ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 484, № 1, с. 21–25

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.9

МЕДЛЕННЫЕ И БЫСТРЫЕ КОЛЕБАНИЯ В МОДЕЛИ ОПТИКО-ЭЛЕКТРОННОГО ОСЦИЛЛЯТОРА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Е. В. Григорьева[1,3,*], **С. А. Кащенко**[2,3,**]

Представлено академиком РАН В. В. Козловым 11.07.2018 г.

Поступило 02.08.2018 г.

Исследована локальная динамика модели оптико-электронного осциллятора с запаздывающей обратной связью. В окрестности нулевого состояния равновесия построены нормализованные уравнения, которыми являются краевые задачи, зависящие от континуального параметра. С помощью решений краевых задач получены асимптотические решения исходной нелинейной системы в виде комбинации медленных и быстрых колебаний, определены частоты и амплитуды составляющих таких решений.

Ключевые слова: бифуркации, устойчивость, нормальные формы, сингулярные возмущения, дифференциальные уравнения с запаздыанием.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-5652484121-25

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Ввиду перспективных приложений в последнее время активно изучается динамика электрооптических систем на основе уравнения с запаздыванием Икеды [1] и его модификаций, содержащих более высокие производные [2]. Обсуждались условия, приводящие к неустойчивости равновесного решения [3], мультистабильность периодических состояний [4], динамический хаос [3], быстрые осцилляции на фоне медленных колебаний [5]. Указанные нелинейные явления изучались численно и с привлечением теории релаксационных колебаний.

В настоящей работе представлен анализ бифуркаций, порождающих медленные колебания с периодом, намного превышающим время запаздывания, и быстро осциллирующие решения. Особенностью модели является наличие малого параметра при производной. Для построения нормализованных уравнений в такой сингулярно возмущённой системе используется метод, разработанный в [6]. Ранее метод применялся в [7] для анализа динамики лазерной системы с большим запаздыванием в цепи оптоэлектронной обратной связи и в [8] для модели лазера с оптической обратной связью и большим коэффициентом управления, что позволило обосновать пространственно-временное представление динамики систем с запаздыванием.

Будет показано, что система нормальных уравнений для модели электро-оптического осциллятора также может быть записана в виде уравнения в частных производных (краевой задачи) для функции, зависящей от “медленного” и “быстрого” времени, причём по быстрой переменной выполняются условия периодичности. Нелокальные решения краевой задачи определяют в главном локальную динамику исходной системы с запаздыванием.

Рассматривается модель электро-оптического осциллятора, предложенная в [3]:

$$\varepsilon^2 \frac{dx}{d\zeta} = z - x + \beta\left[\cos^2(x(\zeta - \nu) + \psi) - \cos^2\psi\right],$$

$$\frac{dz}{d\zeta} = -x^2, \tag{1}$$

где $x(\zeta)$ — безразмерная переменная, описывающая напряжение на входе модулятора Маха–Зендера, β — коэффициент обратной связи, ν — время запаздывания в цепи обратной связи, ε^2 — коэффициент отсечки частоты. В [3] приводятся значения $\varepsilon^2 = 4 \times 10^{-4}$ и $\nu = 2 \times 10^{-2}$ как типичные и соответствующие экспериментальным наблюдениям. Поэтому ε и ν естественно принять за малые поло-

[1] *Белорусский государственный экономический университет, Минск*

[2] *Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова*

[3] *Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва*

[*] *E-mail: grigorieva@tut.by*

[**] *E-mail: kasch@uniyar.ac.ru*

жительные параметры:

$$0 < \varepsilon \ll 1, \qquad (2)$$

и $\nu = c\varepsilon$, где значение $c > 0$ фиксировано.

