

УДК 517.521.2:519.651

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ КРАВЧЕНКО–КОТЕЛЬНИКОВА СПЕКТРАМИ ФИНИТНЫХ БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ $h_a^{(m)}(x)$

К. А. Будунова^{1,*}, В. Ф. Кравченко^{1,2,3}, академик РАН В. И. Пустовойт^{2,3}

Поступило 19.09.2018 г.

Впервые рассматривается обобщение теоремы Кравченко–Котельникова спектрами финитных бесконечно дифференцируемых функций $h_a^{(m)}(x)$. Данные функции являются решениями линейных интегральных уравнений специального вида. Спектр $h_a^{(m)}(x)$ представляет собой кратное бесконечное произведение растянутых по аргументу спектров атомарных функций $h_a(x)$. Построенный обобщённый ряд обладает быстрой сходимостью, что подтверждается представленной формулой оценки погрешности усечения и результатами численного эксперимента.

Ключевые слова: атомарные функции, обобщённая теорема отсчётов, оценка ошибки усечения.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0869-56524844405-409>

Рассматривается новое семейство многопараметрических функций $h_a^{(m)}(x)$, а также обобщение ряда Кравченко–Котельникова [1–4] спектрами данных функций. Теорема Кравченко–Котельникова представляет собой обобщение теоремы отсчётов Уиттекера–Котельникова–Шеннона (УКШ) спектрами атомарных функций. В [1, 5, 6] показана практическая эффективность применения ряда Кравченко–Котельникова в задачах восстановления многомерных сигналов, синтеза диаграммы направленности антенны, реконструкции томографических изображений. Ряд на основе спектров атомарных функций обладает быстрой сходимостью и по сравнению с рядом Котельникова, менее чувствителен к эффекту усечения. Базисные функции построенного в работе обобщённого ряда являются кратными бесконечными произведениями растянутых по аргументу базисных функций ряда Кравченко–Котельникова. Построенные таким образом функции быстро затухают, вследствие чего увеличивается скорость сходимости разложений.

НОВОЕ СЕМЕЙСТВО ФИНИТНЫХ БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ $h_a^{(m)}(x)$

Рассмотрим линейное интегральное уравнение

¹ *Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова Российской Академии наук, Москва*

² *Научно-технологический центр уникального приборостроения Российской Академии наук, Москва*

³ *Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана*

* *E-mail: 1917schw@mail.ru*

$$y(x) = b \int_{-\infty}^{+\infty} h_a(bx-t)y(t)dt, \quad (1)$$

или

$$y(x) = b[h_a * y](bx).$$

В уравнении (1) $h_a(x)$ – известная атомарная функция [2, 3]. Параметр b подчиняется неравенству $b > 1$. Решение уравнения (1), удовлетворяющее условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y(x)dx = 1, \quad (2)$$

найдем методом преобразования Фурье. Уравнение (1) в частотной области имеет вид

$$F(\omega) = F\left(\frac{\omega}{b}\right)F_a\left(\frac{\omega}{b}\right),$$

откуда

$$F(\omega) = F(0) \prod_{k=1}^{\infty} F_a\left(\frac{\omega}{b^k}\right).$$

При выполнении условия (2) $F(0) = 1$. Полученный спектр будем обозначать $F_{a,b}^{(2)}(\omega)$

$$F_{a,b}^{(2)}(\omega) = \prod_{k=1}^{\infty} F_a\left(\frac{\omega}{b^k}\right) = \prod_{k,l=1}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{\omega}{a^k b^l}\right).$$

Функция $F_{a,b}^{(2)}(\omega)$ является целой функцией экспоненциального типа $\frac{1}{(a-1)(b-1)}$. Обозначим решение уравнения (1) $h_{a,b}^{(2)}(x)$. Запишем представление функции $h_{a,b}^{(2)}(x)$ через интеграл Фурье:

$$h_{a,b}^{(2)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_{a,b}^{(2)}(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} \prod_{k,l=1}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{\omega}{a^k b^l}\right) d\omega.$$

Согласно теореме Винера–Пэли, полученная функция финитна:

$$\text{supp } h_{a,b}^{(2)}(x) = \left[-\frac{1}{(a-1)(b-1)}, \frac{1}{(a-1)(b-1)} \right].$$

