство, планирование исследовательской деятельности, проведение критического анализа материалов, расчётов и выводов. Авторы подтверждают соответствие своего авторства международным критериям *ICMJE* (все авторы внесли существенный вклад в разработку концепции,

Таблица 5. Опорные реакции ведущего и ведомого валов центральной передачи
Table 5. Support reactions of the final drive input and output shafts of the final drive

Условное обозначение подшипника	A'	A''	B	C'	C''	D
Радиальная реакция R, Н	4384	42 238	20 932	14 421	61286	7309

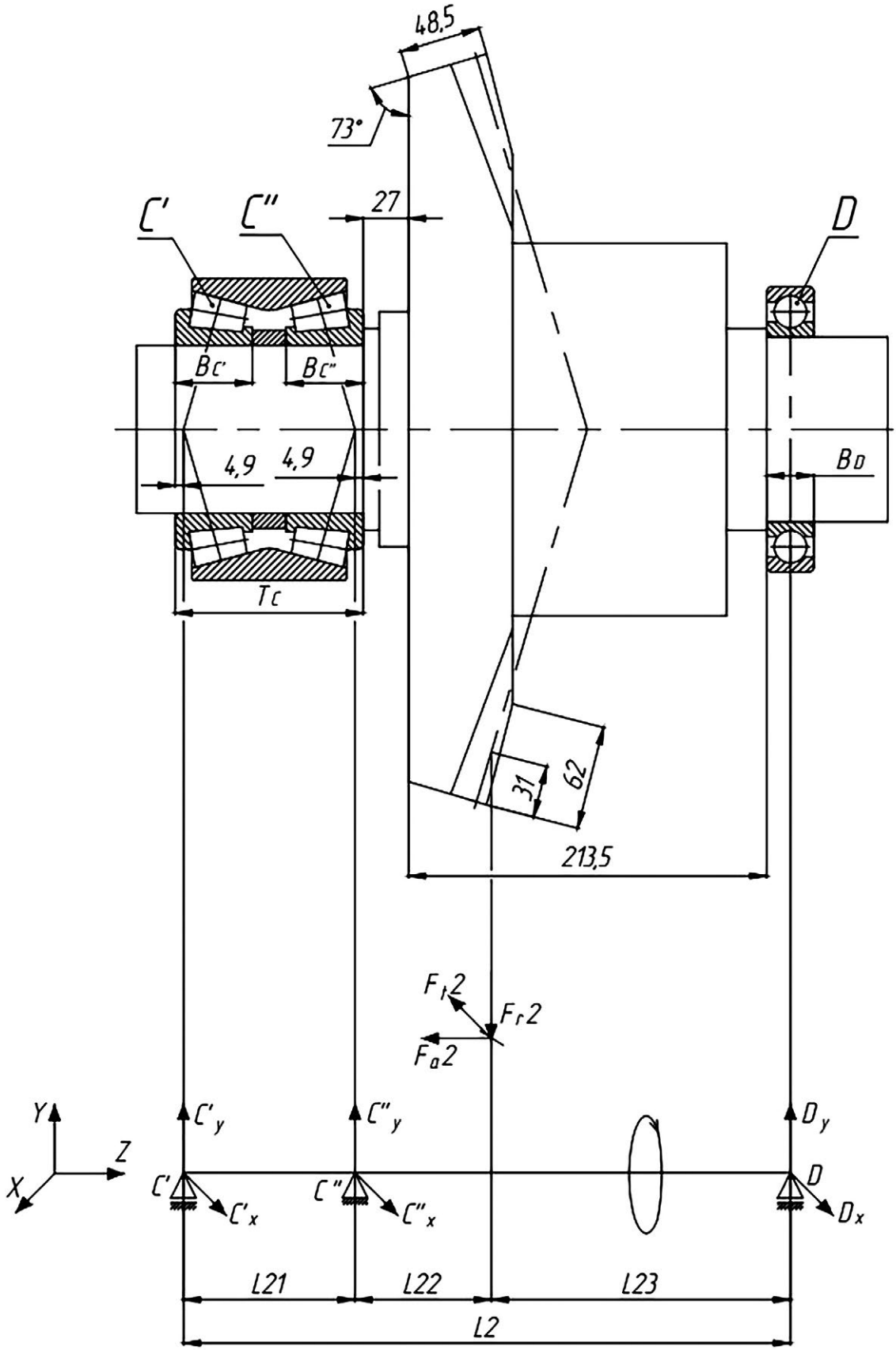

Рис. 5. Расчётная схема ведомого вала.
Fig. 5. Calculation scheme of the output shaft.

проведение исследования и подготовку статьи, прочли и одобрили финальную версию перед публикацией).

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с проведенным исследованием и публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contributions. K.N. Serov — formulating the idea, formulating research goals and objectives, writing the text, analyzing the data obtained and preparing initial conclusions; S.I. Hoodorozhkov — scientific supervision, planning of research activities, critical analysis of materials, calculations and conclusions. The authors confirm that their authorship meets the international ICMJE criteria (all authors made significant contributions to the development of the concept, conduct of the research and preparation of the article, read and approved the final version before publication).

