ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 484, № 1, с. 12–17

МАТЕМАТИКА

УДК 517.928 + 517.984

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

В. Е. Владыкина*, А. А. Шкаликов**

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 07.07.2018 г.

Поступило 26.07.2018 г.

Пусть P и Q — обыкновенные дифференциальные операторы порядков n и m, порождаемые $s = \max\{n, m\}$ краевыми условиями на конечном отрезке $[a, b]$. Изучаются операторы вида $L = JP + Q$, где J – оператор инволюции в пространстве $L_2[a, b]$. Рассмотрены три случая $n > m$, $n < m$ и $n = m$, для которых определены понятия регулярных, почти регулярных и нормальных краевых условий. Анонсированы теоремы о безусловной базисности и полноте корневых функций оператора L в зависимости от принадлежности краевых условий выделенным классам.

Ключевые слова: дифференциальные операторы с инволюцией, регулярные краевые условия, безусловная базисность.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-5652484112-17

В работе изучаются операторы вида

$$Ly = JP(y) + Q(y), \tag{1}$$

где P, Q — обыкновенные дифференциальные операторы с общей областью определения, заданные на конечном отрезке $[a, b]$, а J — оператор инволюции, заданный функцией φ. Здесь под оператором инволюции мы понимаем оператор вида $(Jf)(x) = f(\varphi(x))$, где φ — дифференцируемая биекция отрезка $[a, b]$ на себя, причём композиция $\varphi \circ \varphi$ суть тождественный оператор, а сама функция φ не совпадает с тождественной. Такие функции часто называют функциями Карлемана, а их свойства подробно описаны в [1, гл. 1].

Далее предполагаем, что операторы P и Q заданы дифференциальными выражениями вида (α — произвольное комплексное число)

$$Py = y^n(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + p_n(x)y(x), \tag{2}$$

$$Qy = \alpha y^{(m)}(x) + q_1(x)y^{(m-1)}(x) + \ldots + q_m(x)y(x) \tag{3}$$

и системой краевых условий ($s = \max(n, m)$)

$$U_j(y) = \sum_{k=0}^{s-1} a_{jk}y^{(k)}(a) + b_{jk}y^{(k)}(b) = 0,\ j = 1, 2,\ \ldots,\ s. \tag{4}$$

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

*E-mail: vika-chan@mail.ru

**E-mail: shkalikov@mi.ras.ru

Всюду далее предполагаем, что коэффициенты p_j и q_j дифференциальных выражений принадлежат пространству $L^\infty[a, b]$, т.е. являются измеримыми существенно ограниченными функциями. В некоторых случаях это предположение можно ослабить, но мы не будем акцентировать на этом внимание. Будем также полагать, что инволюция φ является достаточно гладкой функцией, конкретные условия сформулируем ниже. Наиболее сложным в исследовании спектральных свойств оператора (1) оказывается случай $n \geq m$. Второй случай $n < m$ при естественных дополнительных ограничениях может быть рассмотрен с помощью общей теории возмущений операторов с дискретным спектром (подробнее об этом скажем ниже).

В известных авторам работах о свойствах корневых функций дифференциальных операторов с инволюцией рассматривались только случаи операторов (1), где P и Q порождаются дифференциальными выражениями первого или второго порядка (в основном с нулевыми младшими членами, т.е. когда коэффициенты p_j, q_j равны нулю). Для операторов P, Q первого порядка задача достаточно подробно изучена в [2] и [3]. Для случая второго порядка в основном рассматривались конкретные задачи для операторов $Ly = -y''(-x)$ или $Ly = y''(-x) + \alpha y(x)$ (см. [4–8]). Наиболее общий результат для оператора второго порядка получен в работе [6], где спектральные задачи рассматривались с нелокальными, интегральными краевыми условиями. Однако в случае двуточечных краевых условий результаты покрывают только условия Дирихле.

Нам неизвестны также работы с попытками провести классификацию произвольных операторов вида (1) в зависимости от краевых условий. Цель настоящего сообщения — восполнить эти пробелы и получить результаты общего характера о свойствах полноты и базисности собственных и присоединённых (корневых) функций операторов вида (1).

Далее рассмотрим три случая, изучение которых проводится разными методами. Эти случаи соответствуют соотношениям между порядками дифференциальных выражений P и Q.

