

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В МОБИЛЬНЫХ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СРЕДСТВАХ

VISUALIZATION OF THE RESULTS OF MATHEMATICAL MODELING OF DYNAMIC PROCESSES IN MOBILE POWER FACILITIES

А.Н. КУЗНЕЦОВ, к.т.н.
О.И. ПОЛИВАЕВ, д.т.н.
А.В. ЛОЩЕНКО

Воронежский государственный аграрный университет
им. императора Петра I, Воронеж, Россия,
kuz-basss@yandex.ru

A.N. KUZNECOV, PhD in Engineering
O.I. POLIVAEV, DSc in Engineering
A.V. LOSHCENKO

Voronezh State Agricultural University, Voronezh, Russia,
kuz-basss@yandex.ru

Для анализа, оценки и демонстрации поведения созданных математических моделей сложных динамических объектов разработчикам зачастую приходится пользоваться графическими материалами, которые весьма сложны и неинформативны. Современные программные математические пакеты позволяют не только производить решение систем дифференциальных уравнений, описывающих поведение объектов, но и создавать анимированные представления этих процессов. Для этого в среде MathCAD имеется системная переменная FRAME, значение которой может изменяться от 0 до 999. Данная переменная позволяет поочередно обращаться к строкам сохраненной матрицы численного решения систем дифференциальных уравнений и отображать новые состояния элементов анализируемой динамической системы с одновременной кадровой записью данных отображений. Для представления реальных объектов моделирования на двумерных графиках, из которых формируется анимация, рисуются различные геометрические примитивы – квадраты, прямоугольники и окружности с различным количеством степеней свободы. Для создания матриц представления данных примитивов формируются прототипы функций. Геометрические параметры или положение матриц представления жестко связываются с элементами в строке матрицы численного решения, на которую указывает системная переменная FRAME. Результатом применения данной переменной является анимированное представление, которое наглядно демонстрирует поведение объектов и позволяет быстро выявить ошибки, допущенные при моделировании. В данной статье на примере анализа поведения конструктивных элементов мобильного энергетического средства (МЭС) при переезде единичной неровности заданной формы показана методика создания анимации описанного процесса. Также рассмотрен вопрос нахождения численного решения систем дифференциальных уравнений методом Рунге – Кутты 4-го порядка в математическом пакете MathCAD.

Ключевые слова: математическое моделирование, визуализация, динамический процесс, колебания.

To analyze, evaluate and demonstrate the behavior of created mathematical models of complex dynamic objects, developers often have to use graphic materials, which are very complex and uninformative. Modern software mathematical packages allow not only to solve systems of differential equations describing the behavior of objects but also to create animated representations of these processes. To do this, the MathCAD environment has a system variable FRAME, the value of which can vary from 0 to 999. This variable allows to alternately refer to the lines of the stored matrix of the numerical solution of systems of differential equations and display the new states of the elements of the analyzed dynamic system, with a simultaneous time-lapse recording of these displays. To represent real modeling objects on two-dimensional graphs, from which the animation is formed, various geometric primitives are drawn: squares, rectangles, and circles with different degrees of freedom. Function prototypes are formed to create matrices for representing these primitives. The geometric parameters or the position of the representation matrices are rigidly associated with the elements in the row of the numerical solution matrix pointed to by the FRAME system variable. The result of using this variable is an animated representation that demonstrates the behavior of objects and allows you to quickly identify errors made in the simulation. In this article, on the example of the analysis of the behavior of the structural elements of the mobile power facilities when moving through a single roughness of a given shape, the technique of creating an animation of the described process is shown. The problem of finding a numerical solution of systems of differential equations by the Runge-Kutta method of the 4th order in MathCAD mathematical package is also considered.

Keywords: mathematical modeling, visualization, dynamic process, oscillations.