Она бесконечно дифференцируема и является решением задачи о разложении единицы

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_{a,b}^{(2)}\left(x+k\frac{2}{ab}\right) \equiv \frac{ab}{2}.$$

Подобно функциям $h_a(x)$, $h_{a,b}^{(2)}(x)$ при некоторых значениях a и b равны константе на центральном участке своего носителя:

$$h_{a,b}^{(2)}(x) \equiv \frac{ab}{2}, \quad x \in \left[-\frac{2}{ab} + \frac{1}{(a-1)(b-1)}, \frac{2}{ab} - \frac{1}{(a-1)(b-1)} \right]. \quad (3)$$

Свойство (3) имеет место, если выполнены неравенства $a > 2$, $b > \frac{2(a-1)}{a-2}$.

Положим $h_a^{(1)}(x) \equiv h_a(x)$. Рассмотрим набор параметров $a_k > 1$, $k = 1, 2, \dots, m$ и обозначим $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m)$. Функцию $h_{\mathbf{a}}^{(m)}(x)$ при $m > 1$, $m \in \mathbb{N}$, определим как решение уравнения

$$y(x) = a_m \int_{-\infty}^{+\infty} h_{a_1, \dots, a_{m-1}}^{(m-1)}(a_m x - t) y(t) dt,$$

удовлетворяющее условию нормировки (2).

Спектр функции $h_{\mathbf{a}}^{(m)}(x)$ представляет собой m -кратное бесконечное произведение

$$F_{\mathbf{a}}^{(m)}(x) = \prod_{|\alpha|=m} \text{sinc}\left(\frac{\omega}{\mathbf{a}^\alpha}\right) = \prod_{\alpha_1, \dots, \alpha_m=1}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{\omega}{a_1^{\alpha_1} \dots a_m^{\alpha_m}}\right). \quad (4)$$

В формуле (4) α – мультииндекс, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ причём $\alpha_k \geq 1$, $k = 1, 2, \dots, m$.

Носитель бесконечно дифференцируемой финитной функции $h_{\mathbf{a}}^{(m)}(x)$ – отрезок

$$\left[-\prod_{k=1}^m \frac{1}{(1-a_k)}, \prod_{k=1}^m \frac{1}{(1-a_k)} \right].$$

**ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ
КРАВЧЕНКО–КОТЕЛЬНИКОВА
СПЕКТРАМИ ФУНКЦИЙ $h_{\mathbf{a}}^{(m)}(x)$**

Теорема 1. Пусть спектр $F(\omega)$ функции $f(x)$ является финитным с носителем $\text{supp } F(\omega) = [-\Omega, \Omega]$.

Тогда функция $f(x)$ может быть точно восстановлена по набору своих отсчётов по следующей формуле:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k\Delta) F_{\mathbf{a}}^{(m)} \left[\frac{a_1 \dots a_m \pi}{\Delta} (x - k\Delta) \right], \quad (5)$$

где функции $F_{\mathbf{a}}^{(m)}(\omega)$ определяются формулой (4), шаг Δ удовлетворяет неравенству

$$\Delta \leq \frac{\frac{\pi}{\Omega} \left[2 \prod_{l=1}^m (a_l - 1) - \prod_{l=1}^m a_l \right]}{\prod_{l=1}^m (a_l - 1)}, \quad (6)$$

а параметры a_1, \dots, a_m таковы, что

$$a_n > \frac{2 \prod_{l=1}^{n-1} (a_l - 1)}{2 \prod_{l=1}^{n-1} (a_l - 1) - \prod_{l=1}^{n-1} a_l}, \quad n = 2, \dots, m, \quad a_1 > 2. \quad (7)$$

В частности, при $m = 2$ разложение (5) имеет вид

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k\Delta) F_{a,b}^{(2)} \left[\frac{ab\pi}{\Delta} (x - k\Delta) \right],$$

где $\Delta \leq \frac{\pi}{\Omega} \frac{2(a-1)(b-1) - ab}{(a-1)(b-1)}$. Параметры a, b должны удовлетворять неравенствам $a > 2$, $b > \frac{2(a-1)}{a-2}$.

Графики некоторых базисных функций разложения (5) приводятся на рис. 1.

Функции $F_{\mathbf{a}} \left(\frac{a\pi x}{\Delta} \right) \equiv F_{\mathbf{a}}^{(1)} \left(\frac{a\pi x}{\Delta} \right)$ обладают низким уровнем боковых лепестков по сравнению с функцией $\text{sinc}\left(\frac{\pi x}{\Delta}\right)$. При увеличении числа параметров происходит понижение уровня боковых лепестков базисных функций (рис. 2).

