

# ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ДВУХШАРНИРНОЙ КАРДАННОЙ ПЕРЕДАЧИ

## VECTOR ANALYSIS OF THE KINEMATIC CHARACTERISTICS OF TWO-JOINT CARDAN SHAFT

**А.В. КОТОВ**

ОАО «Сейсмотехника», Гомель, Беларусь,  
androskv@mail.ru

**A.V. KOTOV**

JSC «Seismotekhnika», Gomel, Belarus, androskv@mail.ru

На примере двухшарнирной карданной передачи представлен метод аналитического описания ее кинематических характеристик, основанный на применении векторного анализа, который долгое время успешно применяется автором при проектировании различных рычажных механизмов. Предлагаемый метод базируется на пространственном методе преобразования координат. В данном методе, чтобы получить повернутый в пространстве вектор, необходимо задать исходный вектор, вокруг которого будет осуществляться поворот, сам угол поворота и, если требуется, новую длину вектора. В предложенном методе векторного анализа для описания кинематики двухшарнирной карданной передачи в качестве исходных геометрических данных выступают только координаты точек осей карданных валов и радиус крестовины.

Адекватность полученных результатов кинематического анализа векторным методом проверялась двумя способами. В первом случае полученные векторным методом значения координат всех характерных точек двухшарнирной карданной передачи сопоставлялись с соответствующими координатами характерных точек идентичной параметрической модели, построенной в трехмерном САД-пакете. Во втором случае полученные векторным методом значения угловых скоростей и ускорений валов двухшарнирной карданной передачи сопоставлялись с аналитическими зависимостями, приведенными в известных литературных источниках. В результате всех проверок был сделан вывод об абсолютной адекватности предложенного метода векторного анализа двухшарнирной карданной передачи. Данный метод может быть в дальнейшем использован для нахождения векторов-нагрузок (сил и моментов), действующих в элементах карданной передачи, с целью проведения последующих прочностных расчетов. Предложенный векторный метод анализа двухшарнирной карданной передачи является универсальным и может быть успешно применен для описания кинематики не только двухшарнирной карданной передачи, но и для поликарданной передачи любой сложности.

*Ключевые слова:* векторный анализ, метод преобразования координат, карданная передача, поликарданная передача, неравномерность вращения.

Using the example of a two-joint cardan shaft, a method is presented for analytically describing its kinematic characteristics based on the use of vector analysis, which the author has been successfully using for a long time in designing various lever mechanisms. The proposed vector analysis method is based on the spatial coordinate transformation method. In this method, to get a vector rotated in space, you must specify the source vector, the vector around which the rotation will be performed, the angle of rotation itself and if a new vector length is required. In the proposed vector analysis method for describing the kinematics of a two-joint cardan shaft, the coordinates of the points of the axes of the cardan shafts and the radius of the cross are the basic geometric data. The adequacy of the results of kinematic analysis by the vector method was tested in two ways. In the first case, the values obtained by the vector method for the coordinates of all the characteristic points of the two-joint cardan shaft were compared with the corresponding coordinates of the characteristic points of the identical parametric model built in the three-dimensional CAD package. In the second case, the angular velocities and accelerations of the shafts of the two-joint cardan shaft obtained by the vector method were compared with the analytical dependencies given in the well-known literature sources. As a result of all the checks, it was concluded that the proposed method of vector analysis of two-joint cardan shaft is absolutely adequate. The developed method of vector analysis of the kinematic characteristics of two-joint cardan shaft can be further used to find the vector-loads (forces and moments) acting in the cardan transmission elements in order to conduct subsequent strength calculations. The proposed vector analysis method of two-joint cardan shaft is universal and can be successfully applied to describe the kinematics not only of two-joint cardan shaft, but also for polycardan transmission of any complexity.

*Keywords:* vector analysis, coordinate transformation method, cardan shaft, polycardan shaft, irregularity of rotation.

## Введение

Карданные передачи (КрП), представляющие собой компактные кинематические соединения, нашли широкое применение в различных отраслях машиностроения для соединения валов, оси которых не лежат на одной прямой и могут иметь относительное перемещение.

Кинематическое несовершенство КрП, связанное, в первую очередь, с неравномерностью вращения ее валов, является одной из основных причин возникновения в ней динамических нагрузок. При определенных кинематических параметрах КрП возникающие в ней динамические нагрузки могут быстро возрасти, что приводит к уменьшению долговечности, а зачастую и к поломке различных элементов ее конструкции. Поэтому от правильности выбора и расчета кинематических характеристик КрП во многом зависит точность определения действующих в ней динамических нагрузок, а также эффективность мероприятий по их снижению.

Известны аналитические методы описания кинематических характеристик одно- и двухшарнирных КрП [1–3]. Однако применение данных методов для анализа кинематических характеристик поликарданных передач (т.е. последовательно соединенных простых карданов с произвольным числом шарниров) представляет весьма сложную задачу из-за своей громоздкости, а также невозможности применения полученных результатов при дальнейших динамических расчетах. В работах [1, 4] представлены аналитические методы описания кинематических характеристик поликарданных передач путем разложения их передаточных отношений в степенные ряды. Однако и данные методы не отличаются наглядностью, проводятся с рядом допущений, а разложение в степенные ряды осуществляется с некоторой погрешностью, что в совокупности при определенных условиях может существенно повлиять на точность конечных результатов. Поэтому получение универсальных, удобных и наглядных аналитических зависимостей для анализа кинематических характеристик КрП все еще является актуальной задачей.

## Цель исследований

На примере двухшарнирной КрП представить метод аналитического описания ее кинематических характеристик, основанный на применении векторного анализа, который долгое время успешно применяется автором

при проектировании различных рычажных механизмов [6–9].