Введение

Зачастую при анализе поведения сложных систем, описываемых математическими моделями, результаты моделирования представляются в виде графиков. При этом, когда речь идет о взаимных перемещениях нескольких узлов, как, например, при моделировании процесса движения МЭС по неровной поверхности, информация, представленная в графической форме, может быть весьма сложной к пониманию и оценке [8, 9]. Для примера, на рис. 1 представлены результаты моделирования вертикальных колебаний мостов, остова и подрессоренной части подвески сиденья МЭС при переезде единичной неровности, форма которой описывается следующим уравнением:

$$q(x) = \frac{q_{\max}}{2} \cdot \left(1 - \cos\left(2\pi \frac{x - \Delta x}{l} \right) \right) \times (\theta(x - \Delta x) - \theta(x - \Delta x - l)), \quad (1)$$

где q_{\max} – амплитудное значение высоты единичной неровности, м; Δx – расстояние от нулевой точки до начала единичной неровности, м; l – длина единичной неровности, м; $\theta(x)$ – функция Хэвисайда.

По внешнему виду представленных на рис. 1 кривых достаточно сложно определить, насколько точно математическая модель описывает поведение реальных объектов (элементов конструкции трактора). Визуальный анализ данных графиков не позволяет сразу выявить ошибки, допущенные при моделировании. Для подтверждения адекватности разработанной модели, как правило, требуется длительные и детальные исследования.

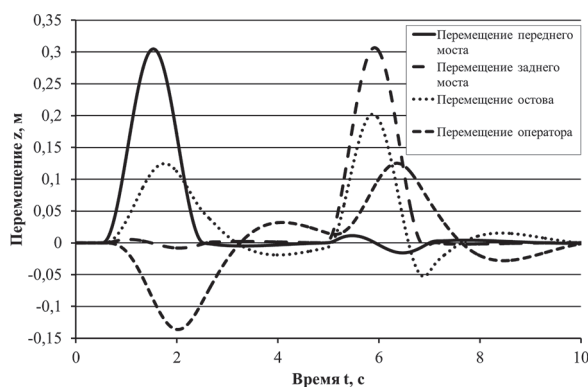


Рис. 1. Результаты моделирования вертикальных колебаний элементов конструкции МЭС

Еще более сложным становится взаимный анализ изменения поведения подобных систем при корректировании входных данных, например скорости переезда препятствия, жесткости и демпфирования упругих элементов, массы и моментов инерции узлов и т.д.

Возникает необходимость применения более гибкого инструмента, позволяющего с минимальными затратами времени оценить адекватность новой математической модели поведения какой-либо динамической системы. Одним из наиболее более информативных способов отображения результатов моделирования является создание анимации процессов, происходящих с течением времени.

Методика формирования анимированных представлений

Одним из наиболее удобных инструментов для создания анимации сложных процессов является программный модуль MathCAD [1, 5, 7].

В качестве примера разберем методику создания анимированного представления процесса переезда автотракторным средством единичного препятствия, описываемого формулой (1).

Первоначально создается математическая модель передачи колебаний от неровностей грунта на остова МЭС.

В предлагаемую математическую модель вводим следующие ограничения:

- 1) колебания переднего и заднего мостов независимы друг от друга;
- 2) угловые перемещения корпусов мостов и подвески сиденья минимальны, и ими можно пренебречь;
- 3) характеристики упругих и демпфирующих элементов шин, подвески и подрессоренного сиденья линейны;
- 4) характеристики и параметры шин и подвески правых и левых колес одинаковы;
- 5) угловыми колебаниями переднего и заднего мостов, а также подвески сиденья пренебрегаем;
- 6) высота неровностей под правым и левым колесом одинакова;
- 7) неподдресоренные массы сосредоточены в центре колес;
- 8) изменением геометрической длины плеча любой действующей на остова силы при его угловых перемещениях пренебрегаем;
- 9) движение трактора прямолинейное.

На основании принятых допущений формируем динамическую модель трактора при передвижении по неровностям, представленную на рис. 2.

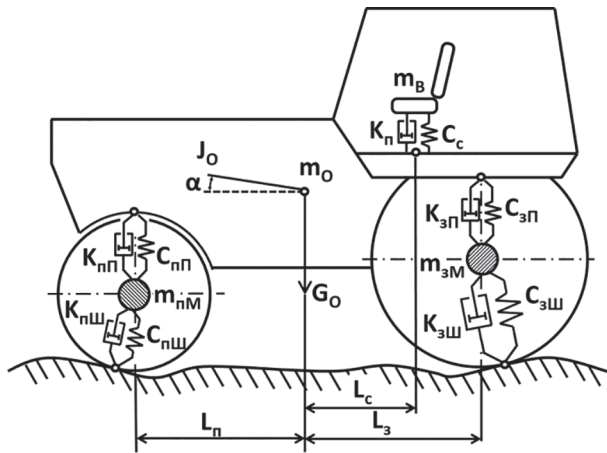


Рис. 2. Динамическая модель МЭС при движении по неровностям грунта

На рисунке обозначено:

m_o – масса поддресоренной части остова МЭС, кг;

