УДК 631.313;519.6

Рациональный выбор параметров диска-движителя почвообрабатывающего агрегата

Rational choice of parameters of powered disk of a soil cultivation unit

А. П. АКИМОВ, д-р техн. наук
Ю. В. КОНСТАНТИНОВ, канд. техн. наук

Чувашская государственная сельскохозяйственная академия, Чебоксары, Россия,
akimov_mechfak@mail.ru

A. P. AKIMOV, DSc in Engineering
Yu. V. KONSTANTINOV, PhD in Engineering

Chuvash State Agricultural Academy,
Cheboksary, Russia,
akimov_mechfak@mail.ru

Цель исследования — показать преимущество решения неформальной задачи рационального выбора параметров диска-движителя почвообрабатывающего агрегата при ее формализации в виде бикритериальных задач оптимизации по сравнению с формализацией в виде однокритериальных задач. Для этого используется предложенная ранее математическая модель взаимодействия диска-движителя с почвой, позволяющая определить его движущую силу и потери мощности на перемещение диска в почве в зависимости от параметров, определяющих режим его функционирования. В качестве таких безразмерных параметров приняты кинематический коэффициент, равный отношению окружной скорости диска к поступательной скорости почвообрабатывающего агрегата, и относительное заглубление диска, равное отношению абсолютного заглубления диска к его радиусу. Задача рационального выбора параметров диска-движителя формализована в виде задач оптимизации по критериям: максимальной движущей силы; максимального коэффициента полезного действия диска-движителя; максимальных движущей силы и коэффициента полезного действия диска-движителя; максимальной движущей силы и минимальных потерь мощности на перемещение диска в почве. Получены решения этих задач оптимизации. Оказалось, что в случае двух указанных бикритериальных постановок задачи компромиссные кривые в плоскости параметров практически совпадают. Показано, что преимущество формализации в виде бикритериальных задач оптимизации состоит в том, что она позволяет находить такие значения параметров, при которых достигается требуемая движущая сила при максимально возможном коэффициенте полезного действия и минимально возможных потерях мощности на перемещение диска в почве.

Ключевые слова: рациональный выбор; диск-движитель; движущая сила; потери мощности; бикритериальная задача оптимизации; компромиссная кривая.

The paper aims to show the advantage of solution of the non-formal problem of rational choice of parameters of powered disk of a soil cultivation unit when it is formalized as bi-criteria optimization problem in comparison with its formalization as one-criterion optimization problem. An earlier suggested mathematical model of interaction between disk and soil is used. This model allows to determine the driving force and power consumption required for disk motion in soil depending on the parameters determining its operating mode. The taken dimensionless parameters are: the kinematic coefficient equal to the ratio of peripheral disk speed to forward speed of soil cultivation unit, and the relative depth of disk equal to the ratio of its operating depth to its radius. The problem of rational choice of parameters of powered disk is formalized as optimization problems by the following criteria: the maximal driving force; the maximal efficiency coefficient of powered disk; the maximal driving force and efficiency coefficient; the maximal driving force and minimal power consumption for disk motion in soil. The solutions of these optimization problem are obtained. It is found that in the case of two bi-criteria problem statements the compromise curves are almost identical in the parameter plane. It is also shown that the advantage of formalization as bi-criteria optimization problems lies in the fact that it allows to find such values of parameters whereby the required driving force is achieved with maximal efficiency coefficient and minimal power consumption for disk motion in soil.

Keywords: rational choice; powered disk; driving force; power consumption; bi-criteria optimization problem; compromise curve.

Введение

Решая реальные прикладные задачи, связанные с рациональным выбором параметров объектов, необходимо прежде всего математически формализовать их. Обычно имеется лишь некоторый объект, по отношению к параметрам P которого нужно сделать выбор, а также числовой набор характеристик-критериев $W(P)$, определяющий зависимость количественных показателей свойств объекта от значений его параметров. На основе их значений производится выбор параметров P в пределах некоторых ограничений, вытекающих из смысла решаемой задачи [1].

На разных этапах решения интуитивно понимаемая постановщиком цель формализуется в виде некоторой задачи оптимального выбора, которая может быть решена с помощью методов оптимизации. Подчеркнем, что решение экстремальной задачи не является решением общей неформальной задачи рационального выбора, а лишь этапом ее решения. Рациональный выбор параметров объекта обычно приводит к решению некоторой последовательности экстремальных задач.