## Материалы и методы

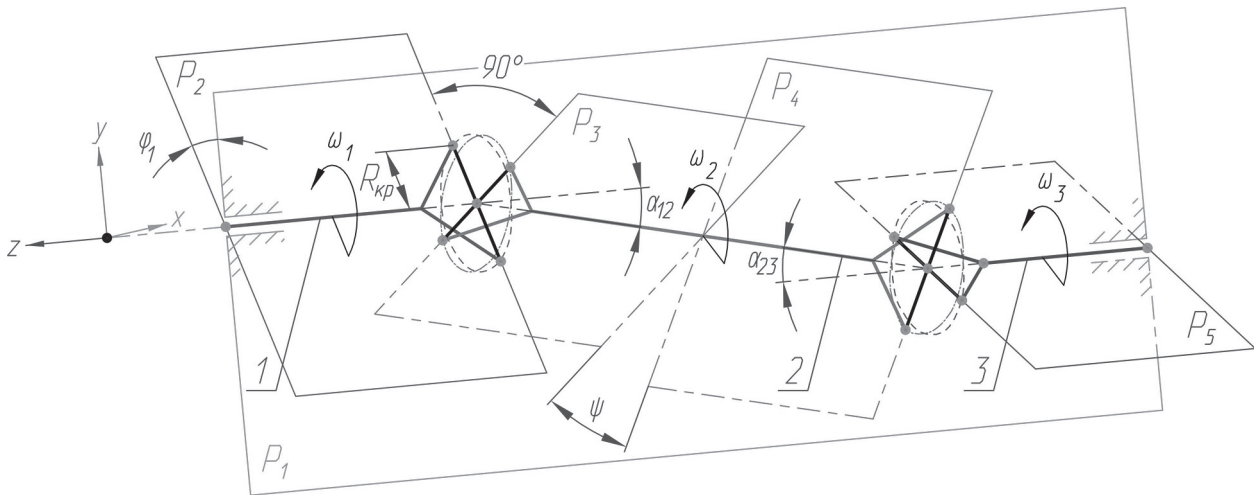
Предлагаемый векторный метод анализа является универсальным и может быть успешно применен для описания кинематики не только двухшарнирной КрП, но и для поликарданной передачи любой сложности.

### Описание кинематической схемы

Как известно, двухшарнирная КрП может иметь различное пространственное расположение как своих валов, так и вилок промежуточного вала. Описанный в данной работе метод векторного анализа позволяет учесть все указанные особенности пространственного расположения двухшарнирной КрП. Однако для проверки адекватности предлагаемого метода с известными аналитическими и графическими зависимостями [1–5] была рассмотрена упрощенная схема двухшарнирной КрП, приведенная на рис. 1.

Согласно приведенной на рис. 1 кинематической схеме двухшарнирной КрП все ее валы расположены в плоскости передачи  $P_1$ , а ось ведущего вала (поз. 1) параллельна оси ведомого вала (поз. 3). Шарниры крестовины ведущего и промежуточного (поз. 2) валов перемещаются по окружностям заданного радиуса  $R_{кр}$ , каждая из которых лежит в плоскости, перпендикулярной к соответствующей оси вала. Аналогично перемещаются шарниры крестовины промежуточного и ведомого валов. При любом угле поворота вилки ведущего вала угол между осями обеих крестовин остается равным  $90^\circ$ . Промежуточный вал расположен под углом  $\alpha_{12}$  к оси ведущего вала и под углом  $\alpha_{23}$  к оси ведомого вала в плоскости передачи  $P_1$ . Плоскости вилок промежуточного вала  $P_3$  и  $P_4$  могут иметь угол смещения  $\psi$ , изменяемый в диапазоне от  $0^\circ$  (плоскости вилок совпадают) до  $90^\circ$  (плоскости вилок перпендикулярны друг другу).

За начальное положение вилки ведущего вала принято положение, при котором плоскость вилки  $P_2$  ведущего вала находится в плоскости передачи  $P_1$ . Однако стоит отметить, что для предложенного метода векторного анализа не является принципиальным привязка к какому-либо конкретному положению. Описанное выше начальное положение вилки ведущего вала делается лишь для удобства сравнения и сопоставления полученных результатов с известными аналитическими и гра-



**Рис. 1. Общий вид кинематической схемы двухшарнирной КрП:**

$P_1$  – плоскость, проходящая через оси валов КрП и называемая плоскостью передачи;  $P_2$  – плоскость карданной вилки ведущего вала;  $P_3, P_4$  – плоскости карданных вилок промежуточного вала;  $P_5$  – плоскость карданной вилки ведомого вала;  $\alpha_{12}, \alpha_{23}$  – острый угол между осями валов в плоскости передачи;  $\psi$  – угол смещения плоскостей карданных вилок на промежуточном валу;  $j_1$  – угол поворота вилки ведущего вала;  $\omega_1, \omega_2$ , и  $\omega_3$  – угловая скорость вращения, соответственно, ведущего, промежуточного и ведомого валов;  $R_{кр}$  – радиус крестовины; 1 – ведущий вал; 2 – промежуточный вал; 3 – ведомый вал

фическими зависимостями, для которых такая привязка принципиально важна.

С учетом указанного выше начального положения вилки ведущего вала принято следующее направление координатных осей. Ось  $Z$  направлена вдоль оси ведущего вала таким образом, что если смотреть на острие оси  $Z$ , то вращение вилки ведущего вала осуществляется против часовой стрелки. Ось  $Y$  направлена вертикально вверх и лежит в плоскости передачи  $P_1$  (совпадает с осью вилки ведущего вала в начальном положении). Ось  $X$  направлена перпендикулярно плоскости  $ZY$ , образованной соответствующими осями (совпадает с осью вилки промежуточного вала в начальном положении), а ее направление определяется по правилу буравчика. В качестве обобщенной координаты принят угол поворота вилки ведущего вала  $j_1$ , который однозначно определяет положение всех характерных точек двухшарнирной КрП.