$m_{нМ}$ – масса поддресоренной части переднего моста МЭС, кг;

$m_{зМ}$ – масса поддресоренной части заднего моста МЭС, кг;

$m_в$ – масса поддресоренной части подвески сиденья совместно с водителем, кг;

J_o – момент инерции остова МЭС, кг·м²;

$K_{нш}$ – коэффициент радиального демпфирования передних шин, кг·с⁻¹;

$K_{зш}$ – коэффициент радиального демпфирования задних шин, кг·с⁻¹;

$K_{нп}$ – коэффициент демпфирования передней подвески, кг·с⁻¹;

$K_{зп}$ – коэффициент демпфирования задней подвески, кг·с⁻¹;

K_c – коэффициент демпфирования подвески сиденья, кг·с⁻¹;

$C_{нш}$ – коэффициент радиальной жесткости передних шин, кг·с⁻²;

$C_{зш}$ – коэффициент радиальной жесткости задних шин, кг·с⁻²;

$C_{нп}$ – коэффициент жесткости передней подвески, кг·с⁻²;

$C_{зп}$ – коэффициент жесткости задней подвески, кг·с⁻²;

C_c – коэффициент жесткости подвески сиденья, кг·с⁻²;

Для формирования дифференциальных уравнений, которые позволят описать данную

динамическую модель, произведем анализ сил, действующих на каждый компонент с массой [6] (рис. 3). На рис. 3 ввиду чрезмерной простоты не показана единственная сила, действующая на поддресоренную часть подвески сиденья с водителем.

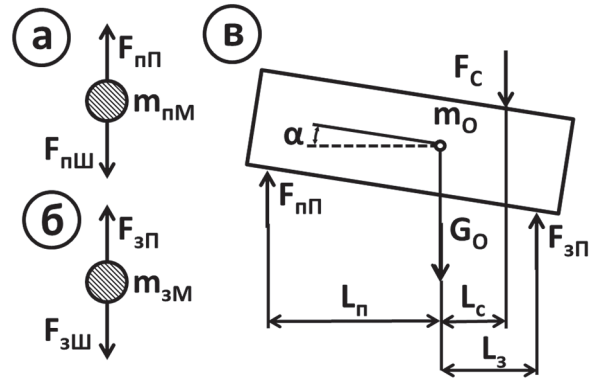


Рис. 3. Схемы сил, действующих на основные элементы конструкции МЭС:

a – силы, действующие на передний мост;

б – силы, действующие на задний мост;

в – силы, действующие на остова трактора

На рисунке обозначено:

$F_{нш}$ – равнодействующая от сил упругости и демпфирования, действующая на передний мост со стороны шин, Н

$$F_{нш} = K_{нш} \cdot \left(\frac{dq(v \cdot t)}{dt} - \frac{dZ_{нМ}}{dt} \right) + C_{нш} \cdot (q(v \cdot t) - Z_{нМ}); \quad (2)$$

$F_{зш}$ – равнодействующая от сил упругости и демпфирования, действующая на задний мост со стороны шин, Н

$$F_{зш} = K_{зш} \cdot \left(\frac{dq(v \cdot t - (L_n + L_z))}{dt} - \frac{dZ_{зМ}}{dt} \right) + C_{зш} \cdot (q(v \cdot t - (L_n + L_z)) - Z_{зМ}); \quad (3)$$

$F_{нп}$ – равнодействующая от сил упругости и демпфирования, действующая на передний мост и остова со стороны подвески, Н

$$F_{нп} = K_{нп} \cdot \left(\frac{dZ_{нМ}}{dt} - \frac{dZ_o}{dt} + \frac{d\alpha}{dt} \cdot L_n \cdot \cos(\alpha) \right) + C_{нп} \cdot (Z_{нМ} - Z_o + L_n \cdot \text{tg}(\alpha)); \quad (4)$$