В качестве рассматриваемого объекта примем простейший ротационный рабочий орган — диск-движитель, который используется в пахотных агрегатах для уменьшения непроизводительных затрат энергии. Насколько известно авторам, задача рационального выбора параметров диска-движителя рассматривалась лишь в однокритериальной постановке [2].

Цель исследования

Задача рационального выбора параметров объекта может быть формализована в виде различных задач оптимизации. Цель исследования — показать преимущество решений неформальной задачи рационального выбора параметров диска-движителя почвообрабатывающего агрегата при ее формализации в виде двухкритериальных задач оптимизации по сравнению с формализацией в виде однокритериальных задач оптимизации.

Материалы и методы

Используя построенную ранее [3, 4] математическую модель взаимодействия диска-движителя с почвой, рассмотрим задачу рационального выбора его параметров, формализуя ее в виде различных задач оптимального выбора параметров диска-движителя.

Пусть плоский дисковый нож радиусом r, погруженный в почву на глубину h, движется при постоянной поступательной скорости почвообрабатывающего орудия или машины $v_п$, вращаясь с некоторой угловой скоростью ω. Режим функционирования ножа определяется относительным заглублением $\xi = h/r$ и его кинематическим коэффициентом $\lambda = \omega r/v_п$.

Будем считать, что почва почти однородна, т.е. ее давление $p_б$ на боковые поверхности расположенного в почве сегмента ножа и сопротивление резанию $Q_л$, приходящееся на единицу длины лезвия, слабо зависят не только от пройденного пути, но и, как показывают эксперименты [5, 6], от λ, поэтому их можно заменить постоянными средними значениями p и Q.

Система элементарных сил трения, действующих на боковые поверхности ножа, эквивалентна их главному вектору $F_б$, приложенному в центре диска, и паре сил с моментом m_0, равным главному моменту этой системы относительно того же центра. Эти силовые характеристики дискового ножа были определены ранее [3, 4] как функции его параметров.

Проекция $F_{бx}$ на ось Ox (в направлении движения диска) главного вектора сил трения, действующих на боковые поверхности ножа [3], и мощность W_1 [2], которую необходимо развивать для преодоления сил трения на боковой поверхности дискового ножа, могут быть найдены по формулам:

$$F_{бx} = 2fp\iint_S \frac{(z-a)dxdz}{\sqrt{x^2+(z-a)^2}};$$

$$W_1 = 2fp\iint_S \sqrt{x^2+(z-a)^2}\,dxdz, \qquad (1)$$

где f — коэффициент трения почвы о диск; $a = r/\lambda$ — расстояние от центра диска до его мгновенного центра скоростей; S — круговой сегмент ножа, погруженный в почву.

Двойные интегралы в выражениях (1) нетрудно свести к определенным интегралам [7]:

$$F_{бx} = 4fpr^2\int_0^l \left(\sqrt{\mu^2-2\mu\sqrt{1-t^2}+1}-\sqrt{(1-\xi-\mu)^2+t^2}\right)dt, \qquad (2)$$

где $\mu = 1/\lambda$; $l = \sqrt{2\xi-\xi^2}$;

$$W_1 = 2fpr^3\int_{1-\xi}^{1}\left[\sqrt{1-t^2}\,\sqrt{1+\lambda^2-2\lambda t} + \frac{(1-\lambda t)^2}{\lambda}\ln\left(\frac{\lambda\sqrt{1-t^2}+\sqrt{1+\lambda^2-2\lambda t}}{|1-\lambda t|}\right)\right]dt. \qquad (3)$$

Система элементарных сил реакций, действующих на лезвие дискового ножа, эквивалентна главному вектору $R_л$, приложенному в центре диска, и паре сил с моментом, равным главному моменту M_O этой системы относительно того же центра. Проекция $R_{лx}$ главного вектора сил трения на ось Ox, их главный момент [4] и мощность W_2 [2], которую необходимо развивать для преодоления сил резания почвы, могут быть найдены по формулам:

$$R_{лx} = Qr\int_0^{\vartheta_0} \frac{(\lambda\cos\vartheta - 1)d\vartheta}{\sqrt{1+\lambda^2 - 2\lambda\cos\vartheta}};$$

$$W_2 = Qrv_п \int_0^{\vartheta_0} \sqrt{1+\lambda^2-2\lambda\cos\vartheta}\, d\vartheta, \tag{4}$$

где $\vartheta_0 = \arccos(1 - \xi)$.