От системы (1) удобно перейти к уравнению второго порядка относительно $x(t)$ в окрестности нулевого состояния равновесия $\left(t = \dfrac{\zeta}{\nu}\right.$ — текущее время в единицах времени запаздывания$\left.\right)$:

$$\varepsilon c^{-1}\ddot{x} + \dot{x} + \varepsilon c x = b_1\dot{x}(t-1) +$$
$$+2b_2 x(t-1)\dot{x}(t-1) + 3b_3 x^2(t-1)\dot{x}(t-1) + \ldots, \qquad (3)$$

где $b_1 = -\beta\sin(2\psi)$, $b_2 = -\beta\cos(2\psi)$, $b_3 = \dfrac{2}{3}\beta\sin(2\psi)$. В качестве фазового пространства уравнения (3) фиксируем пространство $C^1_{[-1,0]}$.

Локальная динамика уравнения (3) во многом определяется решениями линеаризованного в нуле уравнения, которому соответствует характеристический квазиполином

$$\varepsilon c^{-1}\lambda^2 + \lambda + \varepsilon c = b_1\lambda\exp(-\lambda). \qquad (4)$$

Расположение корней этого квазиполинома позволяет получить информацию о поведении уравнения (3) с достаточно малыми начальными условиями.

Характеристическое уравнение (4) имеет один корень с асимптотикой

$$\tilde{\lambda}(\varepsilon) = -c(1-b_1)^{-1}\varepsilon + O(\varepsilon^2), \qquad (5)$$

а вещественные части всех остальных корней при $|b_1| < 1$ и $\varepsilon \to 0$ — отрицательны и отделены от нуля при $\varepsilon \to 0$. В этом случае существует локальное одномерное инвариантное устойчивое интегральное многообразие, на котором все решения (3) из некоторой достаточно малой и независящей от ε окрестности нулевого состояния равновесия стремятся к нулю при $t \to \infty$. Если же $|b_1| > 1$, то существует корень уравнения (4) с положительной и отделенной от нуля при $\varepsilon \to 0$ вещественной частью. В этом случае задача о динамике уравнения (3) становится нелокальной.

В разделе 2 будем рассматривать близкий к критическому случай

$$b_1 = 1 + \varepsilon b_{10} + \varepsilon^{3/2}b_{11}. \qquad (6)$$

Такое представление надкритичности связано с тем, что, как ниже будет показано, при определённом значении b_{10} возможны существенные изменения динамики.

В разделе 3 будем изучать решения при b_1, близких к другому критическому значению:

$$b_1 = -(1 + \varepsilon^2 b_{10}). \qquad (7)$$

В критических случаях (6) и (7) бесконечно много корней уравнения (4) стремится к мнимой оси при $\varepsilon \to 0$. Сформулируем соответствующий результат.

Утверждение 1. *Пусть выполнено равенство* (6). *Для всех тех корней* $\lambda_\pm(\varepsilon)$ *и* $\lambda_k(\varepsilon)$ $(k = \pm1, \pm2, \ldots)$, *для которых* $\mathrm{Re}\lambda_\pm(\varepsilon) \to 0$, $\mathrm{Re}\lambda_k(\varepsilon) \to 0$, *имеют место асимптотические формулы*

$$\lambda_\pm(\varepsilon) = \pm i\sqrt{\varepsilon c} + \frac{1}{2}\varepsilon\left(b_{10} - \frac{1}{2}c\right) + O(\varepsilon^{3/2}), \qquad (8)$$

$$\lambda_k(\varepsilon) = 2\pi i k + \varepsilon\lambda_{k1} + \varepsilon^2\lambda_{k2} + O(\varepsilon^3), \qquad (9)$$
$$\lambda_{k1} = -(c^{-1}\cdot 2\pi i k + c(2\pi i k)^{-1}) + b_{10},$$
$$\lambda_{k2} = -c^{-1}\cdot 2\lambda_{k1} - (2\pi i k)^{-1}\lambda_{k1}^2 + \frac{1}{2}\lambda_{k1}^2 + b_{11}.$$

