ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 484, № 1, с. 18–20

МАТЕМАТИКА

УДК 517.95, 517.84

# КЛАССИЧЕСКОЕ И ОБОБЩЁННОЕ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

**А. П. Хромов*, В. В. Корнев****

Представлено академиком РАН Б.С. Кашиным 29.01.2018 г.

Поступило 23.05.2018 г.

В работе, используя рекомендации А.Н. Крылова по ускорению сходимости рядов Фурье, получены явные выражения классического решения смешанной задачи для неоднородного уравнения и явные выражения обобщённого решения в случае произвольных суммируемых $q(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(x, t)$.

*Ключевые слова*: волновое уравнение, метод Фурье, резольвента, классическое и обобщённое решения.

**DOI:** https://doi.org/10.31857/S0869-5652484118-20

Рассматривается волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x, t) + f(x, t),$$

$$x \in [0, 1],\ \ t \in [0, \infty) \tag{1}$$

при условиях

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \tag{2}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u'_t(x, 0) = \psi(x), \tag{3}$$

где все функции, входящие в (1)–(3), комплекснозначные, причём $q(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ из $L[0, 1]$ и $f(x, t) \in L[Q_T]$, $Q_T = [0, 1] \times [0, T]$ при любом $T > 0$.

Исследование задачи (1)–(3) проводится методом Фурье с использованием резольвентного подхода, предложенного в [1, 2], связанного с разбиением формального ряда на части, следуя рекомендациям А.Н. Крылова [3, гл. VI] по ускорению сходимости рядов Фурье, и является продолжением исследований работ [1, 2, 4–7] (в этих работах и в [8] находится информация обзорного характера).

1. В п. 1–3 мы будем рассматривать случай классического решения задачи (1)–(3). Под классическим решением понимаем функцию $u(x, t)$, непрерывную вместе с $u'_x(x, t)$, $u'_t(x, t)$, причём $u'_x(x, t)$ ($u'_t(x, t)$) абсолютно непрерывна по $x$ (по $t$), удовлетворяющую условиям (2), (3) и уравнению (1) почти всюду. Поэтому в случае классического решения задачи (1)–(3) необходимо считаем, что $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\psi(x)$ абсолютно непрерывны, $\varphi(0) = \varphi(1) = \psi(0) = \psi(1) = 0$, $\varphi''(x) \in L[0, 1]$, $\psi'(x) \in L[0, 1]$.

Т е о р е м а 1. *Если $u(x, t)$ — классическое решение задачи (1)–(3), причём дополнительно $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \in L[Q_T]$ при любом $T > 0$, то оно единственно и находится по формуле*

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\ge n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\left[\left(R_\lambda\varphi\right)\cos\rho t + \left(R_\lambda\psi\right)\frac{\sin\rho t}{\rho} + \int_0^t R_\lambda\left(f(\cdot,\tau)\right)\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}\,d\tau\right]d\lambda, \tag{4}$$

*причём ряд (4) при фиксированном $t > 0$ сходится абсолютно и равномерно по $x \in [0, 1]$.*

Здесь $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора $L$: $Ly = -y''(x) + q(x)\,y(x)$, $y(0) = y(1) = 0$, $\lambda$ — спектральный параметр, $E$ — единичный оператор, $R_\lambda(f(\cdot, \tau))$ означает, что $R_\lambda$ применяется к $f(x, \tau)$ по $x$, $\lambda = \rho^2$, $\operatorname{Re}\rho \ge 0$, $\gamma_n$ — образ в $\lambda$-плоскости окружности $\tilde{\gamma}_n = \{\rho \,|\, |\rho - n\pi| = \delta, \delta > 0\}$ и достаточно мало, $r$ — достаточно велико и фиксировано, $n_0$ — такой номер, что при $n \ge n_0$ внутри $\gamma_n$ находится по одному собственному значению оператора $L$ и все $\gamma_n$ при $n \ge n_0$ находятся вне $|\lambda| = r$.