Суммарные реакции почвы, их моменты и общие потери мощности на перемещение диска в почве будут равны:

$$R_x = R_{лx} + F_{бx};$$

$$M_{OC} = m_O + M_O;$$

$$W = W_1 + W_2. \tag{5}$$

Отметим, что реакция почвы на диск при значениях λ, достаточно больших единицы, служит движущей силой, поскольку в этом случае $R_x > 0$ и реакция направлена в сторону движения почвообрабатывающего агрегата.

Для уменьшения числа существенных параметров изучаемых зависимостей введем безразмерные реакции почвы на диск-движитель:

$$R_x^* = R_x/(Qr);$$

$$F_{бx}^* = F_{бx}/(4fpr^2);$$

$$R_{лx}^* = R_{лx}/(Qr); \tag{6}$$

и безразмерные мощности:

$$W^* = W/(Qrv_п);$$

$$W_1^* = W_1/(4fpr^2v_п);$$

$$W_2^* = W_2/(Qrv_п). \tag{7}$$

Тогда равенства (5) перепишем в безразмерном виде:

$$R_x^* = nF_{бx}^* + R_{лx}^*;$$

$$W^* = nW_1^* + W_2^*, \tag{8}$$

где $n = 4fpr/Q$ — безразмерный коэффициент, равный удвоенному отношению модуля равнодействующей элементарных сил трения о боковую поверхность полностью заторможенного диска данного радиуса r, погруженного в почву до его центра, к модулю горизонтальной составляющей силы реакции почвы на его лезвие.

Коэффициент n нетрудно найти экспериментально, определяя для двух различных заглублений горизонтальные составляющие сил сопротивления движению в почве полностью заторможенного диска данного радиуса.

Однокритериальные варианты формализации задачи

Задачу рационального выбора параметров диска-движителя можно математически формализовать как задачу выбора таких его параметров, которые позволяют достичь максимального значения движущей силы диска в выбранной области их изменения, поскольку в этом случае максимально разгружается трактор, входящий в состав почвообрабатывающего агрегата.

В качестве промежутка изменения кинематического параметра λ можно принять $\lambda \in [1,5; 5]$. Условие $\lambda \geq 1,5$ принимается для того, чтобы в интервале используемых относительных заглублений $\xi \in [1/3; 0,8]$ диск работал в режиме движителя. Второе условие $\lambda \leq 5$ принято, чтобы ограничить удельные энергозатраты, необходимые для перемещения диска-движителя в почве. Верхняя граница промежутка изменения относительного заглубления диска принята равной 0,8, поскольку большие относительные заглубления трудно реализуемы в связи с техническими проблемами крепления диска к оси его вращения. Примем для определенности значение коэффициента $n = 3$.

Обозначим $D = \{(\lambda, \xi)\colon 1,5 \leq \lambda \leq 5,\ 1/3 \leq \xi \leq 0,8\}$. В итоге приходим к следующей задаче однокритериальной оптимизации:

$$R_x^*(\lambda, \xi) \to \max_{(\lambda, \xi) \in D}.$$

Поскольку, как следует из (2), (4), (6) и (8), $\frac{\partial R_x^*}{\partial \lambda} > 0$, то наибольшее значение движущей силы достигается на правой границе области изменения параметров при $\lambda = 5$. Нетрудно убедиться, что $\frac{\partial R_x^*}{\partial \xi} = 0$ при $\xi = 1 - 1/\lambda$, поэтому наибольшее значение движущей силы достигается в точке $\lambda = 5$, $\xi = 0,8$ и, как показывают расчеты, оно равно $R_{x\max}^* = 1,893$.

Таким образом, формализация задачи рационального выбора параметров диска-движителя в виде указанной однокритериальной задачи оптимизации приводит к вполне однозначному ответу — при сделанных предположениях рациональные значения параметров диска-движителя: $\lambda = 5$; $\xi = 0,8$.

Полезная мощность диска-движителя равна $R_xv_п$. Если пренебречь потерями на трение в подшипнике диска, то подведенная к нему мощность будет равна $R_xv_п + W$.