Утверждение 2. *Пусть выполнено равенство* (7). *Тогда для всех корней* $\lambda_0(\varepsilon)$ *и* $\lambda_k(\varepsilon)$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$, *для которых* $\mathrm{Re}\,\lambda_k(\varepsilon) \to 0$, *имеют место формулы*

$$\lambda_0(\varepsilon) = -\frac{1}{2}\varepsilon c + O(\varepsilon^2), \qquad (10)$$

$$\lambda_k(\varepsilon) = i\pi(2k+1) + \varepsilon\lambda_{k1} + \varepsilon^2\lambda_{k2} + O(\varepsilon^3),$$
$$\lambda_{k1} = -i\pi(2k+1)c^{-1} - c(i\pi(2k+1))^{-1}, \qquad (11)$$
$$\lambda_{k2} = (2c^2)^{-1}(i\pi(2k+1))^2 + c^{-2}i\pi(2k+1) + 1 + b_{10} +$$
$$+ c^2(2(i\pi(2k+1))^2)^{-1} - c^2(i\pi(2k+1))^3.$$

Отсюда следует, что в задаче об устойчивости нулевого состояния равновесия уравнения (3) реализуются критические случаи бесконечной размерности. Методика исследования таких критических случаев разработана в [6]. Ниже применим её для уравнения (3).

2. НОРМАЛИЗОВАННЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ В СЛУЧАЕ (6)

Здесь предполагаем, что выполнено условие невырожденности $b_2 \neq 0$, $(\cos 2\psi \neq 0)$, тогда

$$\beta^2 \geq 1, \quad b_2^2 = \beta^2 - 1, \quad b_3 = -\frac{2}{3}. \qquad (12)$$

Обозначим через $M(\varphi)$ среднее на отрезке $[0, 1]$ функции $\varphi(y)$:

$$M(\varphi) = \int_0^1 \varphi(y)dy.$$

Фиксируем затем произвольно вещественное значение $v \neq 0$. Через $\Theta_v = \Theta_v(\varepsilon) \in [0, 1)$ обозначим такую величину, которая дополняет до целого значение $v\varepsilon^{-1/2}$.

Введём в рассмотрение семейство краевых задач

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{1}{2} v^2 c^{-2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + b_{10}\xi + b_2[\xi^2 - M(\xi^2)], \quad (13)$$

$$\xi(\tau, y+1) \equiv \xi(\tau, y),\ M(\xi) = 0. \quad (14)$$

Эти краевые задачи при определённых условиях играют роль нормальных форм: их нелокальная динамика определяет, при достаточно малых ε, поведение всех решений нелинейного уравнения (3) с начальными условиями из некоторой достаточно малой и не зависящей от ε окрестности нулевого состояния равновесия. Связь между решениями задачи (13) и уравнения (3) устанавливается следующей теоремой.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* (6) *и* $b_{10} < \frac{1}{2}c$ *или* $b_{10} = \frac{1}{2}c$ *и* $b_{11} < 0$. *Пусть значение* v *произвольно фиксировано и пусть краевая задача* (13), (14) *имеет ограниченное при* $\tau \to \infty$, $y \in [0, 1]$ *решение* $\xi_0(\tau, y)$. *Тогда уравнение* (3) *имеет асимптотическое по невязке с точностью до* $O(\varepsilon^{3/2})$ *решение* $x_0(t,\varepsilon)$, *для которого*

$$x_0(t,\ \varepsilon) = \varepsilon\xi_0(\varepsilon t,\ (v\varepsilon^{-1/2} + \Theta_v)t). \quad (15)$$

Таким образом, в условиях этой теоремы для решений уравнения (3) характерны быстрые колебания с частотами порядка $O(\varepsilon^{-1/2})$ и с амплитудами порядка $O(\varepsilon)$.

Отметим, что при $b_{10} > \frac{1}{2}c$ и достаточно малых ε задача о динамике (3) становится нелокальной: в малой и не зависящей от ε окрестности нулевого состояния равновесия не существует аттрактора уравнения (3). Предположим теперь, что

$$b_{10} = \frac{1}{2}c \quad \text{и} \quad b_{11} > 0. \quad (16)$$

В этом случае справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* (16) *и* $\xi_0(\tau, y)$ *— ограниченное при* $\tau \to \infty$, $y \in [0, 1]$, *решение краевой задачи* (13), (14) (*при* $b_{10} = \frac{1}{2}c$ *и* v *— произвольно фиксировано*). *Тогда уравнение* (3) *имеет асимптотическое по невязке с точностью до* $O(\varepsilon^{5/4})$ *решение* $x_0(t,\ \varepsilon)$, *для которого*

$$x_0(t,\ \varepsilon) = \varepsilon^{3/4} A(t+\varphi,\ \varepsilon) + \varepsilon\xi_0(\varepsilon t,\ (v\varepsilon^{-1/2} + \Theta_v)t), \quad (17)$$