$F_{зп}$ – равнодействующая от сил упругости и демпфирования, действующая на задний мост и остова со стороны подвески, Н;

$$F_{3\Pi} = K_{3\Pi} \cdot \left(\frac{dZ_{3M}}{dt} - \frac{dZ_O}{dt} - \frac{d\alpha}{dt} \cdot L_3 \cdot \cos(\alpha) \right) + (5) \\ + C_{3\Pi} \cdot (Z_{3M} - Z_O - L_3 \cdot \operatorname{tg}(\alpha));$$

F_C – равнодействующая от сил упругости и демпфирования, действующая на сиденье с водителем и остов со стороны подвески сиденья, Н

$$F_C = K_C \cdot \left(\frac{dZ_O}{dt} + \frac{d\alpha}{dt} \cdot L_c \cdot \cos(\alpha) - \frac{dZ_B}{dt} \right) + (6) \\ + C_C \cdot (Z_O + L_c \cdot \operatorname{tg}(\alpha) - Z_B),$$

где $Z_{\text{нМ}}$ – вертикальная координата положения центра масс переднего моста, м; Z_{3M} – вертикальная координата положения центра масс заднего моста, м; Z_O – вертикальная координата положения центра масс остова, м; α_0 – угловая координата положения остова, рад; $L_{\text{п}}$, L_3 , L_c – плечи соответствующих сил, м.

Следует заметить, что каждая из представленных сил зависит от входящих в расчетную формулу вертикальных компонент скоростей и перемещений, а также углов и угловых скоростей, которые, по сути, являются аргументами в данных формулах. В среде MathCAD данные аргументы обязательно необходимо записывать [1, 2], но в нашем случае мы их не указываем с целью снижения громоздкости отображения расчетных зависимостей.

В результате анализа представленных на рис. 3 схем можем получить 4-массовую математическую модель колебаний элементов конструкции МЭС:

$$\begin{cases} m_{\text{нМ}} \cdot \frac{d^2 Z_{\text{нМ}}}{dt^2} = F_{\text{нШ}} - F_{\text{нП}}, \\ m_{3M} \cdot \frac{d^2 Z_{3M}}{dt^2} = F_{3Ш} - F_{3\Pi}, \\ m_O \cdot \frac{d^2 Z_O}{dt^2} = F_{\text{нП}} + F_{3\Pi} - F_C, \\ J_O \cdot \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = F_{3\Pi} \cdot L_3 - F_{\text{нП}} \cdot L_{\text{п}} - F_C \cdot L_c, \\ m_B \cdot \frac{d^2 Z_B}{dt^2} = F_C. \end{cases} (7)$$

Для нахождения решения подобной системы зачастую применяются встроенные функции численного расчета систем дифференциальных уравнений, такие как *odesolve*, *rkfixed*, *rkadapt*, *bulstoer*, *stiffir* и др. [2, 5, 7].

Разберем алгоритм решение полученной системы применением встроенной функции *rkfixed* методом Рунге – Кутта 4-го порядка [3].

1. Задаем вектор начальных условий. В нашем случае примем:

$$\text{in} := (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T, (8)$$

in_0 – вертикальное перемещение переднего моста;

in_1 – скорость вертикального перемещения переднего моста;

in_2 – вертикальное перемещение заднего моста;

in_3 – скорость вертикального перемещения заднего моста;

in_4 – вертикальное перемещение остова;

in_5 – скорость вертикального перемещения остова;

in_6 – угловое положение остова;

in_7 – скорость углового перемещения остова;

in_8 – вертикальное перемещение водителя;

in_9 – скорость вертикального перемещения водителя.

Это означает, что вертикальные перемещения и скорости компонент МЭС, а также угловые скорость и перемещение остова в начале моделирования равны нулю.

2. Определяем моменты времени начала $T_{\text{нач}}$ и конца $T_{\text{кон}}$ моделирования. В нашем случае примем: $T_{\text{нач}} = 0$ с, $T_{\text{кон}} = 10$ с.

3. Определяем количество расчетных точек N на данном временном участке. Увеличение числа точек приводит к повышению точности и, одновременно, возрастанию времени, затрачиваемому на расчет. В нашем расчете мы принимаем $N = 10^4$.