Коэффициент полезного действия (КПД) диска-движителя η равен отношению полезной мощности к подведенной к нему мощности:

$$\eta = R_xv_п/(R_xv_п + W) = R_x^*/(R_x^* + W^*). \tag{9}$$

Задачу рационального выбора параметров диска-движителя можно математически формализовать также как задачу выбора таких его параметров, которые позволяют достичь максимального значения его КПД [2], что приводит к следующей задаче однокритериальной оптимизации:

$$\eta(\lambda, \xi) \to \max_{(\lambda, \xi) \in D}.$$

Из (2), (4), (6), (8) и (9) следует, что $\frac{\partial\eta}{\partial\xi} < 0$, поэтому наибольшее значение КПД достигается на нижней границе области изменения параметра $\xi = 1/3$. Численно решив уравнение $\frac{\partial\eta}{\partial\lambda}\left(\lambda, \frac{1}{3}\right) = 0$, находим $\lambda = 1{,}543$, поэтому наибольшее значение КПД достигается в точке $\lambda = 1{,}543$; $\xi = 1/3$ и, как показывают расчеты, оно равно $\eta = 0{,}435$.

Бикритериальные варианты формализации задачи

Поскольку на режим функционирования диска-движителя естественно наложить дополнительное требование наибольшего КПД, то более обоснованна формализация задачи рационального выбора параметров диска-движителя в виде бикритериальной задачи оптимизации в области допустимых решений D:

$$R_x^*(\lambda, \xi) \to \max_{(\lambda, \xi) \in D};$$

$$\eta(\lambda, \xi) \to \max_{(\lambda, \xi) \in D}.$$

Эти два критерия противоречивы, и в этом случае задача не имеет единственного решения. Но при такой постановке задачи можно определить неулучшаемые, или парето-оптимальные решения. Набор параметров $P_1(\lambda_1, \xi_1)$ доминирует по Парето (предпочтительнее по обоим критериям, чем набор $P_2(\lambda_2, \xi_2)$), если выполнены неравенства

$$R_x^*(\lambda_1, \xi_1) \geq R_x^*(\lambda_2, \xi_2);$$

$$\eta(\lambda_1, \xi_1) \geq \eta(\lambda_2, \xi_2),$$

и хотя бы одно из них строгое.

Это означает, что при переходе от набора P_2 к набору P_1 не ухудшится значение одного из критериев и улучшится значение другого. Если над набором параметров не доминирует никакой другой набор, то он называется недоминируемым, или оптимальным по Парето. Оптимальность по Парето означает, что нельзя улучшить значение одного из критериев, не ухудшая значения другого. Все парето-оптимальные решения образуют множество Парето. И хотя имеется множество парето-оптимальных альтернатив, их ценность состоит в том, что в данных обстоятельствах они представляют собой все решения, которые нельзя улучшить.

Поскольку выбранные критерии дифференцируемы по параметрам λ и ξ, то множество Парето (компромиссную кривую) можно найти аналитически как геометрическое место точек касания линий уровня $R_x^*(\lambda, \xi) = C_1$; $\eta(\lambda, \xi) = C_2$. В таких точках $\mathrm{grad}\, R_x^*(\lambda, \xi) = -k\mathrm{grad}\eta(\lambda, \xi)$ [8], а значит, координаты этих градиентов пропорциональны. Отсюда следует, что парето-оптимальные решения находятся из уравнения:

$$\frac{\partial R_x^*}{\partial\lambda}\frac{\partial\eta}{\partial\xi} - \frac{\partial\eta}{\partial\lambda}\frac{\partial R_x^*}{\partial\xi} = 0. \quad (10)$$

Уравнение (10) определяет в плоскости параметров некоторую кривую. Если эта кривая целиком лежит в D, то ее точки и составляют множество Парето. Если же в D входит только ее часть, то точки компромиссной кривой, вошедшие в D, по-прежнему принадлежат множеству Парето, а кроме того, парето-оптимальными могут быть и точки на границе области D, что проверяется непосредственно по определению множества Парето [8].

Можно поставить бикритериальную задачу оптимизации несколько иначе, если на режим функционирования диска-движителя наложить требование наименьших потерь подводимой мощности на его перемещение в почве. В этом случае приходим к следующей задаче оптимизации:

$$R_x^*(\lambda, \xi) \to \max_{(\lambda, \xi) \in D};$$

$$W^*(\lambda, \xi) \to \min_{(\lambda, \xi) \in D}.$$

При такой постановке парето-оптимальные решения находим из уравнения:

$$\frac{\partial R_x^*}{\partial\lambda}\frac{\partial W^*}{\partial\xi} - \frac{\partial W^*}{\partial\lambda}\frac{\partial R_x^*}{\partial\xi} = 0. \quad (11)$$