где

$$A(t,\varepsilon) = (b_{11}c^{-1})^{1/2}\cos(a(\varepsilon)t),$$
$$a(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon c} - \frac{1}{3}(\beta^2 - 1)b_{11}c^{-1}\varepsilon^{3/2}. \quad (18)$$

Из теоремы 2 следует, что при условиях (16) в уравнении (3) возникают медленные колебания с малой частотой порядка $O(\varepsilon^{1/2})$ и с амплитудой порядка $O(\varepsilon^{3/4})$, на которые накладываются быстрые колебания с частотой порядка $O(\varepsilon^{-1/2})$ и с меньшей амплитудой порядка $O(\varepsilon^1)$.

Замечание 1. Параметр v в (13) произволен. Тем самым речь идёт о псевдоконтинуальном семействе краевых задач. Отсюда можно сделать вывод о мультистабильности для уравнения (3).

2.1. *Случай кубической нелинейности*

Здесь предполагаем, что выполнено условие (6) и в уравнении (3)

$$b_2 = 0 \quad (b_2 = \beta\cos 2\psi), \quad b_3 = -\frac{2}{3}. \quad (19)$$

В этом случае уравнение (3) имеет асимптотическое по невязке с точностью до $O(\varepsilon^1)$ решение

$$x(t,\varepsilon) = \varepsilon^{1/2}[r(\tau)\exp(i\sqrt{\varepsilon c}t) + \bar{r}(\tau)\exp(-it\sqrt{c\varepsilon}) + \xi(\tau, y)] + \ \ldots,$$

в котором динамика амплитуд $r(\tau)$ и $\xi(\tau, y)$, где $\tau = \varepsilon t$ и $y = (v\varepsilon^{-1/2} + \Theta_v)t$, описывается системой нормальных уравнений

$$\frac{\partial r}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\left(b_{10} - \frac{1}{2}c\right)r \ - \ \frac{c}{2}r|r|^2 - rM(\xi^2), \quad (20)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{1}{2}v^2c^{-2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + b_{10}\xi - \frac{2}{3}\left[\xi^3 - M(\xi^3) + 6\xi|r|^2\right], \quad (21)$$

$$\xi(\tau, y+1) \equiv \xi(\tau, y), \quad M(\xi) = 0 \quad (\tau = \varepsilon t). \quad (22)$$

Таким образом, в данном случае колебательные компоненты решения с различными по порядку частотами могут иметь однопорядковые амплитуды.

2.2. *О состояниях равновесия нормализованных краевых задач*

Нулевое состояние равновесия в (13), (14) асимптотически устойчиво, если произвольный параметр $v^2 > c^2 b_{10}(2\pi^2)^{-1}$ и не устойчиво при $v^2 < c^2 b_{10}(2\pi^2)^{-1}$. При условии $v^2 = c^2 b_{10}(2\pi^2)^{-1}$ в задаче об устойчивости нулевого состояния равновесия реализуется критический случай двойного нулевого корня с двумя группами решений. Положим в (13)

$$v^2 = c^2 b_{10}(2\pi^2)^{-1} + \mu\gamma,$$

где γ — фиксированная постоянная, а $0 < \mu \ll 1$. Тогда в малой окрестности нулевого состояния равновесия этой краевой задачи имеется двумерное устойчивое интегральное инвариантное многообразие, на котором (13), (14) можно записать в виде одного комплексного уравнения первого порядка — нормальной формы — вида

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \sigma w + dw|w|^2. \quad (23)$$

Здесь $\sigma = -\frac{b_{10}}{2}\pi^2\gamma$. Решения (23) и (13), (14) связаны равенством

$$\xi(\tau, y) = \mu^{1/2}(w(s)\exp(2\pi iy) + \\ + \overline{w}(s)\exp(-2\pi iy)) + O(\mu), \quad (24)$$

где $s = \mu\tau$, а зависимость от y — 2π-периодическая.