Правая часть (4) есть формальное решение задачи (1)–(3) по методу Фурье. Формула (4) приводит к представлению

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t), \tag{5}$$

где $u_1(x, t)$ есть (4) при $\psi(x) = f(x, t) = 0$, $u_2(x, t)$ есть (4) при $\varphi(x) = f(x, t) = 0$, $u_3(x, t)$ есть (4) при $\varphi(x) = \psi(x) = 0$. Считаем здесь, что все классические

*Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского*
**E-mail: khromovap@info.sgu.ru*
***E-mail: kornevvv@info.sgu.ru*

решения берутся при условии $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \in L[Q_T]$, а также, что $u(x, t)$ означает и ряд (4), и его сумму.

2. В этом пункте считаем, что $u_1(x, t)$ есть классическое решение задачи (1)–(3) при $\psi(x) = f(x, t) = 0$. Представим ряд (4) для $u_1(x, t)$ в виде $u_1(x, t) = u_{10}(x, t) + u_{11}(x, t)$, где $u_{10}(x, t)$ получается из $u_1(x, t)$ заменой $R_\lambda\varphi$ на $R^0_\lambda\varphi$, $u_{11}(x, t)$ получается из $u_1(x, t)$ заменой $R_\lambda\varphi$ на $R_\lambda\varphi - R^0_\lambda\varphi$. Здесь $R^0_\lambda = (L^0 - \lambda E)^{-1}$ и $L^0$ есть $L$ при $q(x) = 0$.

Л е м м а 1. *Сумма ряда $u_{10}(x, t)$ есть $a_0(x, t)$, где $a_0(x, t) = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}(x + t) + \tilde{\varphi}(x - t)]$, $\tilde{\varphi}(x)$ нечётна, 2-периодична и $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ при $x \in [0, 1]$. Ряд $u_{11}(x, t)$ сходится при каждом $t$ равномерно по $x \in [0, 1]$.*

Функция $u_{11}(x, t)$ есть классическое решение задачи (1)–(3) при $\varphi(x) = \psi(x) = 0$ и $f(x, t) = f_0(x, t) = -q(x)a_0(x, t)$.

Т е о р е м а 2. *Если $f(x, t) \in L[Q_T]$, то ряд (4) для задачи (1)–(3) в случае $q(x) = \varphi(x) = \psi(x) = 0$ сходится при всех $x$ и $t$ и его сумма*

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}(\eta, \tau)d\eta,$$

*где $\tilde{f}(\eta, \tau)$ нечётна и 2-периодична по $\eta$, причём $\tilde{f}(\eta, \tau) = f(\eta, \tau)$ при $\eta \in [0, 1]$ (таким обозначением пользуемся в дальнейшем).*

Эта теорема установлена в [5] для $f(x, t) \in L_2[Q_T]$ и в [7] для $f(x, t) \in L[Q_T]$.

Л е м м а 2. *Для $u_{11}(x, t)$ имеет место формула*

$$u_{11}(x, t) = a_1(x, t) + u_{12}(x, t),$$

*где* $a_1(x, t) = \frac{1}{2}\int_{x-t+\tau}^{t} \tilde{f}_0(\eta, \tau)d\eta$ *и $u_{12}(x, t)$ есть классическое решение задачи (1)–(3) при $\varphi(x) = \psi(x) = 0$ и $f(x, t) = f_1(x, t)$, где $f_1(x, t) = -q(x)a_1(x, t)$.*

Этот процесс продолжаем до бесконечности по правилу

$$u_{1n}(x, t) = a_n(x, t) + u_{1,n+1}(x, t),$$

где $a_n(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}_{n-1}(\eta, \tau)d\eta$ и $u_{1,n+1}(x, t)$ есть классическое решение задачи (1)–(3) при $\varphi(x) = \psi(x) = 0$ и $f(x, t) = f_n(x, t)$, где $f_n(x, t) = -q(x)a_n(x, t)$. Данная процедура и есть реализация рекомендаций А.Н. Крылова по ускорению сходимости рядов, применённая к каждому шагу указанного процесса.

