ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 484, № 5, с. 547–549

МЕХАНИКА

УДК 539.37

О РАСПРОСТРАНЕНИИ УПРУГИХ ВОЗМУЩЕНИЙ В СРЕДЕ С БОЛЬШИМИ НЕОБРАТИМЫМИ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ

Академик РАН Ю. Н. Кульчин, В. Е. Рагозина, О. В. Дудко*

Поступило 08.08.2018 г.

Для нелинейной мультипликативной градиентной модели больших упругопластических деформаций получены общие теоретические соотношения для расчётов перераспределения поля предварительных необратимых деформаций в процессах разгрузки или упругого нагружения среды. Показано, что динамика упругих ударных волн не зависит напрямую от уровня накопленных ранее пластических деформаций. Получена формула для тензора поворота пластических деформаций. Показано, что жёсткое вращение пластических деформаций на упругих ударных волнах может происходить скачком. Все результаты получены для общего случая модельных соотношений изотропных сред и справедливы как для сжимаемых, так и для несжимаемых материалов.

Ключевые слова: большие упругопластические деформации, градиентная модель, упругая разгрузка, повторное упругое нагружение, перераспределение пластических деформаций, поворотный тензор, упругие ударные волны.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524845547-549

Современные технологии обработки поверхности конструкционных элементов часто основаны на импульсной передаче больших энергий посредством лазерного излучения. Неотъемлемой частью такого воздействия на твёрдое тело является появление волн деформаций, переносящих часть переданной внешним источником энергии на значительные расстояния от области её локального максимума. Моделирование режима лазерной обработки поверхности должно учитывать взаимодействие этих волн с уже присутствующими в конструкции полями напряжённо-деформированного состояния (НДС) с целью выхода на необходимые геометрические параметры конструкций. Решение такой задачи требует использования нелинейной связанной математической модели (см. [1–4] и др.) в качестве теоретической основы для описания подобного физического эффекта.

В работе рассматривается движение упругих ударных волн в среде с предварительным полем НДС, включая необратимые деформации. Свойства среды определены нелинейной моделью больших упругопластических деформаций [4], получившей развитие за последнее десятилетие. Цель работы состоит в точном описании механизмов перераспределения полей предварительных необратимых деформаций в механических упругих волнах, сопровождающих интенсивную лазерную обработку поверхностных зон конструкций. В [5] в качестве необходимого условия для решения подобных задач в наиболее простых квазистатических формулировках вводилось предположение о несжимаемости среды. Предложенный в настоящей работе подход к построению точного решения снимает ограничение, созданное фактором несжимаемости. Он одинаково эффективен как в квазистатических, так и в динамических режимах. Для этого в общие соотношения модели [4] включён градиент промежуточной конфигурации, что позволяет получить формулы, устанавливающие степень взаимного влияния обратимых и необратимых деформаций в упругих ударных волнах.

1. Движение сплошной среды в евклидовом пространстве задаём в переменных Лагранжа a^i. Каждой точке среды ставим в соответствие три состояния: $\mathbf{R}(a^i)$ — свободная конфигурация; $\mathbf{R^0}(a^i, t_0)$ — конфигурация в индивидуальный момент $t_0 > 0$ перехода точки к упругому динамическому процессу, который начинается с импульсного воздействия на границу среды в момент $t = 0$; $\mathbf{r}(a^i, t)$ — актуальная конфигурация в момент $t \geq t_0$.

Институт автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения Российской Академии наук, Владивосток

**E-mail: dudko@iacp.dvo.ru*

Конфигурации $\mathbf{R}^0(a^i, t_0)$ соответствуют известные статические значения упругих ($\boldsymbol{\varepsilon}^0$) и пластических ($\mathbf{P}^0$) деформаций. С каждой конфигурацией связываем свои локальные базисы и тензоры-градиенты [6]:

$$\mathbf{R}_i = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial a^i},\ \mathbf{R}_i^0 = \left.\frac{\partial \mathbf{R}^0}{\partial a^i}\right|_{t_0},\ \mathbf{r}_i = \left.\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a^i}\right|_t,\ \boldsymbol{\Phi} = \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{R}^i,$$
$$\mathbf{F} = \mathbf{R}_i^0 \otimes \mathbf{R}^i,\ \boldsymbol{\Psi} = \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{R}^{0^i}, \tag{1}$$
$$\mathbf{R}_i \cdot \mathbf{R}_j = G_{ij},\ \mathbf{R}_i^0 \cdot \mathbf{R}_j^0 = G_{ij}^0,\ \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j = g_{ij},$$
$$\mathbf{R}^i \cdot \mathbf{R}_j = \mathbf{R}^{0^i} \cdot \mathbf{R}_j^0 = \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}_j = \delta^i_j.$$