Предположим сначала, что выполнено условие

$$b_2 \neq 0. \quad (25)$$

Тогда для определения коэффициента d получаем выражение $d = \frac{1}{3}\left(\frac{b_2 c}{\pi v}\right)^2$. При условии $\gamma < 0$ все решения (кроме нулевого) уравнения (23) неограничены при $s \to \infty$, а при $\gamma > 0$ в (23) нулевое состояние равновесия устойчиво и имеется семейство неустойчивых состояний равновесия, заполняющих окружность $\|w\| = \left(-\frac{\sigma}{d}\right)^{1/2}$. Следовательно, в случае (25) вывод о существовании устойчивых ненулевых решений (13), (14) сделать не удаётся.

Пусть вместо (25) выполнены условия

$$b_2 = 0, \quad b_3 \neq 0. \quad (26)$$

Тогда объектом исследования является система (20)—(22). Если $b_{10} < \min\left(\frac{c}{2},\ 2(\pi v c^{-1})^2\right)$, то её нулевое решение асимптотически устойчиво, а при $b_{10} > \min\left(\frac{c}{2},\ 2(\pi v c^{-1})^2\right)$ — неустойчиво, и задача о динамике становится нелокальной. При рассмотрении близкого к критическому случая, когда $b_{10} = \min\left(\frac{c}{2},\ 2(\pi v c^{-1})^2\right) + \gamma\mu$, на инвариантном многообразии система (20)–(22) представима в виде нормальной формы (23). Отметим здесь тот факт, что, в отличие от случая $b_2 \neq 0$, из состояния равновесия (20)–(22) могут бифурцировать устойчивые неоднородные периодические по y решения, поскольку значения Red могут быть отрицательными при определённых b_2 и b_3.

3. НОРМАЛИЗОВАННЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ В СЛУЧАЕ (7)

В случае (7) роль нормальной формы играет краевая задача с антипериодическими граничными условиями:

$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = -cJ(\xi) + \varepsilon\left[2c^2)^{-1}\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + 2c^{-1}\frac{\partial\xi}{\partial y} + (1 + b_{10})\xi + 2J(\xi) + \\ + \frac{1}{2}c^2 J^2(\xi) - (b_3 + b_2^2)\xi^3\right], \quad \xi(\tau, y+1) \equiv -\xi(\tau, y), \quad (27)$$

где через $J(w)$ обозначен оператор “интегрирования”: при $w(y) = \sum_{k\neq 0} w_k \exp(iky)$ имеем $J(w) = \sum_{k\neq 0}(ik)^{-1} w_k \exp(iky)$.

Нелокальная динамика задачи (27) определяет в главном локальное поведение решений исходного уравнения (3) в соответствии со следующей теоремой.

Т е о р е м а 3. *Пусть выполнено условие* (7) *и пусть краевая задача* (27) *имеет ограничение при* $t \to \infty$, $y \in [0, 1]$ *решение* $\xi_0(\tau, y)$. *Тогда уравнение* (3) *имеет асимптотическое по невязке с точностью до* $O(\varepsilon^2)$ *решение* $x_0(t, \varepsilon)$, *для которого*

$$x_0(t, \varepsilon) = \varepsilon\xi_0(\varepsilon t, (1 - \varepsilon c^{-1})t).$$

Отметим, что поскольку краевая задача (27) имеет антипериодические граничные условия, то осциллирующие решения $u_0(t, \varepsilon)$ имеют период близкий к 2 (удвоенному времени запаздывания).

В случае большей надкритичности, когда в (7) вместо $\varepsilon^2 b_{10}$ имеем εb_{10}, т.е.

$$b_1 = -(1 + \varepsilon b_{10}), \quad (28)$$

нормальными формами являются краевые задачи

$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = (2c^{-2}v^2)\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + b_{10}\xi - (b_3 + b_2^2)\xi^3, \\ \xi(\tau, y+1) \equiv -\xi(\tau, y), \quad (29)$$

зависящие от произвольного параметра $v \neq 0$. Связь нелокальных решений (29) и решений (3) устанавливается следующей теоремой.