1. СЛУЧАЙ $n > m$

Сначала рассмотрим случай, когда $L = JP$, т.е. оператор Q, определённый выражением (3), равен нулю. Здесь P мы понимаем как оператор, заданный дифференциальным выражением (2) и краевыми условиями (4), т.е. $Py = P(y)$ на области определения

$$\mathcal{D}(L) = \{y \in W^{2n,2}[a, b] \,\|\,, \quad U_j(y) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n\},$$

где линейные формы $U_j(y)$ определены в (4), а $W^{2n,2}[a, b]$ — пространство Соболева, состоящее из функций y, имеющих классическую производную $y^{(2n)} \in L^2[a, b]$. Обратим внимание, что запись Py мы используем для обозначения действия оператора P на функцию $y \in \mathcal{D}(P)$, а запись $P(y)$ используется для обозначения действия дифференциального выражения (2) на функцию $y \in W^{2n,2}[a, b]$.

Для обыкновенных дифференциальных операторов важнейшую роль играет понятие регулярности краевых условий (или регулярности оператора, порождённого соответствующими краевыми условиями), предложенное Дж. Биркгофом [9, 10] (см. также [11, глава 1]). Здесь мы введём понятие регулярности для дифференциальных операторов с инволюцией. В случае $\varphi(x) = x$ наше определение формулируется иначе, нежели у Биркгофа, но нетрудно показать, что в этом случае оба определения эквивалентны.

Рассмотрим оператор P_0, порождённый дифференциальным выражением $P_0(y) = y^{(n)}$ и краевыми условиями (4) при $s = n$. Заметим, что дифференциальное выражение $JP_0(JP_0(y))$ является обычным дифференциальным выражением без инволюции.

Определение 1. Краевые условия (4) назовём *регулярными* для оператора $L = JP$ (и соответствующий оператор L назовём *регулярным*), если краевые условия

$$U_j(y) = 0,\ U_j(JP_0y) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{5}$$

являются регулярными для обычного дифференциального выражения $2n$-го порядка; иными словами, если $L_0^2 = (JP_0)^2$ является регулярным по Биркгофу обыкновенным дифференциальным оператором.

Обратим внимание, что в приведённом определении регулярности не фигурируют коэффициенты p_j дифференциального выражения $P(y)$, на регулярность влияют только числовые коэффициенты a_{jk}, b_{jk} краевых условий. Одним из основных в работе является следующий результат.

Теорема 1. *Пусть инволюция φ: $[a, b] \to [a, b]$ такова, что $\varphi \in W^{n,2}[a, b]$. Если краевые условия* (4) *регулярны для оператора $L = JP$, то система его собственных и присоединённых функций образует безусловный базис со скобками в пространстве $L_2[a, b]$. Более того, это утверждение остаётся верным для оператора $L = JP + Q$, если порядок m дифференциального выражения $Q(y)$ меньше n. Утверждение сохраняется также, если постоянная α в* (3) *заменена на функцию $\alpha = \alpha(x) \in$ $\in L^\infty[a, b]$.*

Основная идея доказательства этой теоремы состоит в следующем. Сначала изучаем оператор $L_0 = JP_0$. В случае регулярных краевых условий оператор L_0^2 (он корректно определён) оказывается регулярным обыкновенным дифференциальным оператором (без инволюции), а потому, согласно теореме [13], его корневые функции образуют безусловный базис со скобками в пространстве $L_2[a, b]$, причём в скобки заключаются не более двух корневых функций. Согласно нижеследующей лемме 3 корневые подпространства операторов L_0 и L_0^2 совпадают, поэтому утверждение о безусловной базисности сохраняется для оператора L_0. Далее используются методы теории возмущений операторов с дискретным спектром, развитие которых проведено в недавней работе [14]. В случае, когда невозмущённый оператор L_0 самосопряжён, утверждение теоремы получается сразу из результатов [14, § 6] в силу того, что порядок дифференциального выражения $L - L_0$ не превышает $n - 1$. В нашем случае оператор L_0, вообще говоря, не является самосопряжённым, поэтому нужно модифицировать методы [14] для операторов, свойства которых сродни самосопряжённым или нормальным.

