

К ТЕОРИИ БЛОЧНЫХ СТРУКТУР В ПРОБЛЕМЕ ПРОЧНОСТИ ШТОЛЕН И КОНСТРУКЦИЙ С МНОЖЕСТВЕННЫМИ СОЕДИНЕНИЯМИ

Академик РАН В. А. Бабешко^{1,2,*}, О. В. Евдокимова¹, О. М. Бабешко²,
А. В. Павлова², И. С. Телятников¹, А. Г. Федоренко¹

Поступило 18.05.2018 г.

Показано, что граничная задача для слоистой среды с параллельными множественными полостями сводится к векторной задаче Римана. Для ее решения разработан факторизационный метод, позволяющий строить решение в любых приближениях.

Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние, штольни, факторизация, деформируемые слои, пластины Кирхгофа, блочные элементы, дифференциальные и интегральные уравнения.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0869-5652484129-34>

ВВЕДЕНИЕ

Направление работы — исследование тех факторов, влияющих на прочностные свойства изменяющихся подземных сооружений, которые по разным причинам мало изучены, хотя решены очень важные задачи локального характера в штольнях [1]. Рассматривается совокупность параллельных подземных сооружений [2, 3] как блочная структура, состоящая из верхнего линейно упругого слоя толщиной H_1 и пласта толщины h , моделируемого пластиной Кирхгофа (рис. 1). Пласт, содержащий добываемые полезные ископаемые, лежит на слое, механические характеристики среды которого грунтоподобны и позволяют моделировать его постелью Винклера. Предполагается, что толщина h пласта много меньше H_1 , что отвечает реальным условиям добычи многих полезных ископаемых. Расположим систему координат $ox_1x_2x_3$ таким образом, что плоскость ox_1x_2 совпадает со срединной плоскостью пластины, а ось ox_3 направлена строго вверх. Считаем, что вдоль оси ox_1 , перпендикулярно оси ox_2 , расположено N протяжённых, параллельных между собой штолен, которые считаются бесконечными. Штольни находятся в рудном пласте и ширина каждой из них равна $b_{2n+1} - b_{2n}$, $n = 1, 2, \dots, N$, где (b_{2n}, b_{2n+1}) — координаты на оси ox_2 штольни с номером $2n$. Пласт сверху накрыт верхним

деформируемым слоем и лежит на основании Винклера, для которого связь между напряжениями $t(x_1, x_2)$ и перемещениями $u_{32}(x_1, x_2)$ верхней границы основания задаётся соотношением $u_{32}(x_1, x_2) = \varepsilon_6^{-1} \nu t(x_1, x_2)$, $\varepsilon_6^{-1} \nu > 0$. Здесь ν — коэффициент постели Винклера. Области между штольнями с координатами $\{b_{2n-1}, b_{2n}\}$ шириной $b_{2n} - b_{2n-1}$, $n = 1, 2, \dots, N$, $b_1 = -\infty$, $b_{2n} = \infty$, являются опорами, имеющими номера $2n - 1$. Допускается, что верхний упругий слой со свободной от напряжений верхней границей и плотностью материала ρ вертикально воздействует сверху на пласт напряжением $q_0 = \rho g H_1$, где g — ускорение свободного падения, вызывая пренебрежимо малые касательные

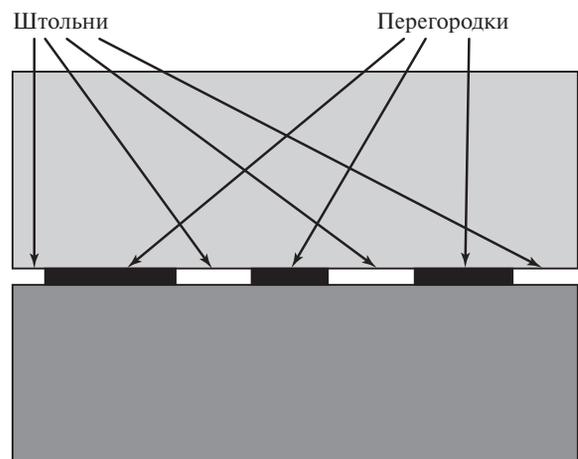


Рис. 1. Сечение блочной структуры, перпендикулярное штольням. Перегородки моделируются пластинами ввиду их малой относительной толщины.