*Аналитические зависимости и условные обозначения*

В связи с пространственным расположением двухшарнирной КрП предлагаемый

$$M(\vec{n}, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta + (1 - \cos \theta) \cdot n_x^2 & (1 - \cos \theta) \cdot n_x \cdot n_y - \sin \theta \cdot n_z & (1 - \cos \theta) \cdot n_x \cdot n_z + \sin \theta \cdot n_y \\ (1 - \cos \theta) \cdot n_x \cdot n_y + \sin \theta \cdot n_z & \cos \theta + (1 - \cos \theta) \cdot n_y^2 & (1 - \cos \theta) \cdot n_y \cdot n_z - \sin \theta \cdot n_x \\ (1 - \cos \theta) \cdot n_x \cdot n_z - \sin \theta \cdot n_y & (1 - \cos \theta) \cdot n_z \cdot n_y + \sin \theta \cdot n_x & \cos \theta + (1 - \cos \theta) \cdot n_z^2 \end{bmatrix},$$

где  $n_x, n_y, n_z$  – проекции единичного вектора  $\vec{n}$ , вокруг которого осуществляется поворот в пространстве, на соответствующие оси принятой системы координат.

метод векторного анализа основан на известном методе преобразования координат и аналитических зависимостях (1)–(7), приведенных в работе [8], с учетом некоторых дополнений. Так, для получения повернутого в пространстве вектора  $\vec{V}_1$ , имеющего заданную длину, не равную исходному поворачиваемому вектору, будет использоваться следующее выражение:

$$\vec{V}_1 = \text{Turn}V_{Lnew}^{3D}(\vec{V}, \vec{n}, \theta, Lnew) = M(\vec{n}, \theta) \cdot \vec{V} \cdot Lnew / |\vec{V}|, \tag{1}$$

где  $\vec{V}_1$  – поворачиваемый исходный вектор;  $\vec{n}$  – единичный вектор, вокруг которого осуществляется поворот в пространстве;  $\theta$  – угол поворота исходного вектора (значение угла  $\theta$  принимается со знаком «+» при осуществлении поворота исходного вектора против часовой стрелки (если смотреть на острие вектора  $\vec{n}$ ), а при повороте по часовой стрелки – со знаком «-»);  $Lnew$  – длина нового вектора;  $M(\vec{n}, \theta)$  – матрица поворота вектора, которую удобно представить в виде так называемой матрицы направляющих косинусов:

Представленное в работе [8] выражение (6) отличается от выражения (1) в данной работе лишь в форме записи матрицы поворота. Если в данной работе матрица поворота представлена в виде направляющих косинусов (что является более наглядным), то в работе [8] матрица поворота представлена в виде трех составляющих по осям системы координат.

Кроме того, для наглядности и простоты понимания приведенного в данной работе аналитического описания в векторах двухшарнирной КрП введены следующие понятия и условные обозначения.

Вектор, обозначенный одной буквой латинского алфавита (например,  $\vec{A}_1$ ), будет называться абсолютным вектором, т.е. координатой точки относительно начала принятой системы координат. Вектор, обозначенный двумя буквами латинского алфавита (например,  $AB$ ), будет называться относительным вектором, т.е. координатой второй точки относительно первой. Суть обоих введенных понятий абсолютно одинакова, т.к. и вектор называемый абсолютным, и вектор называемый относительным, – это координата одной точки относительно другой.

*Кинематический анализ механизма*

На рис. 2 приведен общий вид рассматриваемой двухшарнирной КрП в виде конструктивной (рис. 2, а) и кинематической схемы (рис. 2, б) с принятыми обозначениями всех характерных точек для начального положения вилки ведущего вала.

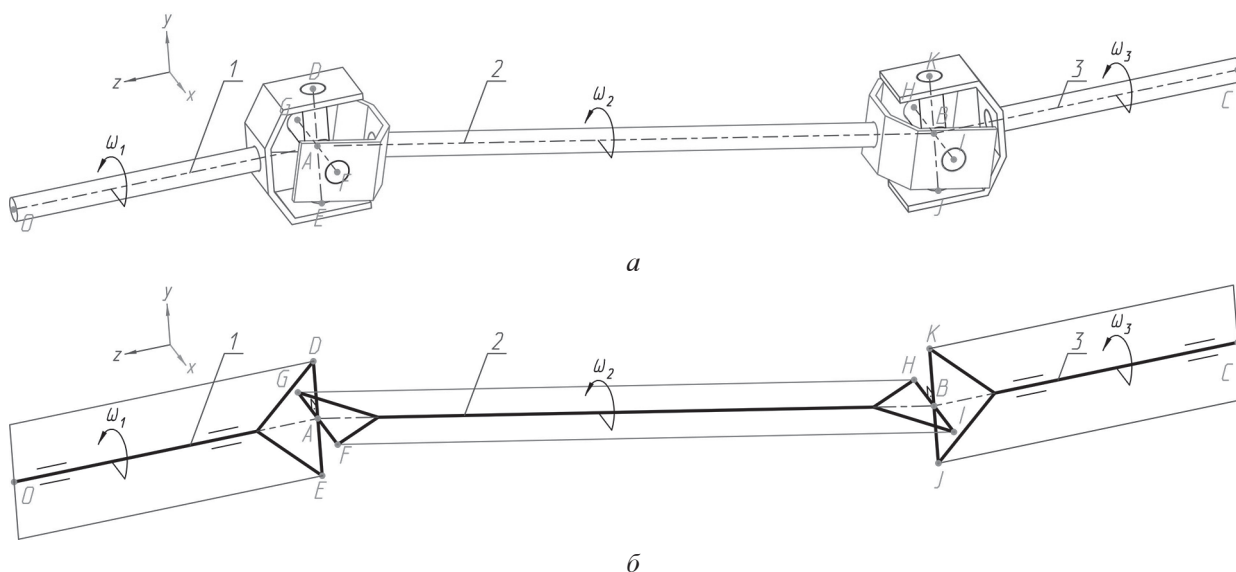
В предложенном методе векторного анализа при описании кинематики двухшарнирной КрП в качестве исходных геометрических данных выступают только координаты точек осей карданных валов и радиус крестовины. Принятые в качестве исходных данных параметры рассматриваемой двухшарнирной КрП (см. рис. 2) приведены в таблице.