4. Определяем правую часть уравнения – матрицу D , которая будет содержать производные искомого решения:

$$D(t, \text{in}) := \left(\text{in}_1 \frac{d^2 Z_{\text{нМ}}}{dt^2} \text{in}_3 \frac{d^2 Z_{3M}}{dt^2} \times \right. (9) \\ \left. \times \text{in}_5 \frac{d^2 Z_O}{dt^2} \text{in}_7 \frac{d^2 \alpha}{dt^2} \text{in}_9 \frac{d^2 Z_B}{dt^2} \right)^T.$$

В качестве аргументов данной функции передается вначале независимая переменная t – время и вектор начальных условий. Вторые производные по времени для перемещений различных узлов определяются делением на соответствующие массы уравнений в системе (7).

5. Производим решение уравнений методом Рунге – Кутта 4-го порядка:

$$\text{Out} := \text{rkfixed}(\text{in}, T_{\text{нач}}, T_{\text{кон}}, N, D). (10)$$

В результате расчета получим матрицу решений дифференциального уравнения Out, первым столбцом в которой являются значения независимой переменной – времени, а все последующие – в соответствии с заданными начальными условиями.

Программный пакет MathCAD позволяет создавать анимированное представление перемещений элементов конструкции МЭС при наезде на единичное препятствие с помощью программной переменной, обозначаемой как FRAME. Эта переменная при расчете может принимать значения от 0 до 999 в зависимости от потребностей пользователя. Причем расчет проводится для каждого значения этой переменной с самого начала. Одновременно записывается в видеофайл выбранная пользователем область рабочего пространства программы, как правило, – двумерный или трехмерный график [5].

Учитывая, что одно вычисление матрицы решений нашей системы на современном высокопроизводительном ПК составляет около 40 с, то расчет и создание анимированного представления перемещения элементов конструкции МЭС может продлиться более 10 час.

Чтобы избежать ненужного и длительного пересчета решения его необходимо сохранить в файл, а затем обращаться к нему при создании анимации из другого расчетного файла. Для записи в файл в среде MathCAD используется функция WRITEPRN [7]. Она создает текстовый файл нужной конфигурации с разрешением *.prn. Его можно просматривать и редактировать блокнотом Windows.

Пример записи результатов моделирования в файл в корневом каталоге диска C:

$$\text{WRITEPRN}("C:\text{output.prn}") := \text{Out} . \quad (11)$$

В дальнейшем мы будем обращаться к данному файлу из вновь созданного расчетного файла среды MathCAD. Доступ к файлу решения осуществляется с помощью функции READPRN:

$$\text{Input} := \text{READPRN}("C:\text{output.prn}") . \quad (12)$$

После исполнения указанной строчки содержимое сохраненной матрицы решений копируется в матрицу Input. Эта операция выполняется практически мгновенно, так как при этом отсутствуют сложные математические вычисления, а идет лишь обращение к дисковому пространству.

Для создания качественного анимированного представления модели поведения кон-

структивных элементов МЭС при переезде единичного препятствия необходимо отобразить перемещение каждого элемента в отдельности при помощи некоторых геометрических примитивов, легко задаваемых на двумерных чертежах, например, прямоугольников, квадратов или окружностей. Для этого необходимо создать прототипы функций, которые будут использованы для отображения некоторых конструктивных элементов в соответствии с принятыми ограничениями модели.

Следует указать, что результатом выполнения указанных прототипов функций будет создание двумерных массивов, состоящих из двух столбцов с n -м количеством точек, необходимым для отображения замкнутого контура примитива.

По понятным причинам, необходимое количество точек для качественного отображения окружности серьезно превышает количество, требуемое для отрисовки прямоугольника или квадрата, поэтому применение окружностей целесообразно ограничить.