При изучении операторов с инволюцией полезную роль играют следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть точка c — неподвижная точка инволюции φ. Тогда задача Коши для оператора $L = JP$ с произвольными заданными в этой точке начальными условиями*

$$y(c) = \xi_0, \quad y'(c) = \xi_1, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(c) = \xi_{n-1}$$

имеет решение, причём единственное.

Отметим, что для дифференцируемых инволюций φ неподвижная точка $c \in [a, b]$ всегда существует [1, утверждение 1.2.7].

Далее используется понятие характеристического определителя $\Delta(\rho)$ для спектральной задачи

$Ly = \rho^n y$, порождаемой оператором L. Функция $\Delta(\rho)$ определяется стандартным образом (см., например, [11, глава 1])

$$\Delta(\rho) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & \dots & U_1(y_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ U_n(y_1) & \dots & U_n(y_n) \end{vmatrix},$$

где $y_j = y_j(x, \rho)$, $j = 1, 2, \dots, n$, — фундаментальная система решений уравнения $L(y) = \rho^n y$ (в силу леммы 1 такая система существует).

Лемма 2. *Пусть $\Delta(\rho)$ и $\Theta(\rho)$ — характеристические определители задач $(L - \rho^n)y = 0$ и $(L^2 - \rho^{2n})y = 0$ соответственно. Тогда с точностью до ненулевого множителя при $\rho \neq 0$ справедливо равенство*

$$\Theta(\rho) = \rho^{n^2} \Delta(\rho)\Delta(e^{i\pi/n}\rho).$$

Если μ^2 — собственное значение оператора L^2, то по меньшей мере одно из чисел μ или $-\mu$ является собственным значением оператора L. При этом жордановы цепочки операторов L^2 и L, отвечающие собственным значениям μ^2 и μ или $-\mu$ не совпадают. Но соответствующие корневые подпростанства (линейные оболочки канонических систем жордановых цепочек) совпадают. Точнее, справедлива

Лемма 3. *Если $\mathcal{N}$ — корневое подпространство оператора L^2, отвечающее собственному значению $\mu^2 \neq 0$, а $\mathcal{N}_\pm$ — корневые подпространства оператора L, отвечающие собственным значением $\pm\mu$ (одно из этих подпространств может быть нулевым), то $\mathcal{N} = \mathcal{N}_+ + \mathcal{N}_-$. Корневые подпространства операторов L и L^2, отвечающие нулевому собственному значению, также совпадают.*

Для обыкновенных дифференциальных операторов и более общих спектральных задач с нелинейным вхождением спектрального параметра в работе [15] помимо регулярных выделены классы почти регулярных и нормальных задач. Мы не будем повторять здесь соответствующие определения из [15]. Поясним лишь их сущность. Для нормальных задач функция Грина растёт по спектральному параметру не быстрее полинома по крайней мере на трёх лучах в комплексной плоскости, раствор между которыми меньше $\pi/2$, а для почти регулярных задач функция Грина растёт во всей комплексной плоскости за исключением кружков малого постоянного радиуса с центрами в собственных значениях не быстрее полинома, степень которого связана с порядком почти регулярности.

Классификацию [15] можно перенести на случай дифференциальных операторов с инволюцией. Однако это определение будет зависеть не только от краевых условий (4), но и от коэффициентов p_j дифференциального выражения $P(y)$. При этом предполагается, что коэффициенты p_j дифференциального выражения (2) и инволюция φ являются достаточно гладкими функциями. В этом случае корректно определён оператор $L^2 = (JP)^2$, который порождается обычным дифференциальным выражением $JP(JP(y))$ (без инволюции) и краевыми условиями

$$U_j(y) = 0, \quad U_j(JP(y)) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Но тогда для обыкновенного дифференциального оператора $L^2 = (JP)^2$, согласно [15], корректно определено понятие нормальности и почти регулярности.

Определение 2. Пусть коэффициенты p_j дифференциального выражения (2) и инволюция φ являются достаточно гладкими функциями. Оператор $L = JP$ будем называть почти регулярным порядка p (нормальным), если оператор L^2 является почти регулярным порядка p (нормальным).

Из результатов [15] и леммы 3 получаем следующие утверждения.