Аналитическое описание в векторах кинематики двухшарнирной КрП в зависимости от значения угла  $\varphi_1$  поворота вилки ведущего вала с учетом выражения (1) можно представить в следующем виде:

$$\vec{OA} = \vec{A} - \vec{O}; \tag{2}$$

$$\vec{AD}(\varphi_1) = TurnV_{Lnew}^{3D}(\vec{e}_y, \vec{e}_z, \varphi_1, R_{кр}). \tag{3}$$

Выражением (3) получен относительный вектор  $AD(\varphi_1)$  путем поворота единичного



**Рис. 2. Схема двухшарнирной КрП для начального положения вилки ведущего вала:**

а – конструктивная схема; б – кинематическая схема;  
1 – ведущий вал; 2 – промежуточный вал; 3 – ведомый вал

Таблица

**Исходные данные для рассматриваемой двухшарнирной КрП**

Координаты	Значения координат точек, мм				Радиус крестовины $R_{кр}$ , мм	Частота вращения ведущего вала, об/мин
	О	А	В	С		
X	0	0	0	0	100	600
Y	0	0	-200	-200		
Z	0	-500	-1500	-2000		

вектора  $\vec{e}_y$  оси  $Y$  вокруг единичного вектора  $\vec{e}_z$  оси  $Z$  на угол  $\varphi_1$  (угол поворота вилки ведущего вала) против часовой стрелки с изменением его длины на заданную длину радиуса крестовины  $R_{кр}$ .

Необходимо отметить, что положение всех подвижных точек или звеньев описываемой двухшарнирной КрП является функцией угла поворота ведущего вала  $\varphi_1$ , т.е. функцией от обобщенной координаты. Следовательно, и все векторы, описывающие положение двухшарнирной КрП, также являются функциями от обобщенной координаты. Таким образом, в данной работе подразумеваются не просто векторы, а вектор-функции, которые в совокупности описывают положение всей двухшарнирной КрП в зависимости от значения обобщенной координаты. В приведенном ниже аналитическом описании вектор-функциями являются все векторы, после обозначения которых в скобках указана обобщенная координата. Там, где обобщенная координата после обозначения вектора отсутствует, вектор не является функцией, а является неподвижной точкой или звеном.

С помощью следующих выражений описывается кинематика характерных точек (абсолютных векторов) первой крестовины двухшарнирной КрП, соединяющей ведущий и промежуточный валы:

$$\vec{D}(\varphi_1) = \vec{A} + \vec{AD}(\varphi_1); \quad (4)$$

$$\vec{AE}(\varphi_1) = -\vec{AD}(\varphi_1); \quad (5)$$

$$\vec{E}(\varphi_1) = \vec{A} + \vec{AE}(\varphi_1). \quad (6)$$

Наибольший интерес при описании кинематики двухшарнирной КрП вызывают участки при переходе с одного вала на другой в зоне расположения крестовин (т.  $A$  и т.  $B$ , см. рис. 2). Именно на этих участках происходит поворот передаваемого потока мощности на угол наклона между осями валов, что приводит к возникновению в данной зоне сосредоточенных изгибающих моментов, действующих на вилки соединяемых валов.

В зоне расположения первой крестовины (т.  $A$ , см. рис. 2) пересекаются четыре оси: ось ведущего вала ( $OA$ ), ось промежуточного вала ( $AB$ ), ось крестовины установки вилки ведущего вала ( $DE$ ) и ось крестовины установки вилки промежуточного вала ( $FG$ ). Причем для любого угла поворота  $\varphi_1$  вилки ведущего вала оси обоих валов ( $OA$  и  $AB$ ) всегда остаются

перпендикулярными к осям крестовин установки своих вилок, а оси крестовин установки вилок ( $DE$  и  $FG$ ) всегда остаются перпендикулярными друг к другу. В связи с этим для описания кинематики данного участка можно воспользоваться геометрическим свойством векторного произведения:

$$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A}; \quad (7)$$

$$\vec{AG}(\varphi_1) = R_{кр} \cdot \text{Ort}(\vec{AD}(\varphi_1) \vec{AB}); \quad (8)$$

$$\vec{AF}(\varphi_1) = -\vec{AG}(\varphi_1). \quad (9)$$

Выражением (8) получен относительный вектор  $\vec{AG}(\varphi_1)$  путем умножения радиуса крестовины  $R_{кр}$  на единичный вектор ( $\text{Ort}$ ), найденный в результате векторного произведения. Данный вектор является перпендикулярным плоскости, образуемой перемножаемыми векторами  $\vec{AD}(\varphi_1)$  и  $\vec{AB}$  (ось крестовины установки вилки ведущего вала и ось промежуточного вала), а его направление определяется правилом векторного произведения.

С помощью следующих выражений описывается кинематика оставшихся характерных точек (абсолютных векторов) первой крестовины двухшарнирной КрП, соединяющей ведущий и промежуточный валы:

$$\vec{G}(\varphi_1) = \vec{A} + \vec{AG}(\varphi_1); \quad (10)$$

$$\vec{F}(\varphi_1) = \vec{A} + \vec{AF}(\varphi_1). \quad (11)$$

Положения характерных точек второй вилки крестовины промежуточного вала с учетом возможного угла смещения  $\psi$  плоскостей его вилок (см. рис. 1) могут быть определены по следующим выражениям:

$$\vec{BH}(\varphi_1) = \text{Turn}_{L_{new}}^{3D}(\text{Ort}(\vec{AG}(\varphi_1)), \vec{AB}, -\psi, R_{кр}); \quad (12)$$

$$\vec{H}(\varphi_1) = \vec{B} + \vec{BH}(\varphi_1); \quad (13)$$

$$\vec{BI}(\varphi_1) = -\vec{BH}(\varphi_1); \quad (14)$$

$$\vec{I}(\varphi_1) = \vec{B} + \vec{BI}(\varphi_1). \quad (15)$$

В выражении (12) принято, что угол смещения  $\psi$  плоскостей карданных вилок на промежуточном валу (угол смещения плоскости  $P_4$  относительно плоскости  $P_3$  (см. рис. 1)) отсчитывается по часовой стрелке, если смотреть на острие вектора  $\vec{AB}$  (вектор оси промежуточного вала).