¹ Южный научный центр Российской Академии наук, Ростов-на-Дону

² Кубанский государственный университет, Краснодар

* E-mail: babeshko41@mail.ru

напряжения в сравнении с нормальными. В работах [2, 3] при рассмотрении подобных задач разработаны методы сведения решений возникающих граничных задач к уравнениям Фредгольма. Настоящий подход доступен для прикладных целей.

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнения пластин Кирхгофа, описывающие поведение пласта, в том числе опорных зон, которые должны быть достаточно протяжёнными для удержания высокого давления верхнего слоя, имеют вид

$$\mathbf{R}_b(\partial x_1, \partial x_2)u_{3b} + \varepsilon_{53b}(t_{3b} - g_{3b}) \equiv \left(\frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \right) u_{3b} + \varepsilon_{53b}(t_{3b} - g_{3b}) = 0,$$

$$\mathbf{R}_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2)U_{3b} \equiv R_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2)U_{3b} \equiv (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2 U_{3b},$$

$$U_{3b} = \mathbf{F}_2 u_{3b}, \quad G_{3b} = \mathbf{F}_2 g_{3b}, \quad T_{3b} = \mathbf{F}_2 t_{3b}, \quad b = \lambda, r,$$

$$M_b = -D_{b1} \left(\frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_2^2} + \nu_b \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_1^2} \right), \quad D_{b1} = \frac{D_b}{H_1^2}, \quad D_{b2} = \frac{D_b}{H_1^3},$$

$$Q_b = -D_{b2} \left(\frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_2^3} + (2 - \nu_b) \frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_1^2 \partial x_2} \right) = f_{4b}(\partial \Omega_b),$$

$$u_{3b} = f_{1b}(\partial \Omega_b), \quad \frac{\partial u_{3b}}{H_1 \partial x_2} = f_{2b}(\partial \Omega_b),$$

$$D_b = \frac{E_b h_b^3}{12(1 - \nu_b^2)}, \quad \varepsilon_{53b} = \frac{(1 - \nu_b^2) 12 H_1^4}{E_b h_b^3}, \quad \varepsilon_6^{-1} = \frac{(1 - \nu) H_1}{\mu}.$$

Здесь для опор, сформированных из фрагментов пласта между штольнями, введено условное обозначение индексом b , которому в будущем будут приданы текущие номера. Опоры занимают области Ω_b с границами $\partial \Omega_b$ при вертикальных статических воздействиях напряжением g_{3b} сверху и t_{3b} снизу. Используются общепринятые обозначения механических параметров в выбранной системе координат: M_b и Q_b – изгибающий момент и перерезывающая сила в системе координат $x_1 \alpha x_2$; h_b – толщины пластин, H_1 – размерная толщина верхнего слоя. Обозначения заимствованы из [2, 3]. $\mathbf{F}_2 \equiv \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2)$ и $\mathbf{F}_1 \equiv \mathbf{F}_1(\alpha_1)$ – двумерный и одномерный операторы преобразования Фурье соответственно. Перемещение нижней границы верхнего слоя происходит за счёт веса верхнего слоя и описывается соотношением [4, 5]

$$u_{31}(x_1, x_2) =$$

$$= \mathbf{K}_{31} \mathbf{g} = \varepsilon_6^{-1} \int \int_{-\infty}^{\infty} k_{31}(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) [g(\xi_1, \xi_2) - g_0] d\xi_1 d\xi_2,$$

$$k_{31}(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int \int_{-\infty}^{\infty} K_{31}(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2,$$

$$G(\alpha_1, \alpha_2) = \int \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi_1, \xi_2) e^{i(\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2)} d\xi_1 d\xi_2.$$

Здесь $g(\xi, \eta)$ – воздействия на нижнюю границу верхнего слоя со стороны пласта, т.е. контактные напряжения, действующие на верхний пласт от опор. Функция $K(\alpha_1, \alpha_2)$, называемая символом интегрального уравнения, представляет собой для линейноупругого слоя мероморфную функцию двух комплексных переменных. Полюса функции по одному из комплексных переменных $\alpha_2 = \alpha_2(\alpha_1)$ при фиксированном вещественном втором переменном являются дискретными комплексными числами, не лежащими на вещественной оси в статических задачах. Воздействие со стороны пласта на верхнюю границу нижнего слоя обозначается $t(\xi_1, \xi_2)$, вертикальное перемещение этой границы при принятых предположениях есть $u_{32}(x_1, x_2)$.