Теорема 2. *Система корневых функций нормального оператора $L = JP$ образует полную и минимальную систему в пространствах $W_U^{k,2}$ при всех $k = 0, 1, \dots, n$, где $W_U^{k,2}$ — подпространство функций $f(x) \in W^{k,2}$, удовлетворяющих нормированным краевым условиям (4), имеющих порядок $\leq k - 1$.*

Теорема 3. *Пусть оператор $L = JP$ почти регулярен порядка $p \leq n$. Тогда система его корневых функций образует безусловный базис со скобками в пространствах $W_U^{k,2}$ при всех $k = p, p + 1, \dots, n$, относительно нормы пространств $W_U^{k-p,2}$ соответственно, т.е. любая функция $f \in W_U^{k,2}$ при $p \leq k \leq n$ разлагается в безусловно сходящийся по норме пространства $W_U^{k-p,2}$ ряд по корневым функциям оператора L.*

2. СЛУЧАЙ $n > m$

Пусть $m > n$ и $\alpha \neq 0$. Если краевые условия (4) регулярны для дифференциального выражения $Q_0 = \alpha y^{(m)}$, то оператор Q, порождённый обыкновенным дифференциальным выражением $Q(y)$ и теми же краевыми условиями, также регулярен, а потому его корневые функции образуют безусловный базис со скобками. Пользуясь методами теории возмущений [14, § 6], в этом случае можно получить следующий результат.

Теорема 4. *Пусть $m > n$ и $\alpha \neq 0$. Пусть оператор $\frac{1}{\alpha}Q_0 y = y^{(m)}$, порождённый краевыми условиями (4), регулярен. Тогда корневые функции оператора $L = JP + Q$ образуют безусловный базис со скобками в пространстве $L_2[a, b]$.*

Для нерегулярных операторов Q_0 методы теории возмущений не работают и аналогов теорем 2 и 3 в этом случае мы получить не можем.

3. СЛУЧАЙ $n = m$

В этом случае мы будем предполагать, что $b = -a$, а инволюция φ является отражением $\varphi(x) = -x$. Обозначим через L_0 оператор, порождённый выражением

$$L_0(y) = y^{(n)}(-x) + \alpha y^{(n)}(x)$$

и краевыми условиями (4). Далее считаем, что $\alpha \neq \pm 1$. Наша ближайшая цель — определить понятие регулярности для оператора L_0.

Рассмотрим оператор

$$R_0 y = y^{(n)}(-x) + (-1)^{n+1}\alpha y^{(n)}(x), \mathcal{D}(R_0) = \mathcal{D}(L_0).$$

Тогда оператор

$$S_0(\rho)y = (L_0 - \rho^n I)(R_0 + \rho^n I)y = L_0 R_0 y + \rho^n(L_0 - R_0)y - \rho^{2n} y =$$
$$= (-1)^n (1 - \alpha^2) y^{(2n)}(x) + \alpha(1 + (-1)^n)\rho^n y^{(n)}(x) - \rho^{2n} y(x)$$

является обыкновенным дифференциальным оператором, зависящим от спектрального параметра ρ, т.е. является пучком обыкновенных дифференциальных операторов. Рассмотрим для него спектральную задачу

$$S_0(\rho)y = 0, \quad U_j(y) = 0, \quad U_j(R_0 y) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Для пучков обыкновенных дифференциальных операторов известны понятия регулярности, почти регулярности и нормальности [15]. В этой работе установлены теоремы о кратной базисности и кратной полноте производных по Келдышу цепочек от корневых функций соответствующих задач. Оказывается, что понятие регулярности для операторов с инволюцией в рассматриваемом случае можно ввести исходя из определения регулярности для пучка S_0.

Определение 3. Оператор $L = JP + Q$ в случае $n = m$ назовём регулярным, если регулярен в смысле определения [15] пучок обыкновенных дифференциальных операторов S_0.