По аналогии с выражением (8) для аналитического описания в векторах кинематики второй крестовины двухшарнирной КрП, соединяющей промежуточный и ведомый валы, можно также воспользоваться геометрическим свойством векторного произведения:

$$\vec{BC} = \vec{C} - \vec{B}; \quad (16)$$

$$\vec{BK}(\varphi_1) = R_{кр} \cdot \text{Ort}(\vec{BI}(\varphi_1) \vec{BC}); \quad (17)$$

$$\vec{BJ}(\varphi_1) = -\vec{BK}(\varphi_1). \quad (18)$$

Выражением (17) получен относительный вектор  $\vec{BK}(\varphi_1)$ , который является перпендикулярным плоскости, образуемой векторами  $\vec{BI}(\varphi_1)$  и  $\vec{BC}$  (осью крестовины установки вилки промежуточного вала и осью ведомого вала), а его направление определяется правилом векторного произведения.

С помощью следующих выражений описывается кинематика оставшихся характерных точек (абсолютных векторов) второй крестовины двухшарнирной КрП, соединяющей промежуточный и ведомый валы:

$$\vec{K}(\varphi_1) = \vec{B} + \vec{BK}(\varphi_1); \quad (19)$$

$$\vec{J}(\varphi_1) = \vec{B} + \vec{BJ}(\varphi_1). \quad (20)$$

Таким образом, с помощью выражений (2)–(20) для двухшарнирной КрП проведено аналитическое описание в векторах кинематики всей рассматриваемой системы в целом. В случае необходимости введения в описание кинематики двухшарнирной КрП дополнительных точек (например, положение центров тяжести звеньев), достаточно задать привязку интересующей точки по длине и углу к соответствующему звену, предварительно описанному ранее в кинематике [9].

По аналогии с вышеприведенными выражениями, описывающими кинематику характерных точек двухшарнирной КрП, можно описать кинематику поликарданной передачи любой сложности в зависимости от значения угла  $\varphi_1$  поворота вилки ведущего вала (обобщенной координаты).

Для проверки адекватности описанной кинематики движения всех характерных точек двухшарнирной КрП, полученных векторным методом, по исходным данным таблицы в трехмерном САД-пакете была построена параметрическая модель рассматриваемой двухшарнирной КрП (см. рис. 2, а). Путем сопостав-

ления значений координат всех характерных точек двухшарнирной КрП, полученных аналитическим и графическим методами, для нескольких произвольно выбранных углов  $\varphi_1$  поворота вилки ведущего вала был сделан вывод об абсолютной адекватности полученных результатов.

Стоит также отметить, что современные математические пакеты при использовании определенных пользовательских функций позволяют успешно осуществлять визуализацию любых, как пространственных, так и плоских рычажных механизмов. Так, на рис. 3 приведена пространственная визуализация анализируемой двухшарнирной КрП, построенной в математическом пакете по исходным данным таблицы. Использование такой пространственной визуализации в современных математических пакетах позволяет оперативно проводить дополнительную проверку правильности описания кинематики любых механизмов предложенным векторным методом.

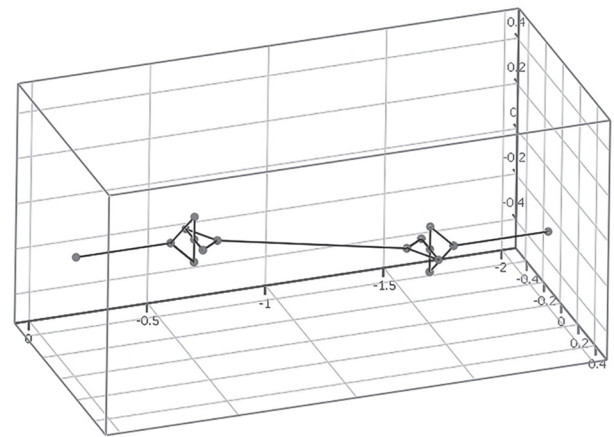
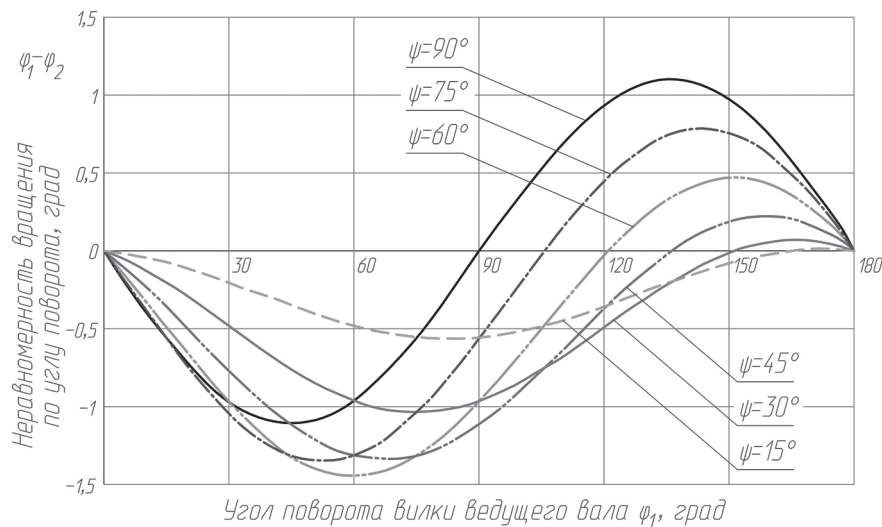