ПОСТРОЕНИЕ ОДНОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Применив для дальнейшего метод блочного элемента [2, 3], осуществив сопряжение всех блоков, получим систему интегральных уравнений вида

$$\mathbf{K} \mathbf{g} = \sum_{n=1}^N \int_{b_{2n-1}}^{b_{2n}} \int_{-\infty}^{\infty} k(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) g_{2n-1}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 =$$

$$= \sum_{n=1}^N t_{2n-1}(x_1, x_2) + \sum_{n=2}^{N-1} \varphi_{2n}(x_1, x_2),$$

$$k(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int \int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2,$$

$$G_{2n-1}(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{b_{2n-1}}^{b_{2n}} \int_{-\infty}^{\infty} g_{2n-1}(\xi_1, \xi_2) e^{i(\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2)} d\xi_1 d\xi_2,$$

$$t_{2n-1}(x_1, x_2) \in \Omega_{2n-1}(b_{2n-1} \leq x_2 \leq b_{2n}, |x_1| \leq \infty, n = 0, 1, \dots, N),$$

$$\varphi_{2n}(x_1, x_2) \in \Omega_{2n}(b_{2n} \leq x_2 \leq b_{2n+1}, |x_1| \leq \infty),$$

$$t_1(x_1, x_2) \in \Omega_0(-\infty = b_1 \leq x_2 \leq b_2, |x_1| \leq \infty),$$

$$t_{2N-1}(x_1, x_2) \in \Omega_{2N}(b_{2N-1} \leq x_2 \leq \infty, |x_1| \leq \infty),$$

$$\varphi_0(x_1, x_2) = \varphi_{2N}(x_1, x_2) = 0.$$

Здесь $\varphi_{2n}(x_1, x_2)$ – новые неизвестные. Для решения применим метод факторизации, разработанный в [4–6]. При этом приняты обозначения факторизации функций по параметру α_2 в виде суммы и в виде произведения в форме

$$\Psi(\alpha_1, \alpha_2) = \{\Psi(\alpha_1, \alpha_2)\}^+ + \{\Psi(\alpha_1, \alpha_2)\}^-,$$

$$\{\Psi(\alpha_1, \alpha_2)\}^\pm = \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Psi(\alpha_1, \eta)}{(\eta - \alpha_2)} d\eta, \quad \alpha_2 \in R^\pm,$$

$$K(\alpha_1, \alpha_2) = K_+(\alpha_1, \alpha_2)K_-(\alpha_1, \alpha_2),$$

$$K_\pm(\alpha_1, \alpha_2) = \exp \left[\pm \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \Psi(\alpha_1, \eta)}{(\eta - \alpha_2)} d\eta \right], \quad \alpha_2 \in R^\pm.$$

Здесь R^+ означает верхнюю полуплоскость, а R^- – нижнюю.

Применим к системе уравнений преобразование Фурье по параметру x_1 , после ряда обозначений, упрощающих вид преобразованных по Фурье функций, приходим к системе одномерных интегральных уравнений вида

$$\sum_0^N \int_{b_{2n}}^{b_{2n+1}} k(x - \xi) \varphi_{2n}(\xi) d\xi =$$

$$= \begin{cases} f_{2m}(x), & b_{2m} < x < b_{2m+1}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, N, \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha\xi} k(\xi) d\xi = K(\alpha), & q_{2n-1}, \quad b_{2m-1} < x < b_{2m}, \\ b_0 = -\infty, \quad b_{2N+1} = \infty, \quad F(\alpha) = \sum_0^N F_{2n}(\alpha). \end{cases}$$

Уравнения составлены для N штольной с отвесанием кровли q_{2n-1} [1] и $N + 1$ опоры, имеющей контактные напряжения φ_{2n} . Для упрощения принято $x_2 = x, \alpha_2 = \alpha$. Применив к системе интегральных уравнений преобразование Фурье по x_2 , с учётом принятых обозначений приходим к функциональному уравнению вида

$$R(\alpha) \sum_1^N Q_{2n-1}(\alpha) - \sum_0^N \Phi_{2n}(\alpha) = \Psi(\alpha).$$