Теорема 5. *Система корневых функций регулярного оператора $L = JP + Q$ образует безусловный базис в пространстве $L^2[-a, a]$.*

Доказательство этой теоремы проводится сначала для оператора $L_0 = JP_0 + Q_0$ — главной части оператора L. Потом используются результаты теории возмущений [14, § 6]. Утверждение теоремы для оператора L_0 получается на основе тождеств

$$S_0(\rho) = (L_0 - \rho^n I)(R_0 + \rho^n I), (L_0 - \rho^n I)^{-1} =$$
$$= (R_0 + \rho^n I)S_0^{-1} \qquad (\rho).$$

Далее используются результаты работы [15] о представлении функции Грина резольвенты $S_0^{-1}(\lambda)$ и техника этой работы, позволяющая оценить безусловную сходимость подходящих проекторов Рисса на корневые подпространства оператора L_0.

4. ПРИМЕРЫ

Здесь мы приводим простейшие примеры, но и для этих примеров полученные в этой работе результаты были известны лишь частично.

Пример 1. Рассмотрим модельную спектральную задачу второго порядка с оператором $Ly = -y''(-x)$:

$$-y''(-x) = \lambda y(x), \quad x \in [-1, 1], \tag{6}$$

$$U_j(y) = \alpha_{j1} y(-1) + \alpha_{j2} y'(-1) + \beta_{j1} y(1) + \beta_{j2} y'(1) = 0, \quad j = 1, 2. \tag{7}$$

Эта задача изучалась в работах [7, 8, 12]. Фундаментальная система уравнения (6) находится явно: $y_1 = \operatorname{sh}\sqrt{\lambda}x$, $y_2 = \cos\sqrt{\lambda}x$. Поэтому характеристический определитель и корневые функции этой задачи можно выписать явно, они зависят только от числовых коэффициентов краевых условий. На этой основе в [7, 8] выделены регулярные, нерегулярные и вырожденные краевые условия и получены теоремы о базисности и полноте корневых функций в первом и втором случаях соответственно.

Здесь мы уточним результаты [7, 8] и проведём полную классификацию задачи (6), (7), которая более точно отражает суть дела.

Далее удобнее пользоваться определением регулярности, предложенным в работе [15], которое для обыкновенных дифференциальных операторов эквивалентно определению Биркгофа. Напомним, что число ν_j называется порядком линейной формы вида (4), если по меньшей мере один из коэффициентов при $y^{(\nu_j)}(1)$ или $y^{(\nu_j)}(-1)$ отличен от нуля, а все коэффициенты при производных порядка $k > \nu_j$ равны нулю. Суммарным порядком краевых условий вида (4) называется число $\nu = \nu_1 + \ldots + \nu_s$. Краевые условия называются нормированными, если любые их линейные комбинации имеют не меньший суммарный порядок (далее считаем краевые условия (7) нормированными).

Рассмотрим спектральную задачу для оператора L^2:

$$L^2 y = y^{(4)} = \lambda^2 y, \quad \lambda^2 = \rho^4, \tag{8}$$

$$\begin{gathered}\beta_{j2} y'''(-1) + \alpha_{j2} y'''(1) - \beta_{j2} y''(-1) - \alpha_{j2} y''(1) = 0,\\ \alpha_{j1} y(-1) + \alpha_{j2} y'(-1) + \beta_{j1} y(1) + \beta_{j2} y'(1) = 0, \ j = 1, 2.\end{gathered} \tag{9}$$

В зависимости от коэффициентов при старших производных суммарный порядок краевых условий (7) равен 2, 1 или 0. При этом суммарный порядок условий (9) равен соответственно 8, 6 или 4. Фундаментальную систему уравнения (8) образуют функции $e^{\omega_j \rho x}$, $j = 1, 2, 3, 4$, где ω_j — корни 4-й степени из 1. Если $V_1, \ldots, V_4$ — линейные формы, определяющие краевые условия (9), то характеристический определитель задачи (8), (9) в терминах спектрального параметра ρ имеет вид

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} V_1(e^{\omega_1\rho x}) & \dots & V_1(e^{\omega_4\rho x}) \\ \dots & \dots & \dots \\ V_4(e^{\omega_1\rho x}) & \dots & V_4(e^{\omega_4\rho x}) \end{vmatrix}. \qquad (10)$$