Ниже приведены прототипы функций для создания квадрата со стороной a , прямоугольника высотой a и длиной $(L_{\text{п}} + L_{\text{з}} + a)$ и окружности радиусом R , центры которых расположены на расстоянии L от начала координат вдоль оси x и на расстоянии H от начала координат вдоль оси y . При этом квадрат и круг не могут совершать вращательного движения, а прямоугольник может. Следует обратить внимание, что для отрисовки окружности радиусом R , с аналогичными аргументами положения, необходимо 37 точек. Меньшее количество может отразиться на качестве отображения круга.

$$\text{SQUARE}(a,L,H) := \begin{cases} x_0 \leftarrow L - a / 2 \\ x_2 \leftarrow L + a / 2 \\ x_1 \leftarrow x_0 \\ x_3 \leftarrow x_2 \\ x_4 \leftarrow x_0 \\ \text{res}^{(0)} \leftarrow x \\ y_0 \leftarrow H - a / 2 \\ y_1 \leftarrow H + a / 2 \\ y_2 \leftarrow y_1 \\ y_3 \leftarrow y_0 \\ y_4 \leftarrow y_0 \\ \text{res}^{(1)} \leftarrow y \\ \text{res} \quad ; \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
 \text{RECT}(a, \alpha, L, H) := & \begin{cases} x_0 \leftarrow L - [(a/2 + L_r) \cdot \cos(\alpha) - \\ - a/2 \cdot \sin(\alpha)] \\ x_1 \leftarrow x_0 - a \cdot \sin(\alpha) \\ x_2 \leftarrow x_1 + (a + L_r + L_c) \cdot \cos(\alpha) \\ x_3 \leftarrow x_0 + (a + L_r + L_c) \cdot \cos(\alpha) \\ x_4 \leftarrow x_0 \\ res^{(0)} \leftarrow x \\ y_0 \leftarrow H - [(a/2 + L_r) \cdot \sin(\alpha) - \\ - a/2 \cdot \cos(\alpha)] \\ y_1 \leftarrow H + a \cdot \cos(\alpha) \\ y_2 \leftarrow y_1 + (a + L_r + L_c) \cdot \sin(\alpha) \\ y_3 \leftarrow y_0 + (a + L_r + L_c) \cdot \sin(\alpha) \\ y_4 \leftarrow y_0 \\ res^{(1)} \leftarrow y \\ res \end{cases} ; \quad (14)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{CIRCLE}(R, L, H) := & \begin{cases} \text{for } i \in 0..36 \\ \left| \begin{aligned} x_i & \leftarrow L + \cos(i \cdot \pi / 18) \\ y_i & \leftarrow H + \sin(i \cdot \pi / 18) \end{aligned} \right. \\ res^{(0)} & \leftarrow x \\ res^{(1)} & \leftarrow y \\ res & . \end{cases} \quad (15)
 \end{aligned}$$

Внешний вид квадрата, прямоугольника и окружности, отображенных с использованием написанных нами функций, представлен на рис. 4.

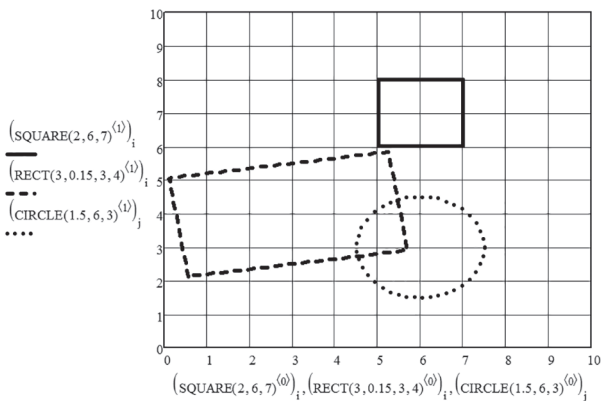


Рис. 4. Пример одновременного отображения фигур на двумерных графиках в среде MathCAD

Теперь, если привязать значение высоты положения квадрата или прямоугольника к системной переменной FRAME, можно создать анимацию поднимающегося вдоль оси Y примитива.

Анимация создается при помощи пунктов меню MathCAD *Инструменты->Анимация->>Запись*. В появившемся окне необходимо определить предел изменения переменной FRAME, количество кадров в секунду, затем, не закрывая окна, мышью в рабочей зоне выделить записываемую область (как правило, это двумерный график) и нажать на кнопку *Анимировать*. Созданную анимацию можно сохранить в *.avi как видеофайл для дальнейшего анализа и демонстрации.