Здесь приняты обозначения

$$R(\alpha) = \frac{1}{K(\alpha)}, \quad \Psi(\alpha) = -\frac{1}{K(\alpha)} F(\alpha), \quad b_0 = -\infty, \quad b_{2N} = \infty,$$

$$\int_{b_{2n-1}}^{b_{2n}} e^{i\alpha\xi} q(\xi) d\xi = Q_{2n-1}(\alpha), \quad \int_{b_{2n}}^{b_{2n+1}} e^{i\alpha\xi} \varphi_{2n}(\xi) d\xi = \Phi_{2n}(\alpha).$$

СВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К ВЕКТОРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ РИМАНА

Введём группу обозначений

$$\Phi_0(\alpha) e^{-i\alpha b_2} = e^{-i\alpha b_2} \Phi_0^-(\alpha), \quad \Phi_0(\alpha) = e^{i\alpha b_2} \Phi_0^-(\alpha),$$

$$\Phi_{2N}(\alpha) e^{-i\alpha b_{2N}} = e^{-i\alpha b_{2N}} \Phi_{2N}^+(\alpha), \quad (1a)$$

$$Q_{2n-1}(\alpha) e^{-i\alpha b_{2n-1}} = Q_{2n-1}^+(\alpha), \quad Q_{2n-1}(\alpha) e^{-i\alpha b_{2n}} = Q_{2n-1}^-(\alpha),$$

$$Q_{2n-1}^+(\alpha) = Q_{2n-1}^-(\alpha) e^{i\alpha(b_{2n} - b_{2n-1})},$$

$$\Phi_{2n}(\alpha) e^{-i\alpha b_{2n}} = \Phi_{2n}^+(\alpha), \quad \Phi_{2n}(\alpha) e^{-i\alpha b_{2n+1}} = \Phi_{2n}^-(\alpha),$$

$$\Phi_{2n}^+(\alpha) = \Phi_{2n}^-(\alpha) e^{i\alpha(b_{2n+1} - b_{2n})},$$

$$\Phi_0^-(\alpha) = X_{2N}^-(\alpha), \quad Q_{2n-1}^\pm(\alpha) = X_{2n-1}^\pm(\alpha), \quad (1b)$$

$$\Phi_{2n}^\pm(\alpha) = X_{2n}^\pm(\alpha), \quad n = 2, \dots, N-1,$$

$$\Phi_{2N}^+(\alpha) = X_{2N}^+(\alpha), \quad n = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$X_{2n-1}^+(\alpha) = X_{2n-1}^-(\alpha) e^{i\alpha(b_{2n} - b_{2n-1})}, \quad n = 2, 3, \dots, N-1,$$

$$X_{2n}^+(\alpha) = X_{2n}^-(\alpha) e^{i\alpha(b_{2n+1} - b_{2n})}.$$

Тогда приходим к следующей векторной системе краевой задачи Римана для N аналитических функций [7–15]:

$$\mathbf{X}^+ = \mathbf{G}\mathbf{X}^- + \Psi$$

$$m = 2, \dots, 2N-1, \quad G_{mm} = e^{i\alpha(b_m - b_{m-1})}, \quad G_{2N, 2N} = -e^{i\alpha(b_{2N} - b_1)}$$

$$G_{2N, s}(\alpha) = \begin{cases} R(\alpha) e^{-i\alpha(b_{2N} - b_{s+1})}, & s = 2m-1, \\ -e^{-i\alpha(b_{2N} - b_{s+1})}, & s = 2m, \end{cases} \quad (2)$$

$$s = 1, 2, \dots, 2N, \quad \Psi(\alpha) = \{0, 0, \dots, -\Psi(\alpha)\}.$$

Пример. Случай одной штольни. Векторная задача Римана принимает вид

$$\begin{vmatrix} X_1^+(\alpha) \\ X_2^+(\alpha) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{i\alpha(b_2 - b_1)} & 0 \\ R(\alpha) & -e^{-i\alpha(b_2 - b_1)} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} X_1^-(\alpha) \\ X_2^-(\alpha) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 \\ \Psi(\alpha) e^{-i\alpha b_2} \end{vmatrix}.$$

Случай двух штольней. Имеем

$$\begin{vmatrix} X_1^+(\alpha) \\ X_2^+(\alpha) \\ X_3^+(\alpha) \\ X_4^+(\alpha) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{i\alpha(b_2 - b_1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha(b_3 - b_2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\alpha(b_4 - b_3)} & 0 \\ R(\alpha) e^{-i\alpha(b_4 - b_2)} & -e^{-i\alpha(b_4 - b_3)} & R(\alpha) & -e^{-i\alpha(b_4 - b_1)} \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} X_1^-(\alpha) \\ X_2^-(\alpha) \\ X_3^-(\alpha) \\ X_4^-(\alpha) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Psi(\alpha) e^{-i\alpha b_4} \end{vmatrix}.$$