Т е о р е м а 4. *Пусть выполнено условие* (28) *и пусть для некоторого фиксированного* $v \neq 0$ *краевая задача* (29) *имеет ограниченное при* $\tau \to \infty$, $y \in [0, 1]$ *решение* $\xi_0(\tau, y)$. *Тогда уравнение* (3) *имеет асимптотическое по невязке с точностью до* $O(\varepsilon)$ *решение*

$$u_0(t, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2}\xi_0(\varepsilon t, (v\varepsilon^{-1/2} + \Theta_v)t).$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе построены в качестве нормализованных уравнений семейства краевых задач, нелокальная динамика которых определяет динамику решений исходной системы с запаздыванием в малой окрестности состояния равновесия. Рассмотрены бифуркационные эффекты в нормальных уравнениях. Показано, что в зависимости от порядка надкритичности возможно появление быстрых или медленных колебаний, а также колебаний, главная часть которых является медленно осциллирующей, а добавка — быстро осциллирующей. Определены частоты и амплитуды колебательных составляющих решений.

Нормализованные уравнения составляют семейства, зависящие от произвольного параметра v, что может проявиться как мультистабильность решений. Эти выводы подтверждаются численными решениями исходной системы с различными начальными условиями. Поскольку полученные нормальные формы являются уравнениями в частных производных, то они могут служить обоснованием для пространственно-временного представления динамики оптоэлектронного осциллятора с запаздыванием.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ikeda K., Matsumoto K.* High-Dimensional Chaotic Behavior in Systems With Time-Delayed Feedback // Physica D. 1987. V. 29. P. 223–235.
2. *Kouomou Y.C., Colet P., Larger L., Gastaud N.* Chaotic Breathers in Delayed Electro-Optical Systems // Phys. Rev. Lett. 2005. V. 95. 203903.
3. *Peil M., Jacquot M., Kouomou Y.C.* Routes to Chaos and Multiple Time Scale Dynamics in Broadband Bandpass Nonlinear Delay Electro-Optic Oscillators // Phys. Rev. E. 2009. V. 79. 026208.
4. *Weicker L., Erneux T., Rosin D.P., Gauthier D.J.* Multirhythmicity in an Optoelectronic Oscillator with Large Delay // Phys. Rev. E. 2015. V. 91. 012910.
5. *Talla Mbé J.H., Talla A.F., Goune Chengui G.R.* Mixed-Mode Oscillations in Slow-Fast Delay Optoelectronic Systems // Phys. Rev. E. 2015. V. 91. 012902.
6. *Kaschenko I.S., Kaschenko S.A.* Local Dynamics of the Two-Component Singular Perturbed Systems of Parabolic Type // Intern. J. Bifurcation and Chaos. 2015. V. 25. № 11. 1550142.
7. *Bestehorn M., Grigorieva E.V., Haken H., Kaschenko S. A.* Order Parameters for Class-B Lasers with a Long Time Delayed Feedback // Physica D. 2000. V. 145. P. 111–130.
8. *Grigorieva E.V., Kaschenko I.S., Kaschenko S.A.* Dynamics of Lang-Kobayashi Equations with Large Control Coefficient // Nonlin. Phenomena in Complex Systems. 2012. V. 12. P. 309.

SLOW AND RAPID OSCILLATIONS IN AN OPTOELECTRONIC OSCILLATOR MODEL WITH DELAY

E. V. Grigorieva, S. A. Kashenko

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov July 11, 2018

Received August 2, 2018

The local dynamics of an optoelectronic oscillator model characterized with feedback delay is investigated. In the neighborhood of the zero equilibrium state, normalized equations are constructed, which are boundary value problems depending on the continuumal parameter. Such problems are used to determine the asymptotic solutions of the original nonlinear system, mainly the frequencies and amplitudes of the components, in the form of a combination of slow and fast oscillations.

Keywords: bifurcations, stability, normal forms, singular perturbations, differential equations with delay.