Кроме этого, переменную FRAME можно использовать для доступа к элементу массива. Если последовательно обращаться к элементам матрицы решений разработанной системы (7), предварительно привязав их к высотам положений примитивов, соответствующих конструктивным элементам трактора, можно создать анимированное представление поведения трактора при переезде через единичное препятствие.

Следует напомнить, что переменная FRAME может принимать максимум тысячу значений, при этом количество строк в матрице решений может значительно превышать данное значение. В этом случае необходимо отбросить часть строк решений, например при использовании 10 тыс. точек решения необходимо использовать каждую десятую строчку результатов для создания анимации.

Следует на каждом шаге расчета сохранять текущие значения решения в отдельный вектор STEP, к которому в дальнейшем и обращаться

$$\text{STEP} := (\text{Input}^T)^{\langle \text{FRAME} - 10 \rangle} \quad (16)$$

Необходимо заранее расположить примитивы на графике в максимальном соответствии с их пространственным положением в конструкции трактора.

Если предварительно сдвинуть на ΔL вдоль оси x от начала координат центр переднего моста, а значение ΔH использовать в качестве вертикального расстояния между элементами, получим следующую систему выражений для упрощенного изображения исследуемых конструктивных элементов трактора:

$$\begin{cases} \text{PM} := \text{SQUARE} (a, \Delta L, \Delta H + \text{STEP}_1) \\ \text{ZM} := \text{SQUARE} (a, \Delta L + L_{\text{п}} + L_3, \Delta H + \text{STEP}_3) \\ \text{OST} := \text{RECT} (a, \text{STEP}_7, \Delta L + L_{\text{п}}, 2 \cdot \Delta H + \text{STEP}_5) \\ \text{SID} := \text{SQUARE} (a, \Delta L + L_{\text{п}} + L_c, 3 \cdot \Delta H + \text{STEP}_9) \end{cases} \quad (17)$$

Данное упрощенное изображение представлено на рис. 5.

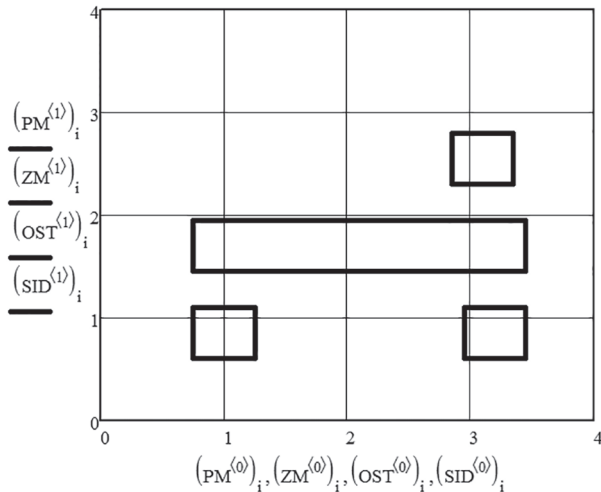


Рис. 5. Упрощенное изображение исследуемых конструктивных элементов трактора при значениях геометрических параметров:

$$\Delta L = 1, \Delta H = 0,85, a = 0,5, L_{\text{п}} = 1,2, \\ L_3 = 1,0, L_c = 0,9 [4]$$

Добавив пробег через график единичной неровности по формуле (1), в соответствующий момент переезжаемой трактором, можем получить качественную визуализацию процесса переезда МЭС единичного препятствия заданной формы.

Выводы

1. Создаваемые при решении систем дифференциальных уравнений матрицы численного решения могут быть использованы не только для графических представлений поведения исследуемого объекта, но и для анимированных отображений данных процессов.

2. Анимация способна наглядно продемонстрировать характер поведения смоделированных объектов с течением времени, сравнить его с поведением реальных объектов, и быстро проанализировать качество математической модели, выявить ее недостатки и найти ошибки, допущенные при моделировании.

3. Созданные по описанной методике визуализированные представления могут приме-

няться для демонстраций при осуществлении докладов, разъяснении принципов работы и в других смежных ситуациях.