Для исследования функционального уравнения Римана развивается факторизационный метод, позволяющий более оптимально изучать поведение характеристик решения. С этой целью введём в рассмотрение матрицу-функцию вида

$$\mathbf{S} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \det \mathbf{S} = (-1)^{N-1}.$$

Вычислим соотношение $\mathbf{Q} = \mathbf{GS} = \|q_{mn}\|$, имеем

$$q_{m,n}(\alpha) = 0, \quad m+n \neq 2N, \quad q_{m,n}(\alpha) = e^{i(b_{n+1}-b_n)\alpha}, \\ m+n = 2N, \quad m \neq 2N,$$

$$q_{2N,s}(\alpha) = \begin{cases} R(\alpha)e^{i(b_{2N}-b_{2N-s+1})\alpha}, & s = 2p-1, \\ -e^{i(b_{2N}-b_{2N-s+1})\alpha}, & s = 2p, \quad p=1, 2, \dots, N. \end{cases}$$

Введём в рассмотрение ещё одну матрицу-функцию

$$\mathbf{H}(\alpha) = \|h_{m,n}\|, \\ h_{m,n}(\alpha) = \begin{cases} 0, & m+n < 2N, \\ 1, & m+n = 2N+1, \\ H_{m,n}(\alpha), & m+n \geq 2N+1. \end{cases}$$

Здесь $H_{mn}(\alpha)$ – подлежащие определению неизвестные функции.

Найдём элементы матрицы $\mathbf{P}(\alpha) \equiv \mathbf{BQ} = \mathbf{BGS} = \|P_{ms}(\alpha)\|$. Получим

$$P_{m,s}(\alpha) = h_{m,2N-s}(\alpha) \exp i(b_{2N-s+1} - b_{2N-s})\alpha + \\ + h_{m,2N}(\alpha) R_s(\alpha) \exp i[-(b_{2N} - b_{2N-s+1})]\alpha,$$

$$h_{m,2N-s}(\alpha) = \begin{cases} 0, & m < s+1, \\ 1, & m = s+1, \\ H_{m,2N-s}, & m > s+1, \end{cases}$$

$$R_s(\alpha) = \begin{cases} R(\alpha), & s = 2n-1, \\ -1, & s = 2n. \end{cases}$$

Для дальнейшего введём двойной интеграл вида

$$g_k(\alpha) = e^{iab(-1)^k} \frac{[\alpha + i(-1)^k]^\varepsilon}{2\pi} \int_{-b}^b e^{i\alpha x} \int_{\sigma}^T \frac{T(u)e^{-iux}}{[u + i(-1)^k]^\varepsilon} dudx, \\ k = 1, 2, \dots,$$

$$T(u) = c|u|^r, \quad |\operatorname{Re} r| \leq 1, \quad |u| \rightarrow \infty.$$

Справедлива следующая

Л е м м а . Пусть $T(\alpha)$ – мероморфная функция, имеющая нули и полюсы в верхней и нижней полуплоскостях, не лежащие на вещественной оси и сгущающиеся на бесконечности. Тогда для любого r , $|\operatorname{Re} r| \leq 1$, найдётся такое ε , что для функции $g_k(\alpha)$ запишем представление вида

$$g_k(\alpha) = g_k^-(\alpha), \quad k = 2m+1, \quad g_k(\alpha) = g_k^+(\alpha), \quad k = 2m,$$

$$g_k(\alpha) = e^{iab(-1)^k} T(\alpha) + S_k(\alpha), \quad S_k(\alpha) = O(\alpha^{\varepsilon-1}).$$

Здесь функция $g_k^-(\alpha)$ ниже контура σ является регулярной и убывает там на бесконечности. Функция $g_k^+(\alpha)$ обладает таким же свойством выше контура σ . Из леммы вытекает следствие. Рассмотрим выражение $P_{m,s}(\alpha)$ вида

$$P_{ms}(\alpha) = \exp i\alpha(b_{2N-s+1} - b_{2N-s}) + \\ + h_{m,2N}(\alpha) R_s(\alpha) \exp i\alpha[-(b_{2N} - b_{2N-s+1})].$$

Входящая в него функция $h_{m,2N}(\alpha)$ нуждается в определении.