Пример. Рассмотрим применение разложения (5) в задаче интерполяции.

Функция

$$f(x) = \frac{1 + e^{-2} \left(\frac{x}{4} \sin\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{x}{2}\right) \right)}{(1 - e^{-2}) \left(1 + \left(\frac{x}{4}\right)^2 \right)}$$

имеет финитный спектр $F(\omega)$, $\text{supp } F(\omega) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$.

Предположим, что нам известны значения функции $f(x)$ в точках $x = k\Delta$, где Δ – шаг, удовлетворяющий условию (6). Поставим задачу интерполяции значений функции в точках сетки $x_l = l\Delta_1$, $l = -\frac{L}{2} + 1, \dots, \frac{L}{2}$ с шагом $\Delta_1 = \frac{\Delta}{2}$ по известным отсчётам $f(k\Delta)$.

В примере рассмотрим сетку из $L = 60$ точек. Интерполяцию будем производить усечёнными

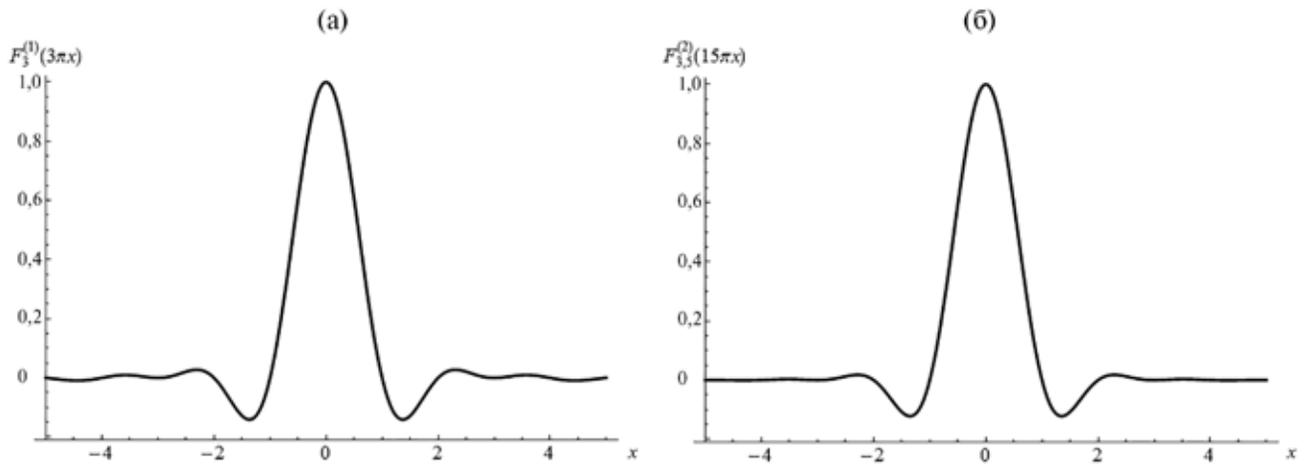


Рис. 1. Базисные функции разложения (5) при различном числе параметров: а – функция $F_3^{(1)}(3\pi x)$, б – функция $F_{3,5}^{(2)}(15\pi x)$.

рядами с количеством слагаемых $2N$ в точках $l\Delta_1 \neq k\Delta$

$$f_N(l\Delta_1) = \sum_{k=(l-1)/2-N+1}^{(l-1)/2+N} f(k\Delta) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta}(l\Delta_1 - k\Delta)\right), \quad (8)$$

$$f_N(l\Delta_1) = \sum_{k=(l-1)/2-N+1}^{(l-1)/2+N} f(k\Delta) F_a^{(m)}\left(\frac{a_1 \dots a_m \pi}{\Delta}(l\Delta_1 - k\Delta)\right). \quad (9)$$

Согласно условию (6) при $m = 2, a_1 = 3, a_2 = 5$ выберем шаг $\Delta = 0,785$. Данный шаг позволяет использовать разложения в ряд Котельникова и в ряд Кравченко–Котельникова при $a = 3$ (разложение (5) при $m = 1, a_1 = a = 3$). В табл. 1 приведены значения абсолютной погрешности $\max_l |f_N(l\Delta_1) - f(l\Delta_1)|$ для различных значений числа N .