Литература

1. Воскобойников Ю.Е., Очков В.Ф. Программирование и решение задач в пакете MathCAD : учеб. пособие. Новосибирск: НГАСУ, 2003. 132 с.
2. Воскобойников Ю.Е. Регрессионный анализ данных в пакете MathCAD: учебное пособие. М.: «Лань», 2011. 224 с.
3. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: «Наука», 1978. 518 с.
4. Конструкция тракторов и автомобилей: учебное пособие / О.И. Поливаев [и др.]; под общ. ред. О.И. Поливаева. М.: «Лань», 2013. 286 с.
5. Майер Р.В. Решение физических задач с помощью пакета MathCAD. М.: «Лань». 2006. 203 с.
6. Поливаев О.И., Юшин А.Ю. Снижение воздействия транспортной вибрации на операторов мобильных энергетических средств: монография [Электронный ресурс]. Воронеж: Воронежский государственный аграрный университет, 2008. 177 с. URL: <http://catalog.vsau.ru/elib/books/b87113.pdf> (дата обращения: 03.07.2018).
7. Поршнев С.В. Компьютерное моделирование физических процессов с использованием пакета MathCAD. М.: «Горячая линия – Телеком», 2002. 252 с.
8. Ротенберг Р.В. Подвеска автомобиля. 3-е изд. М.: «Машиностроение», 1972. 392 с.
9. Силаев А.А. Спектральная теория подрессоривания транспортных машин. 2-е изд. М.: «Машиностроение», 1972. 192 с.
10. Устинов Ю.Ф. Механические колебания и виброакустическая защита транспортно-технологических строительных машин. Воронеж: Воронежский государственный архитектурно-строительный университет, ЭБС АСВ, 2015. 241 с.

References

1. Voskobojnikov YU.E., Ochkov V.F. Programirovanie i reshenie zadach v pakete MathCAD [Programming and problem solving in MathCAD package]: ucheb. posobie. Novosibirsk: NGASU Publ., 2003. 132 p.
2. Voskobojnikov YU.E. Regressionnyj analiz dannyh v pakete MathCAD [Regression analysis of data in the MathCAD package]: uchebnoe posobie. Moscow: «Lan» Publ., 2011. 224 p.
3. Kalitkin N.N. CHislennye metody [Numerical methods]. Moscow: «Nauka» Publ., 1978. 518 p.

4. Konstrukciya traktorov i avtomobilej [Design of tractors and automobiles]: uchebnoe posobie. O.I. Polivaev [i dr.] ; pod obshch. red. O.I. Polivaeva. Moscow: «Lan» Publ., 2013. 286 p.
5. Majer R.V. Reshenie fizicheskikh zadach s pomoshch'yu paketa MathCAD [The solution of physical problems using Mathcad]. Moscow: «Lan» Publ.. 2006. 203 p.
6. Polivaev O.I., YUshin A.YU. Snizhenie vozdeystviya transportnoj vibracii na operatorov mobil'nykh chnergeticheskikh sredstv [Reducing the impact of transport vibration on mobile energy operators]: monografiya [EHlektronnyj resurs]. Voronezh: Voronezhskij gosudarstvennyj agrarnyj universitet, 2008. 177 p. URL: <http://catalog.vsau.ru/elib/books/b87113.pdf> (data obrashcheniya: 03.07.2018).
7. Porshnev S.V. Komp'yuternoe modelirovanie fizicheskikh processov s ispol'zovaniem paketa MathCAD [Computer simulation of physical processes using MathCAD package]. Moscow: «Goryachaya liniya – Telekom» Publ., 2002. 252 p.
8. Rotenberg R.V. Podveska avtomobilya [Automobile suspension]. 3-e izd. Moscow: «Mashinostroenie» Publ., 1972. 392 p.
9. Silaev A.A. Spektral'naya teoriya podressorivaniya transportnykh mashin [Spectral theory of the suspension of transport vehicles]. 2-e izd. Moscow: «Mashinostroenie» Publ., 1972. 192 p.
10. Ustinov YU.F. Mekhanicheskie kolebaniya i vibroakusticheskaya zashchita transportno-tekhnologicheskikh stroitel'nykh mashin [Mechanical vibrations and vibro-acoustic protection of transport and technological construction machines]. Voronezh: Voronezhskij gosudarstvennyj arhitekturno-stroitel'nyj universitet, EHBS ASV Publ., 2015. 241 p.