Допустим, имеет место соотношение

$$1 < |h_{m,2N}(\alpha) R_s(\alpha)|,$$

из которого получается оценка

$$P_{ms}(\alpha) \sim h_{m,2N}(\alpha) R_s(\alpha) \exp i[-(b_{2N} - b_{2N-s+1})]\alpha, \quad |\alpha| \rightarrow \infty.$$

С л е д с т в и е . Существует функция $h_{m,2N}(\alpha) \equiv h_{m,2N}^+$, обеспечивающая следующее поведение выражения $P_{ms}(\alpha)$ на бесконечности:

$$P_{ms}(\alpha) = \exp i(b_{2N-s+1} - b_{2N-s})\alpha + \\ + h_{m,2N}(\alpha) R_s(\alpha) \exp i[-(b_{2N} - b_{2N-s+1})]\alpha = S_k(\alpha),$$

$$|P_{ms}(\alpha)| |h_{m,2N}(\alpha) R_s(\alpha)|^{-1} = O(\alpha^{-\delta}), \quad \delta > 0, \quad |\alpha| \rightarrow \infty.$$

Аналогичным образом из соотношения

$$P_{ms}(\alpha) = h_{m,2N-s}(\alpha) \exp i(b_{2N-s+1} - b_{2N-s})\alpha + \\ + h_{m,2N}^+(\alpha) R_s(\alpha) \exp i[-(b_{2N} - b_{2N-s+1})]\alpha$$

при наличии известной функции $h_{m,2N}^+$ определяется функция $h_{m,2N-s}(\alpha)$ применением приведённого выше алгоритма.

Таким же путём строится матрица-функция $\mathbf{H}(\alpha) \equiv \mathbf{H}_+(\alpha)$.

Введём теперь в рассмотрение матрицу-функцию вида

$$\mathbf{C}(\alpha) = \begin{vmatrix} 1 & c_{1,2}(\alpha) & \dots & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & \dots & & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & & \dots & 1 & c_{2N-2,2N-1}(\alpha) & 0 \\ & 0 & \dots & 0 & 1 & c_{2N-1,2N}(\alpha) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \\ \det \mathbf{C}(\alpha) = 1.$$

Здесь функции $c_{m,n}(\alpha)$ подлежат определению.

Построим произведение матриц-функций

$$\mathbf{D}(\alpha) = \mathbf{H}_+ \mathbf{GSC} \equiv \mathbf{PC} = \|D_{m,n}(\alpha)\|, \quad \det \mathbf{D}(\alpha) = 1.$$

Её элементы имеют представление вида

$$D_{n-1,n}(\alpha) = P_{n-1,n-1}(\alpha) c_{n-1,n}(\alpha) + P_{n-1,n}(\alpha).$$

Повторяя описанный ранее процесс построения элементов матрицы-функции $\mathbf{H}_+(\alpha)$, совершенно аналогично строим матрицу-функцию \mathbf{C}_- . Построив матрицу-функцию $\mathbf{D}(\alpha)$ в виде

$$\mathbf{D}(\alpha) \equiv \mathbf{D}_1(\alpha) = \mathbf{H}_+ \mathbf{GSC}_-,$$

можем теперь применить описанный процесс к матрице-функции $\mathbf{D}_1(\alpha)$ и получить представление во втором и последующих приближениях описанным выше алгоритмом. В процессе этих построений недиагональные элементы убывают, а диагональные сохраняют свой

порядок. Повторяя этот процесс приближения и дальше, приходим к почти диагональной матрице-функции. Поскольку при исследовании штолен сложно точно определить и внести в граничную задачу все параметры, в пределах погрешности ориентиром может служить достаточно простое представление факторизации матрицы-функции $\mathbf{G}(\alpha)$ в первом приближении, имеющее вид

$$\mathbf{G}(\alpha) = \mathbf{G}_+(\alpha)\mathbf{G}_-(\alpha), \quad \mathbf{G}_+(\alpha) = \mathbf{H}_+^{-1}\mathbf{D}_{0+}, \\ \mathbf{G}_-(\alpha) = \mathbf{D}_{0-}\mathbf{C}_-^{-1}\mathbf{S}_-^{-1}.$$

Здесь \mathbf{D}_{0+} и \mathbf{D}_{0-} – диагональные матрицы-функции, получающиеся в результате факторизации функций, стоящих на диагонали матрицы-функции $\mathbf{D}(\alpha)$.