При применении формулы (9) с $m = 2, a_1 = 3, a_2 = 5$ получена меньшая погрешность по сравнению с погрешностью аппроксимации усечённым

рядом Котельникова и усечённым рядом Кравченко–Котельникова для $a = 3$.

Покажем эффективность разложения (5) на основе функций $F_a^{(m)}(x)$ при $m = 3$. Положим $\Delta = 0,295$. Рассмотрим (8), (9) для $m = 1, 2, 3$ и $a_1 = a_2 = a_3 = 5$. Полученная при интерполяции абсолютная погрешность приводится в табл. 2.

ОЦЕНКА ОШИБКИ УСЕЧЕНИЯ ОБОБЩЁННОГО РЯДА

Положим в разложении (5) $a_l = a, l = 1, 2, \dots, m$. Рассмотрим ошибку усечения $\varepsilon_N(t)$

$$\varepsilon_N(t) = \sum_{|k|>N} f(k\Delta) F_{a,\dots,a}^{(m)}\left(\frac{a^m \pi}{\Delta}(t - k\Delta)\right), \quad (10)$$

имеющую место при приближении искомой функции $f(t)$ усечённым рядом из $2N + 1$ слагаемых. Справедлива следующая теорема об оценке величины (10).

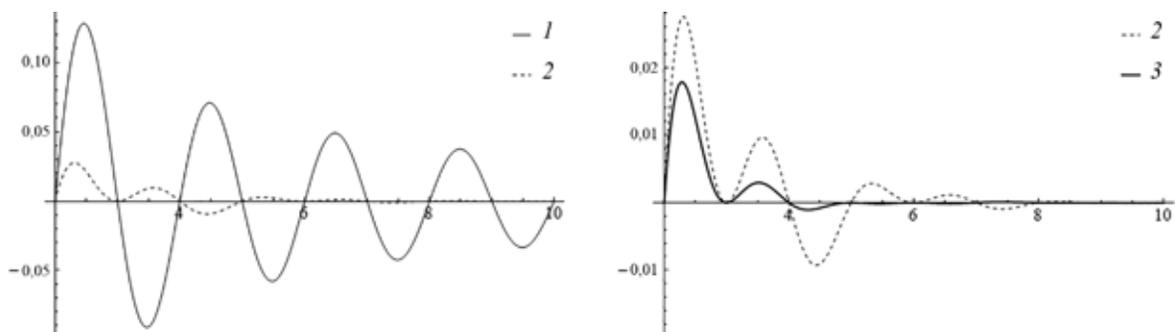


Рис. 2. Затухание базисных функций ряда Котельникова (кривая 1), базисных функций ряда Кравченко–Котельникова при $a = 3$ (кривая 2) и базисных функций разложения (5) при $m = 2, a_1 = 3, a_2 = 5$ (кривая 3).

Таблица 1. Абсолютная погрешность интерполяции $\max_l |f_N(l\Delta_1) - f(l\Delta_1)|$, $\Delta = 0,785$

N	1	2	5	10
Разложение (8)	$2,68 \cdot 10^{-1}$	$1,42 \cdot 10^{-1}$	$4,33 \cdot 10^{-2}$	$1,76 \cdot 10^{-2}$
Разложение (9), $m = 1, a_1 = 3$	$2,04 \cdot 10^{-1}$	$4,36 \cdot 10^{-2}$	$3,39 \cdot 10^{-3}$	$1,34 \cdot 10^{-4}$
Разложение (9), $m = 2, a_1 = 3, a_2 = 5$	$1,81 \cdot 10^{-1}$	$2,62 \cdot 10^{-2}$	$2,43 \cdot 10^{-4}$	$5,52 \cdot 10^{-7}$

Таблица 2. Абсолютная погрешность интерполяции $\max_l |f_N(l\Delta) - f(l\Delta)|$, $\Delta = 0,95$