Л е м м а 3. *Имеют место формулы*

$$u_1(x, t) = A_n(x, t) + \Omega_n(x, t), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

*где* $A_n(x, t) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x, t)$,

$$\Omega_n(x, t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{k\ge n_0}\int_{\gamma_k}\right)\times$$
$$\times\left[\int_0^t (R_\lambda - R^0_\lambda)(f_{n-1}(\cdot, \tau))\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}d\tau\right]d\lambda.$$

Л е м м а 4. *Функции $a_n(x, t)$ линейно зависят от $\varphi$ и справедливы оценки*

$$\|a_n(x, t)\|_{C[Q_T]} \le M_1\left(\frac{M_2}{2}\right)^{n-1}\frac{T^{n-1}}{(n-1)!}, \; n = 1, 2, \ldots,$$

*где $M_1 = \|a_1(x, t)\|_{C[Q_T]}$, $M_2 = (2m+1)\|q\|_1$ ($\|\cdot\|_1$ — норма в $L[0, 1]$), $m$ — наименьшее натуральное число такое, что $T \le m$. Кроме того, $M_1 \le c_T\|\varphi\|_1$, постоянная $c_T$ не зависит от $\varphi(x)$.*

Т е о р е м а 3. *Если $u_1(x, t)$ есть классическое решение задачи (1)–(3) при $\psi(x) = f(x, t) = 0$, то*

$$u_1(x, t) = A(x, t) = \sum_0^\infty a_n(x, t) \tag{6}$$

*и ряд $A(x, t)$ сходится абсолютно и равномерно по $x, t \in Q_T$ при любом $T > 0$.*

Привлекая сюда результаты из [4], получим следующее утверждение.

Т е о р е м а 4. *Если $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ абсолютно непрерывны, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, $L\varphi \in L_p[0, 1]$ ($p > 1$), то классическое решение $u_1(x, t)$ задачи (1)–(3) при любом $T > 0$ существует и для него имеет место формула (6).*

3. Для функции $u_2(x, t)$ и $u_3(x, t)$ справедливы две теоремы.

Т е о р е м а 5. *Если $u_2(x, t)$ есть классическое решение задачи (1)–(3) при $\varphi(x) = f(x, t) = 0$, то*

$$u_2(x, t) = B(x, t) = \sum_0^\infty b_n(x, t), \tag{7}$$

*где* $b_0(x, t) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\tilde{\psi}(\tau)d\tau$, $b_n(x, t) = \frac{1}{2}\int_0^t d\tau\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}\tilde{g}_{n-1}(\eta, \tau(d\eta)$ *$(n \geqslant 1)$, $g_n(x, t) = -q(x)b_n(x, t)$, $n \geqslant 0$, и ряд $B(x, t)$ сходится абсолютно и равномерно в $Q_T$.*

Такое классическое решение существует, если $\psi(x)$ абсолютно непрерывна, $\psi(0) = \psi(1) = 0$, $\psi'(x) \in L_2[0, 1]$ (см. [6]).

Т е о р е м а 6. *Если $u_3(x, t)$ — классическое решение задачи (1)–(3) при $\varphi(x) = \psi(x) = 0$, то*

$$u_3(x, t) = D(x, t) = \sum_0^\infty d_n(x, t), \tag{8}$$

*где*

$$d_0(x, t) = \frac{1}{2}\int_0^t d\tau\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}\tilde{f}(\eta, \tau)d\eta,$$

$$d_n(x, t) = \frac{1}{2}\int_0^t d\tau\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}\tilde{m}_{n-1}(\eta, \tau)d\eta,$$

$n \geqslant 1$, $m_n(x, t) = -q(x)d_n(x, t)$, $n \geqslant 0$ *и* $D(x, t)$ *сходится абсолютно и равномерно в* $Q_T$.