Тогда векторное уравнение Римана (2) решается достаточно просто и имеет вид

$$\mathbf{X}^+ = \mathbf{G}_+ \{ \mathbf{G}_+^{-1} \Psi \}^+, \quad \mathbf{X}^- = -\mathbf{G}_-^{-1} \{ \mathbf{G}_+^{-1} \Psi \}^-.$$

Возвращаясь в этих формулах к исходным обозначениям (1), получаем представления как контактных напряжений на опорах, так и отвисаний кровли в штольнях.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках погрешностей, которые возникают при внесении в граничную задачу данных о параметрах блочной структуры, для мониторинга напряжённо-деформированного состояния блочной структуры штолен предлагается пользоваться первым приближением решения задачи Римана, которое даёт данные о контактных напряжениях и отвисании кровли во всех штольнях одновременно.

Источник финансирования. Отдельные фрагменты работы выполнены в рамках реализации Госзадания Минобрнауки на 2018 г. (проекты 9.8753.2017/8.9, 8.2321.2017/4.6), ЮНЦ РАН на 2018 г. (проект 00–18–04 № госрег. 01201354241), программ Президиума РАН II–16 (проект 00–18–21) и II–52 (проект 00–18–29) и при поддержке грантов РФФИ (16–41–230214, 16–41–230218, 16–48–230216, 17–08–00323, 18–08–00465, 18–01–00384).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баренблатт Г.И., Христианович С.А. Об обрушении кровли при горных выработках // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. 1955. № 11. С. 73–82.
2. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. К теории влияния глобального фактора на прочность совокупности параллельных соединений // Вычисл. механика сплошных сред. 2016. Т. 9. № 4. С. 412–419.
3. Бабешко В.А., Бабешко О.М., Евдокимова О.В., Зарецкая М.В., Павлова А.В., Уафа С.Б., Шестопалов В.Л. О мониторинге состояния параллельных штолен в зоне горизонтального движения литосферных плит // МТГ. 2017. № 4. С. 42–49.
4. Бабешко В.А. Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М., 1984. 256 с.
5. Ворovich И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М., 1979. 320 с.
6. Ворovich И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М., 1974. 456 с.
7. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М., 1962. 600 с.
8. Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений. М., 1970. 380 с.
9. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М., 1977. 640 с.
10. Гахов Ф.Д. Краевая задача Римана для системы n пар функций // УМН. 1952. Т. 7. В. 4(50). С. 3–54.
11. Симоненко И.Б. Краевая задача Римана для n пар функций с измеримыми коэффициентами и ее применение к исследованию сингулярных интегральных в пространстве L_p с весами // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1964. Т. 28. № 2. С. 277–306.
12. Литвинчук Г.С., Спитковский И.М. Факторизация матриц-функций. Деп. ВИНТИ № 2410-84. М., 1984. Ч. I. 250 с.; ч. II. 212 с.
13. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Системы интегральных уравнений на полупрямой, с ядрами, зависящие от разности аргументов // УМН. 1958. Т. 13. В. 2. С. 3–72.
14. Koppelman W. The Riemann-Hilbert Problem for Finite Riemann Surfaces // Pure and Appl. Math. 1959. V. 12. № 1. P. 13–25.
15. Widom H. Singular integral equations in L_p // Trans. Amer. Math. Soc. 1960. V. 97. № 1. P. 131–160.

**THEORY OF BLOCK STRUCTURE IN THE STRENGTH
PROBLEM OF GALLERIES AND CONSTRUCTIONS
WITH MULTIPLE CONNECTIONS**

**Academician of the RAS V. A. Babeshko, O. B. Evdokimova, O. M. Babeshko,
A. V. Pavlova, I. S. Telatnikov, A. G. Fedorenko**

Received May 18, 2018

It is shown that the boundary-value problem for a layered medium with parallel multiple cavities is reduced to the Riemann vector problem. To solve it, a factorization method is developed, which makes possible to construct the solution to be built in arbitrary approximations.

Keywords: stress-strain state, drifts, factorization, deformable layers, interface layer, Kirchhoff plates, block elements differential and integral equations.