N	1	2	5	10
Разложение (8)	$2,72 \cdot 10^{-1}$	$1,5 \cdot 10^{-1}$	$5,99 \cdot 10^{-2}$	$2,58 \cdot 10^{-2}$
Разложение (9), $m = 1, a_1 = 5$	$2,51 \cdot 10^{-1}$	$1,09 \cdot 10^{-1}$	$1,25 \cdot 10^{-3}$	$1,55 \cdot 10^{-4}$
Разложение (9), $m = 2, a_1 = a_2 = 5$	$2,29 \cdot 10^{-1}$	$7,68 \cdot 10^{-2}$	$3,83 \cdot 10^{-4}$	$2,56 \cdot 10^{-5}$
Разложение (9), $m = 3, a_1 = a_2 = a_3 = 5$	$2,06 \cdot 10^{-1}$	$5,12 \cdot 10^{-2}$	$8,15 \cdot 10^{-5}$	$1,31 \cdot 10^{-6}$

Теорема 2. Пусть $N > \frac{a}{\pi}$, $|t| < \Delta$,
 $M = \max_{k \in \mathbb{Z}} f(k\Delta)$, $a \nu = \nu(N)$ — натуральное число,
определяемое формулой

$$\nu(N) = \begin{cases} \lfloor \log_a(a^m \pi N) \rfloor, & \log_a(\pi N) \notin \mathbb{N}, \\ \log_a(a^{m-1} \pi N), & \log_a(\pi N) \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

где $\lfloor \cdot \rfloor$ — целая часть числа.

Тогда ошибка усечения (10) удовлетворяет неравенству

$$|\varepsilon_N(t)| \leq 2Ma^{mC_v^{m+1}} \pi^{-C_v^m} N^{1-C_v^m} \left(\frac{1}{C_v^m - 1} + N^{-1} \right). \quad (11)$$

Доказательство формулы (11) в частном случае $m = 1$ (ряд Кравченко–Котельникова) приведено в [7].

ВЫВОДЫ

Построена новая формула точного представления функции с финитным спектром по её отсчётам. Быстрая сходимость новых разложений подтверждается результатами численного эксперимента. При интерполяции усечённым рядом (5) с фиксированным числом слагаемых и числом параметров $m \geq 2$ получена меньшая погрешность по сравнению с погрешностью интерполяции усечёнными рядами Котельникова и Кравченко–Котельникова. Получена формула, позволяющая

оценить ошибку усечения ряда (5) в случае выбора равных параметров. Оценка (11) стремится к нулю быстрее, чем N^{-r} , где r — произвольное положительное число. Представленный в работе ряд может найти применение в различных задачах цифровой обработки сигналов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кравченко В.Ф., Рвачев В.Л. Алгебра логики, атомарные функции и вейвлеты в физических приложениях. М.: Физматлит, 2006.
2. Кравченко В.Ф., Чуриков Д.В. Цифровая обработка сигналов атомарными функциями и вейвлетами. М.: Техносфера, 2018.
3. Гуляев Ю.В., Кравченко В.Ф., Пустовойт В.И. // ДАН. 2007. Т.417. № 4. С. 476–482.
4. Кравченко В.Ф., Кравченко О.В. Конструктивные методы алгебры логики, атомарных функций, вейвлетов, фракталов в физике и технике. М.: Техносфера, 2018.
5. Кравченко В.Ф., Сафин А.Р. // Электромагн. волны и электрон. системы. 2008. Т. 13. № 12. С. 31.
6. Budunova K.A., Kononov Y.Y., Kravchenko O.V. Proc. Progress in Electromagnetics Research Symp. (PIERS). St Petersburg, 2017. N.Y.: IEEE, 2017. P. 1641.
7. Будунова К.А., Кравченко В.Ф., Пустовойт В.И. // РЭ. 2018. Т. 63. № 9. С. 935–941.

**GENERALIZATION OF KRAVCHENKO–KOTELNIKOV THEOREM
BY SPECTRA OF COMPACTLY SUPPORTED INFINITELY
DIFFERENTIABLE FUNCTIONS $h_a^{(m)}(x)$**

K. A. Budunova, V. F. Kravchenko, Academician of the RAS V. I. Pustovoi

Received September 19, 2018

New generalization of Kravchenko–Kotelnikov theorem by spectra of compactly supported infinitely differentiable functions $h_a^{(m)}(x)$ is discussed. These functions are solutions of linear integral equations of special form. The spectrum of $h_a^{(m)}(x)$ is a multiple infinite product of the spectra of atomic functions $h_a(x)$, dilated by the argument. Constructed generalized series has fast convergence. This property is confirmed by the presented truncation error bound formula and the results of a numerical experiment.

Keywords: atomic functions, generalized sampling theorem, truncation error.