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding source. This study was not supported by any external sources of funding.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мамченко В.О., Деменчук Н.П. Отдельные разделы механики твёрдого деформируемого тела: Учебно-методическое пособие. СПб: Университет ИТМО, 2016.

2. Шейнблит А.Е. Курсовое проектирование деталей машин: Учеб. пособие для техникумов. М.: Высшая школа, 1991.

3. ГОСТ 18855-2013 (ISO 281:2007). Подшипники качения. Динамическая грузоподъёмность и номинальный ресурс. М., 2013. Дата обращения: 29.01.2023. Режим доступа: https://docs.cntd.ru/document/1200105881.

4. Broutman L., Krock R. Composite Materials. Vol. 7. Structural Design and Analysis. Part 1. Chamis C., editor. Cleveland: NASA Lewis Research Center, 1975.

5. Дарков А.В., Шапиро Г.С. Сопротивление материалов. М.: Высшая школа, 1975.

6. Козловский А.Э. Расчёт элементов конструкций на сдвиг и кручение. Иваново: Ивановский государственный химико-технологический университет, 2016.

7. ГОСТ 27365-87. Подшипники роликовые конические однорядные повышенной грузоподъёмности. Основные размеры. М., 1987. Дата обращения: 29.01.2023. Режим доступа: https://docs.cntd.ru/document/1200013031.

8. ГОСТ 8328-75. Подшипники роликовые радиальные с короткими цилиндрическими роликами. Типы и основные размеры. М., 1975. Дата обращения: 29.01.2023. Режим доступа: https://docs.cntd.ru/document/1200012894.

9. ГОСТ 6364-78. ГОСТ 6364-78. Подшипники роликовые конические двухрядные. Основные размеры. М., 1978. Дата обращения: 29.01.2023. Режим доступа: https://docs.cntd.ru/document/1200012746.

10. ГОСТ 8338-75. Подшипники шариковые радиальные однорядные. Основные размеры. М., 1975. Дата обращения: 29.01.2023. Режим доступа: https://docs.cntd.ru/document/1200012895.

REFERENCES

1. Mamchenko VO, Demenchuk NP. *Separate sections of the mechanics of solid deformable bodies: Educational and methodological manual.* Saint Petersburg: ITMO University; 2016 (in Russ.)

2. Sheinblit AE. *Course design of machine elements: Textbook for technical schools.* Moscow: Vysshaya shkola; 1991 (in Russ.)

3. GOST 18855-2013 (ISO 281:2007). Rolling bearings. Dynamic load rating and rating life. Moscow; 2013. (in Russ). Accessed: 29.01.2023. Available from: https://docs.cntd.ru/document/1200105881.

4. Broutman L, Krock R. *Composite Materials, Volume 7: Structural Design and Analysis, Part 1.* Chamis C., editor. Cleveland Ohio: NASA Lewis Research Center; 1975.

5. Darkov AV, Shapiro GS. *Strength of materials: a textbook for higher technical educational institutions.* Moscow: Vysshaya shkola; 1975 (in Russ.)

6. Kozlovskii AE. *Calculation of structural elements for shear and torsion.* Ivanovo: Ivanovo State University of Chemistry and Technology; 2016 (in Russ.)

7. GOST 27365-87. Single row tapered roller bearings with increased load capacity. Main sizes. Moscow; 1987. (in Russ.) Accessed: 29.01.2023 Available from: https://docs.cntd.ru/document/1200013031

8. GOST 8328-75. Radial roller bearings with short cylindrical rollers. Types and main sizes. Moscow; 1975 (in Russ.) Accessed: 29.01.2023 Available from https://docs.cntd.ru/document/1200012894

9. GOST 6364-78. GOST 6364-78. Double-row tapered roller bearings. Main sizes. Moscow; 1978 (in Russ.) Accessed: 29.01.2023. Available from https://docs.cntd.ru/document/1200012746.

10. GOST 8338-75. Single row radial ball bearings. Main sizes. Moscow; 1975 (in Russ.) Accessed: 29.01.2023 Available from https://docs.cntd.ru/document/1200012895

ОБ АВТОРАХ

*** Серов Кирилл Николаевич,**
аспирант Высшей школы транспорта Института машиностроения, материалов и транспорта;
адрес: Российская Федерация, 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29;
ORCID: 0009-0002-2869-641X;
e-mail: serovkn97@mail.ru

Худорожков Сергей Иванович,
д-р техн. наук,
профессор Высшей школы транспорта;
ORCID: 0000-0002-5646-2998;
eLibrary SPIN: 4405-9649;
e-mail: xcu-55@mail.ru

* Автор, ответственный за переписку / Corresponding author

AUTHORS' INFO

*** Kirill N. Serov,**
Postgraduate of the Higher School of Transport of the Institute of Mechanical Engineering, Materials and Transport;
address: 29 Polytechnicheskaya street, 195251 Saint Petersburg, Russian Federation;
ORCID: 0009-0002-2869-641X;
e-mail: serovkn97@mail.ru

Sergey I. Hoodorozhkov,
Dr. Sci. (Engineering),
Professor of the Higher School of Transport;
ORCID: 0000-0002-5646-2998;
eLibrary SPIN: 4405-9649;
e-mail: xcu-55@mail.ru