Используя формулу (9), нетрудно проверить справедливость равенства:

$$\frac{\partial R_x^*}{\partial\lambda}\frac{\partial\eta}{\partial\xi} - \frac{\partial\eta}{\partial\lambda}\frac{\partial R_x^*}{\partial\xi} =$$

$$= \left(\frac{\partial R_x^*}{\partial\lambda}\frac{\partial W^*}{\partial\xi} - \frac{\partial W^*}{\partial\lambda}\frac{\partial R_x^*}{\partial\xi}\right)/(W^* + R_x^*)^2.$$

Из него следует, что уравнения (10) и (11) определяют в плоскости параметров одну и ту же компромиссную кривую.

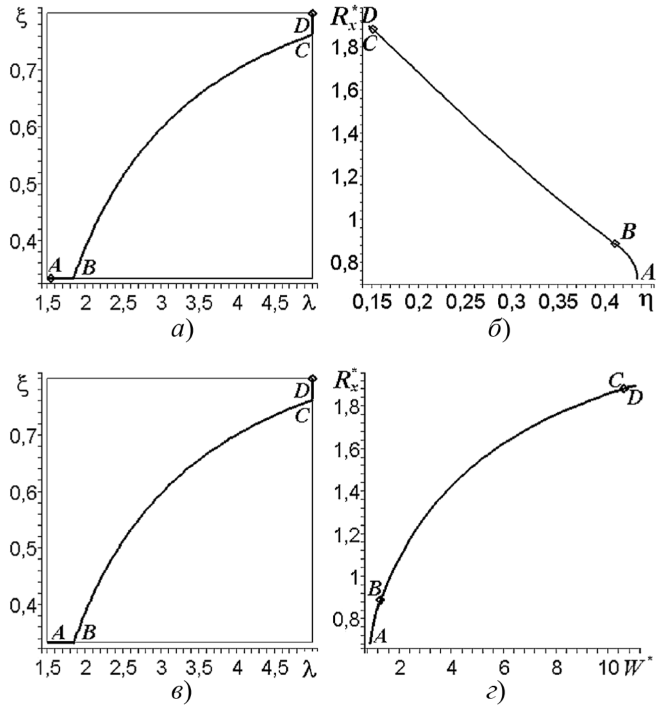
Результаты и их обсуждение

Уравнение (10), с учетом выражений (2)—(9), решалось в системе символьной математики Maple 9.5. В результате численного решения этого уравнения парето-оптимальные решения для первого варианта постановки бикритериальной задачи оптимизации представлены на рис. *а*, *б* компромиссными кривыми в плоскостях параметров и критериев.

Отмеченные точки в плоскости критериев представляют собой образы одноименных точек в плоскости параметров. Компромиссная кривая $ABCD$ в плоскости параметров состоит из трех частей: часть BC соответствует решениям уравнения (10); часть AB — решениям, расположенным на участке границы $\xi = 1/3$ области параметров D; часть CD — решениям на участке ее границы $\lambda = 5$.

Решению, оптимальному по одному критерию максимальной движущей силы, соответствует точка D компромиссной кривой, а решению по одному критерию максимального КПД соответствует ее точка A (см. рис. *а*, *б*). Таким образом, компромиссная кривая соединяет точки, соответствующие оптимальным решениям по отдельным критериям.

Как следует из рис. *б*, для парето-оптимальных решений большим значениям КПД диска-движителя со-



Первый (*а*, *б*) и второй (*в*, *г*) варианты бикритериальной оптимизации. Компромиссные кривые в плоскостях:

а, *в* — параметров; *б*, *г* — критериев

ответствуют меньшие значения достигаемой движущей силы. Построенная компромиссная кривая позволяет оценить величину уменьшения достигаемой движущей силы для заданного увеличения КПД диска-движителя. Отметим, что на участках BC и CD компромиссная кривая прямолинейна.

Парето-оптимальные решения второго варианта постановки бикритериальной задачи оптимизации представлены на рис. *в*, *г* компромиссными кривыми в плоскостях параметров и критериев. Из рис. *а—г* следует, что компромиссные кривые в плоскости параметров практически совпадают. Их части BC и CD совпадают полностью. Отличие состоит лишь в том, что точка A компромиссной кривой в первом варианте имеет координаты A(1,543; 1/3), а во втором — A(1,5; 1/3).