Такое классическое решение существует, если $f(x, t), f'_t(x, t)$ непрерывны, $f(0, t) = f(1, t) = 0$ (см. [5]).

4. Перейдём к обобщённому решению задачи (1)–(3) в случае произвольных $q(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ из $L[0, 1]$ и $f(x, t) \in L[Q_T]$. Заметим, что ряды $A(x, t)$, $B(x, t)$, $D(x, t)$ имеют смысл и в этом случае. Лемма 4 также имеет место, и поэтому ряд $A(x, t)$ сходится абсолютно и равномерно по $x, t \in Q_T$ при любом $T > 0$ с такой же скоростью, что и в классическом случае. Аналогично сходятся ряды $B(x, t)$ и $D(x, t)$. Обозначим их суммы соответственно $v(x, t)$, $w(x, t)$, $z(x, t)$.

Лемма 5. *Положим* $s(x, t) = v(x, t) + w(x, t) + z(x, t)$. *Тогда*

$$\|s(x, t)\|_{L[Q_T]} \le c_T \left\{\|\varphi\| + \|\psi\| + \|f\|_{L[Q_T]}\right\},$$

*где* $c_T > 0$ *не зависит от* $\varphi$, $\psi$, $f$, *т.е.* $s(x, t)$ *как линейный оператор от исходных данных ограничен.*

Следующая теорема показывает, что $s(x, t)$ является обобщённым решением задачи (1)–(3) в случае произвольных суммируемых $q(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(x, t)$, понимаемым как предел классических решений (см. [8, с. 491]).

Теорема 7. *Если* $u_h(x, t)$ – *классическое решение задачи*

$$\frac{\partial^2 u_h(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_h(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u_h(x,t) + f_h(x,t),$$

$$u_h(0, t) = u_h(1, t) = 0,\ u_h(x, 0) = \varphi_h(x),$$

$$u'_{h,t}(x, 0) = \psi_h(x),\ \text{и}\ \|\varphi_h - \varphi\|_1 \to 0,\ \|\psi_h - \psi\|_1 \to 0,$$

$$\|f_h(x, t) - f(x, t)\|_{L[Q_T]} \to 0\ \ \text{при}\ h \to 0,\ \text{то и}$$

$$\|u_h(x, t) - s(x, t))\|_{L[Q_T]} \to 0\ \text{при}\ h \to 0.$$

Из леммы 5 следует устойчивость обобщённого решения по исходным данным.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П.* // ДАН. 2014. Т. 458. № 2. С. 138–140.
2. *Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П.* // ЖВМиМФ. 2015. Т. 55. № 2. С. 229–241.
3. *Крылов А.Н.* О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах. Л.: ГИТТЛ, 1950. 368 с.
4. *Хромов А.П.* // ЖВМиМФ. 2016. Т. 54. № 10. С. 1795–1809.
5. *Хромов А.П., Корнев В.В.* // ЖВМиМФ. 2017. Т. 57. № 10. С. 1692–1707.
6. *Хромов А.П.* // ДАН. 2017. Т. 474. № 6. С. 668–670.
7. *Корнев В.В., Хромов А.П.* // Математика. Механика. Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2017. В. 19. С. 40–44.
8. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988. 512 с.
9. *Чернятин В.А.* Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных. М.: Изд-во МГУ, 1991. 112 с.


# CLASSICAL AND GENERALIZED OF A MIXED PROBLEM–SOLUTIONS FOR A NON-HOMOGENEOUS WAVE EQUATION

**A. P. Khromov, V. V. Kornev**

Presented by Academician of the RAS B.S. Kashin January 29, 2018

Received May 23, 2018

This study follows A.N. Krylov’s recommendations on accelerating the convergence of the Fourier series, to obtain explicit expressions of the classical mixed problem–solution for a non-homogeneous equation and explicit expressions of the generalized solution in the case of arbitrary summable functions $q(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(x, t)$.

*Keywords:* wave equation, Fourier method, resolvent, classic and generalized solutions.