Рис. 3. Пространственная визуализация рассматриваемой двухшарнирной КрП в математическом пакете

## Результаты и обсуждение

Предложенный метод векторного анализа кинематических характеристик двухшарнирной КрП позволил получить все известные графические зависимости, приведенные в работах [1–5], а применение имеющихся в современных математических пакетах методов параметризации и оптимизации позволило значительно расширить область проводимого анализа кинематических характеристик. На рис. 4 приведена одна из наиболее интересных графических зависимостей для двухшарнирной КрП – график изменения неравномерности вращения по углу поворота промежуточного



**Рис. 4.** График изменения неравномерности вращения по углу поворота промежуточного вала в зависимости от угла  $\psi$  смещения плоскостей вилок промежуточного вала

вала в зависимости от угла  $\psi$  смещения плоскостей вилок промежуточного вала. Данный график, как и все последующие приведенные в данной работе, построен для диапазона угла поворота вилки ведущего вала от  $0^\circ$  до  $180^\circ$ , так как в оставшемся диапазоне угла поворота вилки ведущего вала график имеет периодическое повторение и уже не несет дополнительной информации.

Как видно из приведенного на рис. 4 графика, по мере увеличения угла  $\psi$  смещения плоскостей вилок промежуточного вала, неравномерность вращения по углу промежуточного вала также растет и достигает максимального значения при угле смещения вилок  $60^\circ$ . Также из графика видно, что если вилки промежуточного вала расположены под углом  $15^\circ$ , то за один оборот вилки ведущего вала промежуточный вал дважды отстает от него. А если вилки промежуточного вала расположены под углом  $90^\circ$ , то промежуточный вал уже дважды отстает и дважды обгоняет ведущий вал.

После того как было получено аналитическое описание в векторах положение всех характерных точек двухшарнирной КрП, нахождение для них векторов линейных скоростей и ускорений уже не представляет особого труда. Получение данных величин путем взятия первой и второй производной по обобщенной координате от уже найденного вектора, который описывает абсолютную (относительную) координату некоторой точки или звена, подробно описано в работах [7, 9]. Остановимся более подробно лишь на последовательно-

сти нахождения векторов угловых скоростей и ускорений звеньев, так как для КрП это является более существенным.

Если известен вектор  $r(\varphi_1)$ , который описывает относительные координаты некоторого звена, то для определения аналога вектора угловой скорости этого звена, необходимо  $Ort$  вектора этого звена умножить векторно на аналог вектора относительной линейной скорости этого звена и результирующий вектор разделить на модуль вектора этого звена:

$$\vec{\Omega}_r^*(\varphi_1) = Ort(\vec{r}(\varphi_1))\vec{V}_r^*(\varphi_1) / |\vec{r}(\varphi_1)|, \quad (21)$$

где  $\vec{V}_r^*(\varphi_1)$  – аналог вектора относительной линейной скорости звена, описываемого вектором  $r(\varphi_1)$  (представляет собой первую производную по обобщенной координате от вектора  $r(\varphi_1)$ ).

Если известен аналог вектора угловой скорости некоторого звена, то, взяв от этого аналога первую производную по обобщенной координате, можно определить аналог вектора углового ускорения этого звена:

$$\vec{E}_r^*(\varphi_1) = d\vec{\Omega}_r^*(\varphi_1) / d\varphi_1. \quad (22)$$

Направление аналогов векторов угловой скорости и углового ускорения звеньев определяется правилом векторного произведения, которое учитывает направления перемножаемых векторов, и может быть визуальным определено по правилу буравчика.

Для того чтобы от аналогов векторов угловых скоростей и ускорений звеньев перейти к их истинным значениям, необходимо найденные аналоги векторов угловых скоростей

умножить на угловую скорость входного звена (скорость изменения обобщенной координаты), а аналоги векторов угловых ускорений умножить на квадрат этой угловой скорости (при условии, что эта скорость постоянна):

$$\vec{\omega}_r(\varphi_1) = \vec{\omega}_r^*(\varphi_1)\omega; \vec{\epsilon}_r(\varphi_1) = \vec{\epsilon}_r^*(\varphi_1)\omega^2, \quad (23)$$

где  $\omega$  – угловая скорость входного звена (угловая скорость ведущего вала), рад/с.

Используя выражения (21)–(23), можно найти векторы угловых скоростей и угловых ускорений каждого вала двухшарнирной КрП (в зависимости от величины обобщенной координаты):

$$\vec{\omega}_1(\varphi_1) = \vec{\omega}_{AD}^*(\varphi_1)\omega; \vec{\omega}_2(\varphi_1) = \vec{\omega}_{AG}^*(\varphi_1)\omega; \vec{\omega}_3(\varphi_1) = \vec{\omega}_{BJ}^*(\varphi_1)\omega; \quad (24)$$

$$\vec{\epsilon}_1(\varphi_1) = \vec{\epsilon}_{AD}^*(\varphi_1)\omega^2; \vec{\epsilon}_2(\varphi_1) = \vec{\epsilon}_{AG}^*(\varphi_1)\omega^2; \vec{\epsilon}_3(\varphi_1) = \vec{\epsilon}_{BJ}^*(\varphi_1)\omega^2. \quad (25)$$

Для проверки адекватности нахождения по выражениям (24) и (25) значений угловых скоростей и ускорений, полученных векторным методом, воспользуемся известными аналитическими зависимостями [1, 5]. Так, для промежуточного вала двухшарнирной КрП угловая скорость и угловое ускорение определяются по следующим выражениям:

$$\omega_2(\varphi_1) = \omega \frac{\cos \alpha_{12}}{1 - \sin^2 \alpha_{12} \cdot \cos^2 \varphi_1}; \quad (26)$$

$$\epsilon_2(\varphi_1) = -\omega^2 \left( \frac{\cos \alpha_{12}}{1 - \sin^2 \alpha_{12} \cdot \cos^2 \varphi_1} \right)^2 \times \sin \alpha_{12} \cdot \operatorname{tg} \alpha_{12} \cdot \sin 2\varphi_1, \quad (27)$$

где  $\alpha_{12}$  – угол наклона между осями ведущего и промежуточного валов, рад (см. рис. 1).