Очевидно, $\Delta(\rho)=\sum P_k(\rho)e^{J_k\rho}$, где J_k —всевозможные суммы четырёх различных чисел из набора восьми чисел $\omega_1, \dots, \omega_4, -\omega_1, \dots, -\omega_4$, а $P_k(\rho)$ — полиномы степени $\le \kappa$, где κ — суммарный порядок краевых условий (9). Выпуклая оболочка чисел J_k (индикаторная диаграмма функции $\Delta(\rho)$) образует четырёхугольник, вершинами которого являются точки

$$\mu_0 = 2(1+i),\ \mu_1 = 2(-1+i),\ \mu_2 = -2(1+i),\ \mu_3 = 2(1-i),$$

а точки $\mu_4 = 2$, $\mu_5 = 2i$, $\mu_6 = -2$, $\mu_7 = -2i$ лежат на серединах сторон этого четырёхугольника (точки, лежащие внутри четырёхугольника в определениях не участвуют). Согласно определению [15], задача (8), (9) регулярна, если $\deg P_0(\rho) = \kappa$ (т.е. коэффициент у многочлена P_0 при ρ^κ отличен от нуля). Отметим, что в силу симметрии функции $\Delta(\rho)$ относительно вещественной и мнимой осей, условия $\deg P_j(\rho) = \kappa$ выполняются или не выполняются одновременно для всех $j = 0, 1, 2, 3$. Согласно определению [15], задача почти регулярна порядка ρ, если $\deg P_0 = \kappa - \rho \geqslant 0$, и нормальна, если $P_0 \equiv 0$, но $P_4(\rho) \ne 0$. Задача вырождена, если все первые восемь многочленов P_j (отвечающие точкам J_k, лежащим в вершинах и на сторонах четырёхугольника) равны нулю тождественно.

Введём матрицу коэффициентов краевых условий

$$U=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_{11} & \beta_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}$$

и обозначим через J_{js} миноры этой матрицы, составленные из j-го и s-го столбцов. Несложные вычисления приводят к следующей классификации задачи:

1. Задача (6), (7) с краевыми условиями второго и нулевого порядка всегда регулярна;

2. Задача (6), (7) с краевыми условиями первого порядка:

а) регулярна, если $\beta_{12} \ne c\alpha_{12}$, $c\beta_{12} \ne \alpha_{12}$, где $c=\dfrac{i\alpha_{21}-\beta_{21}}{\alpha_{21}-i\beta_{21}}$. В случае $\alpha_{21} - i\beta_{21} = 0$ задача регулярна, если $\alpha_{12}\beta_{12} \ne 0$;

б) почти регулярна порядка 1, если $J_{13} \ne 0$, $\beta_{12} = c\alpha_{12}$ или $c\beta_{12} = \alpha_{12}$, $c \ne \pm 1$. В случае $\alpha_{21} - i\beta_{21} = 0$ достаточно условия $J_{13} \ne 0$;

в) почти регулярна порядка 2, если $J_{13} \ne 0$, $\beta_{12} = c\alpha_{12}$, $c = \pm 1$;

г) нормальная, если $J_{13} = 0$, $\beta_{12} = c\alpha_{12}$ или $c\beta_{12} = \alpha_{12}$, $c \ne \pm 1$;

д) вырожденная, если $J_{13} = 0$, $\beta_{12} = c\alpha_{12}$, $c = \pm 1$.

Отметим, что в работах [7, 8] случаи (2б) и (2г) отнесены к регулярным. Но это некорректно. По-видимому, это произошло вследствие арифметической ошибки.

Пример 2. Рассмотрим модельную задачу второго порядка

$$Ly = y''(-x) + \alpha y''(x) = \rho^2 y(x),\ \alpha \ne \pm 1, \qquad (11)$$

также с краевыми условиями (7).

В соответствии с введённым нами определением, рассмотрим оператор

$$Ry = y''(-x) - \alpha y''(x),$$

$$\mathcal{D}(R) = \mathcal{D}(L) = \{y \in W^{2,2} \mid U_j(y) = 0,\ j = 1, 2\} \qquad (12)$$

и построим пучок $S(\rho)$:

$$S(\rho)y = (L - \rho^2)(R + \rho^2)y = \\ = (1-\alpha^2)y^{(4)}(x) + 2\rho^2\alpha y''(x) - \rho^4 y(x), \qquad (13)$$

$$U_j(y) = 0,\quad U_j(Ry) = 0,\quad j = 1, 2. \qquad (14)$$

Фундаментальную систему уравнения $S(\rho)y = 0$ образуют функции $y_j = e^{\omega_j\rho x}$, $j = 1, 2, 3, 4$, где $\omega_{1,2} = \pm(\alpha - 1)^{-1/2}$, $\omega_{3,4} = \pm(1 + \alpha)^{-1/2}$. Обозначим

$$A = J_{23} - J_{14} - J_{12} - J_{34},\quad B = J_{23} - J_{14} + J_{12} + J_{34}.$$