Как следует из рис. *г*, для парето-оптимальных решений большим значениям достигаемой движущей силы соответствуют большие потери мощности на перемещение диска-движителя в почве. Построенная компромиссная кривая позволяет оценить увеличение потерь мощности на перемещение диска-движителя в почве для заданного увеличения достигаемой движущей силы диска-движителя.

Выводы

Получены решения неформальной задачи рационального выбора параметров диска-движителя при ее формализации в виде однокритериальных и бикритериальных задач оптимизации.

В случае бикритериальной оптимизации построены множества парето-оптимальных решений (компромиссные кривые). В это множество входят также решения, оптимальные по одному из двух критериев. Единственное решение из множества Парето может быть выбрано на основе дополнительной информации, в частности по значению необходимой движущей силы.

Преимущество полученного таким образом решения заключается в том, что при таком выборе параметров, во-первых, достигается необходимое значение движущей силы, во-вторых, КПД диска-движителя будет максимально возможным, а потери мощности на перемещение диска в почве — минимально возможными.

Литература и источники

1. **Городецкий С. Ю., Гришагин В. А.** Задачи и методы конечномерной оптимизации: учеб. пособие. Ч. 2. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского ун-та, 2003. 257 с.
2. **Акимов А. П., Константинов Ю. В., Аквильянова И. Н.** Выбор критериев и определение оптимальных параметров функционирования дискового ножа // Тракторы и сельскохозяйственные машины. 2008, № 4. С. 31—33.
3. **Медведев В. И., Константинов Ю. В., Акимов А. П.** Обобщенная математическая модель взаимодействия дискового ножа с почвой // Тракторы и сельскохозяйственные машины. 2001, № 2. С. 34—37.
4. **Акимов А. П., Константинов Ю. В.** Скольжение-буксование дискового ножа в почве и его силовые характеристики // Тракторы и сельскохозяйственные машины. 2005, № 4. С. 30—34.
5. **Синеоков Г. Н.** Дисковые рабочие органы почвообрабатывающих машин. М.: Машгиз, 1949. 86 с.
6. **Медведев В. И., Веденеев А. И., Акимов А. П.** Методика расчета движущей силы на плоском диске-движителе // Тракторы и сельхозмашины. 1974, № 8. С. 18—20.
7. **Константинов Ю. В.** Выбор оптимальных параметров и режимов функционирования ротационных рабочих органов: Дис. ... канд. техн. наук. Чебоксары, 2000. 176 с.
8. **Катулев А. Н.** Математические методы в системах поддержки принятия решений. М.: Высшая школа, 2005. 311 с.

References

1. Gorodetskiy S. Yu., Grishagin V. A. *Zadachi i metody konechnomernoy optimizatsii* [Problems and methods of finite-dimensional optimization]. Part 2. Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod University Publ., 2003, 257 p.
2. Akimov A. P., Konstantinov Yu. V., Akvil'yanova I. N. Selection of criteria and determination of optimal parameters of operation of a disc colter. *Traktory i sel'skokhozyaystvennye mashiny*, 2008, no. 4, pp. 31—33 (in Russ.).
3. Medvedev V. I., Konstantinov Yu. V., Akimov A. P. Generalized mathematical model of disc colter interaction with soil. *Traktory i sel'skokhozyaystvennye mashiny*, 2001, no. 2, pp. 34—37 (in Russ.).
4. Akimov A. P., Konstantinov Yu. V. Sliding and slipping of disk colter in soil and its power characteristics. *Traktory i sel'skokhozyaystvennye mashiny*, 2005, no. 4, pp. 18—20 (in Russ.).
5. Sineokov G. N. *Diskovye rabochie organy pochvoobrabatyvayushchikh mashin* [Disk working bodies of tillage machines]. Moscow, Mashgiz Publ., 1949, 86 p.
6. Medvedev V. I., Vedeneev A. I., Akimov A. P. Method of calculation of driving force of a flat powered disk. *Traktory i sel'khozmashiny*, 1974, no. 8, pp. 30—34 (in Russ.).
7. Konstantinov Yu. V. *Vybor optimal'nykh parametrov i rezhimov funktsionirovaniya rotatsionnykh rabochikh organov* [Selection of optimal parameters and operating modes of rotary working bodies]. PhD in Engineering thesis. Cheboksary, 2000, 176 p.
8. Katulev A. N. *Matematicheskie metody v sistemakh podderzhki prinyatiya resheniy* [Mathematical methods in decision support systems]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2005, 311 p.