Рассчитанные по выражениям (26) и (27) значения угловых скоростей и угловых ускорений для промежуточного вала двухшарнирной КрП полностью совпадают со значениями, определенными по выражениям (24) и (25), что в очередной раз подтверждает адекватность предложенного метода векторного анализа кинематических характеристик двухшарнирной КрП.

Полученные выражения (21)–(23) полностью характеризуют кинематику двухшарнирной КрП как передаточного механизма. Используя данные выражения, а также изменяя углы наклона между валами путем задания различных вертикальных координат точек оси ведомого вала (т. В и т. С, см. рис. 2), можно получить все известные графические зависимости для анализа кинематических характеристик двухшарнирной КрП [1–5]. Так, в качестве примера на рис. 5 приведен график изменения неравномерности вращения по угловой скорости промежуточного вала в зависимости от угла наклона между осями валов, а на рис. 6 приведен график изменения неравномерности вращения по угловому ускорению промежуточного вала в зависимости от угла наклона между осями валов.

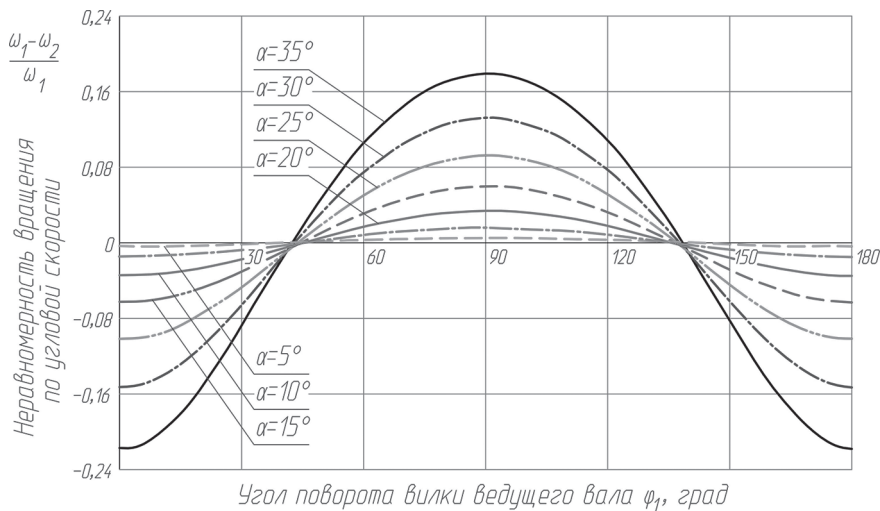
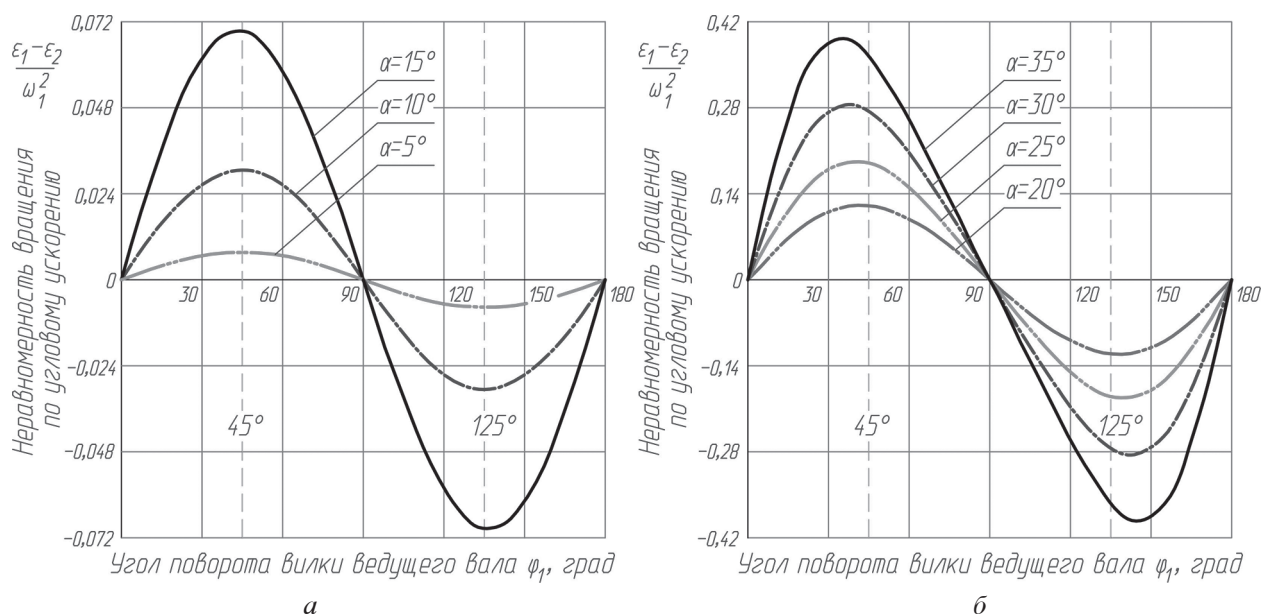


Рис. 5. График изменения неравномерности вращения по угловой скорости промежуточного вала в зависимости от угла  $\alpha = \alpha_{12} = \alpha_{23}$  наклона между осями валов