Несложные вычисления, как и для первой задачи, приводят к следующему результату:

1) задача (11), (7) с краевыми условиями второго или нулевого порядка регулярна;

2) в случае краевых условий первого порядка задача при $|\alpha| < 1$

а) регулярна, если не равны нулю оба числа

$$A^2(1+\alpha) - B^2(\alpha - 1),\quad A^2(\alpha - 1) - B^2(1+\alpha); \qquad (15)$$

б) почти регулярна порядка 1, если только одно из чисел (15) равно нулю и $J_{13} \ne 0$;

в) нормальна, если только одно из чисел (15) равно нулю, $J_{13} = 0$;

г) почти регулярна порядка 2 , если $A = B = 0$, $J_{13} \ne 0$;

д) вырождена, если $A = B = 0$, $J_{13} = 0$.

При $|\alpha| > 1$

а) регулярна, если не равны нулю оба числа

$$A\sqrt{(1+\alpha)} + B\sqrt{(\alpha - 1)},\quad A\sqrt{(\alpha - 1)} + B\sqrt{(1+\alpha)}; \qquad (16)$$

б) почти регулярна порядка 1, если только одно из чисел (16) равно нулю, $J_{13} \ne 0$;

в) почти регулярна порядка 2, если $A = B = 0$, $J_{13} \ne 0$;

г) вырождена, если $A = B = 0$, $J_{13} = 0$.

Источник финансирования. Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 17–11–01215.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cabada A.*, *Tojo F.A.F.* Differential Equations with Involutions. N.Y.: Atlantis Press, 2015.
2. *Kopzhassarova A.A.*, *Lukashov A.L.*, *Sarsenbi A.M.* // Abstr. Appl. Anal. 2012. Article ID 590781.
3. *Курдюмов В.П., Хромов А.П.* // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 2. С. 196–204.
4. *Kopzhassarova A.*, *Sarsenbi A.* // Abstr. Appl. Anal. 2012. Article ID 576843.
5. *Крицков Л.В., Сарсенби А.М.* // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 8. С. 990–996.
6. *Курдюмов В.П.* // Изв. Сарат. ун-та. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15. № 4. С. 392–405.
7. *Сарсенби А.М.* // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 4. С. 506–511.
8. *Садыбеков М.А., Сарсенби А.М.* // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 8. С. 1126–1132.
9. *Birkhoff G.D.* // Trans. Amer. Math Soc. 1908. V. 9. P. 219–231.
10. *Birkhoff G.D.* // Trans. Amer. Math Soc. 1908. V. 9. P. 373–395.
11. *Наймарк М.А.* // Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1968.
12. *Кальменов Т.Ш., Искакова У.А.* // ДАН. 2007. V. 414. № 2. *P.* 168–171.
13. *Шкаликов А.А.* // УМН. 1979. Т. 34. В. 5 (209). С. 235–236.
14. *Шкаликов А.А.* // УМН. 2016. Т. 71 . V. 5 (431). С. 111–174.
15. *Шкаликов А.А.* // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. 1983. Т. 9. С. 190–229.

SPECTRAL PROPERTIES OF ORDINARY DIFFERENTIAL OPERATORS WITH INVOLUTON

V. E. Vladykina, A. A. Shkalikov

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov July 7, 2018

Received July 26, 2018

Let P and Q be ordinary differential operators of order n and m generated by $s = \max\{n; m\}$ boundary conditions on a nite interval $[a; b]$. We study operators of the form $L = JP + Q$, where J is the involution operator in the space $L_2[a; b]$. We consider three cases $n > m$, $n < m$, and $n = m$, for which we dene concepts of regular, almost regular, and normal boundary conditions. We announce theorems on unconditional basis and completeness of the root functions of operator L depending on the type of boundary conditions from selected classes.

Keywords: differential operators with involution, regular boundary conditions, unconditional basis.