**Рис. 6. График изменения неравномерности вращения по угловому ускорению промежуточного вала в зависимости от угла  $\alpha = \alpha_{12} = \alpha_{23}$  наклона между осями валов:**  
*а* – для углов наклона 5°, 10° и 15°; *б* – для углов наклона 20°, 25°, 30° и 35°

Анализируя графики, представленные на рис. 5 и 6, видно, что при увеличении угла наклона между осями валов увеличивается неравномерность вращения промежуточного вала как по угловой скорости, так и по угловому ускорению. Неравномерность вращения по угловой скорости промежуточного вала (см. рис. 5) изменяется четыре раза за один оборот вилки ведущего вала; при этом наблюдается выраженная симметрия графиков для всех рассмотренных значений углов наклона между осями валов. Для графиков неравномерности вращения по угловому ускорения (см. рис. 6) симметрия наблюдается только при небольших углах наклона между валами примерно до 15° (см. рис. 6, *а*). Именно такие графические зависимости приводятся в известных работах [1–3]. Однако с увеличением угла наклона между валами происходит нелинейный рост углового ускорения промежуточного вала, в результате чего симметрия графиков нарушается (см. рис. 6, *б*). Одновременно с ростом углового ускорения возрастает инерционное сопротивление промежуточного вала двухшарнирной КрП и, как следствие, возрастают динамические нагрузки. Можно спрогнозировать, что при определенном пороговом значении угла наклона между осями валов инерционное сопротивление промежуточного вала станет настолько большим, что в конечном итоге приведет к остановке передачи.

Изложенная в данной работе методика векторного анализа кинематических характери-

стик двухшарнирной КрП была в дальнейшем использована для нахождения векторов нагрузок (сил и моментов), действующих на входной и ведомый валы двухшарнирной КрП со стороны их вилок, для проведения последующих прочностных расчетов.

### Выводы

Представленный в данной работе метод векторного анализа двухшарнирной КрП позволил доступно и наглядно аналитически описать и проанализировать кинематические характеристики ее работы. Этот метод легко поддается формализации и алгоритмизации в любых современных математических пакетах и языках программирования, а также позволяет применять различные методы оптимизации и параметризации для решения поставленной технической задачи. Применение данного метода по сравнению с известными аналитическими зависимостями позволяет в короткие сроки подбирать рациональные кинематические характеристики как для двухшарнирных карданных передач, так и для поликарданных передач любой сложности.

### Литература

1. Кожевников С.Н., Перфильев П.Д. Карданные передачи. Киев: Техніка, 1978. 264 с.
2. Малаховский Я.Е., Лапин А.А., Веденеев Н.К. Карданные передачи. М.: МАШГИЗ, 1962. 156 с.

3. Чудаков Е.А. Расчет автомобиля. М.: МАШГИЗ, 1947. 432 с.
4. Бойко Л.И. Механика приводов колеблющихся рабочих органов машин. Минск: ООО «Меджик Бук», 2003. 240 с.
5. Флик Э.П. Механические приводы сельскохозяйственных машин. М.: Машиностроение, 1984. 272 с.
6. Котов А.В., Чупрынин Ю.В. Применение векторного анализа при проектировании рычажных механизмов // Научно-технический прогресс в сельскохозяйственном производстве: мат-лы междунар. науч.-практ. конф. Минск, 2007.
7. Котов А.В., Чупрынин Ю.В. Применение векторного анализа для оптимизации механизма привода системы очистки зерна зерноуборочного комбайна при его проектировании // Механика машин, механизмов и материалов. 2009. № 2 (7).
8. Котов А.В., Чупрынин Ю.В. Векторный анализ пространственных рычажных механизмов на примере механизма качающейся шайбы привода режущего аппарата // Тракторы и сельхозмашины. 2011, № 12.
9. Котов, А.В., Чупрынин Ю.В. Уравновешивание механизма качающейся шайбы привода режущего аппарата жатки для уборки трав // Тракторы и сельхозмашины. 2015, № 10.
2. Malahovskij YA.E., Lapin A.A., Vedeneev N.K. Kardannye peredachi [Cardan gears]. Moscow: MASHGIZ Publ., 1962. 156 p.
3. CHudakov E.A. Raschet avtomobilya [Automobile calculation]. Moscow: MASHGIZ Publ., 1947. 432 p.
4. Bojko L.I. Mekhanika privodov koleblyushchihsyah rabochih organov mashin [Mechanics of drives of oscillating working bodies of vehicles]. Minsk.: ООО «Medzhik Buk» Publ., 2003. 240 p.
5. Flik E.P. Mekhanicheskie privody sel'skohozyajstvennyh mashin [Mechanical drives of agricultural machinery]. Moscow: Mashinostroenie Publ., 1984. 272 p.
6. Kotov A.V., CHuprynin YU.V. The use of vector analysis in the design of lever mechanisms. Nauchno-tekhnicheskij progress v sel'skohozyajstvennom proizvodstve: matly mezhdunar. nauch.-prakt. konf. [Scientific and technological progress in agricultural production: materials of international scientific and practical conference]. Minsk., 2007 (in Russ.).
7. Kotov A.V., CHuprynin YU.V. The use of vector analysis to optimize the drive mechanism of the grain cleaning system of a combine harvester during its design. Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov. 2009. No 2(7) (in Russ.).
8. Kotov A.V., CHuprynin YU.V. Vector analysis of spatial lever mechanisms using the example of the mechanism of a swash plate of a drive of a cutting apparatus. Traktory i sel'hozmashiny. 2011. No 12 (in Russ.).
9. Kotov, A.V., CHuprynin YU.V. Balancing the mechanism of the swash plate of the drive of the cutting apparatus of the header for grass. Traktory i sel'hozmashiny. 2015. No 10 (in Russ.).

## References

1. Kozhevnikov S.N., Perfil'ev P.D. Kardannye peredachi [Cardan gears]. Kiev: Tekhnika Publ., 1978. 264 p.