Решением задачи нелинейной динамики твёрдого тела [7] является поле вектора перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{r} - \mathbf{R}$, которое представим с учётом промежуточной конфигурации $\mathbf{R}^0$ в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{s}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{u}^0(\mathbf{r} - \mathbf{s}(\mathbf{r}, t)),\ t \ge t_0,$$
$$\boldsymbol{\Psi}^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{S}^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\Psi}^{-1\mathrm{T}} = \mathbf{I} - \mathbf{S}, \tag{2}$$
$$\mathbf{S} = \nabla \otimes \mathbf{s} = \mathbf{r}^i \otimes \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial a^i} = s^j_{,i} \mathbf{r}^i \otimes \mathbf{r}_j,$$

где $\mathbf{I}$ — единичный (метрический) тензор, $\mathbf{u}^0$ — известное поле предварительных статических перемещений при $t \le t_0$, $\mathbf{s}(\mathbf{r}, t)$ — основная неизвестная функция дополнительных перемещений, получаемых в упругом процессе. Представление (2) для кинематики среды наиболее просто осуществить в задачах, где пластическое деформирование связано только с предварительным статистическим полем $\mathbf{u}^0$. В общем случае поле вектора $\mathbf{u}^0$ заранее неизвестно. В модели [4] для левого тензора Альманзи $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ принято разделение на упругую и пластическую части согласно общим подходам градиентных моделей [1–3], выделяющих в тензоре-градиенте упругий и пластический градиенты:

$$2\mathbf{A} = \mathbf{I} - \boldsymbol{\Phi}^{-1\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\Phi}^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{V}^{-2} =$$
$$= \mathbf{I} - (\mathbf{I} - \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{I} - 2\mathbf{P}) \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{E}),$$
$$\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{O},\ \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}} = \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{O} = \mathbf{I}, \tag{3}$$
$$\mathbf{V} = \mathbf{V}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{E} = \mathbf{E}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{P} = \mathbf{P}^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{E} - \frac{\mathbf{E}^2}{2}.$$

Здесь $\mathbf{E}$ — базовый тензор упругой деформации, $\boldsymbol{\varepsilon}$ — соосный с $\mathbf{E}$ тензор упругой деформации, $\mathbf{P}$ — тензор пластической деформации, $\mathbf{V}$ — левый тензор искажений, $\mathbf{O}$ — ортогональный тензор. С учётом промежуточной конфигурации $\mathbf{R}^0$ для тензора $\mathbf{A}$ получим

$$\mathbf{I} - 2\mathbf{A} = (\mathbf{I} - \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{I} - 2\mathbf{P}) \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{E}) =$$
$$= (\mathbf{I} - \mathbf{S}) \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{E}^0) \cdot (\mathbf{I} - 2\mathbf{P}^0) \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{E}^0) \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{S}^{\mathrm{T}}). \tag{4}$$

Согласно модели [4], в процессе упругой деформации тензор $\mathbf{P}^0$ движется вместе с точкой среды, в которой он создан к моменту $t = t_0$, и может испытывать только жёсткий поворот. Если это имеет место, то в (4)

$$\mathbf{I} - 2\mathbf{P} = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{I} - 2\mathbf{P}^0) \cdot \mathbf{C}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^{\mathrm{T}} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{I}.$$

Тогда поворотный тензор вычисляется как

$$\mathbf{C} = (\mathbf{I} - \mathbf{E})^{-1} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{S}) \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{E}^0). \tag{5}$$

При этом из условия ортогональности $\mathbf{C}$ одновременно получим

$$\mathbf{I} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^{\mathrm{T}} = (\mathbf{I} - \mathbf{E})^{-1} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{S}) \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{E}^0)^2 \times$$
$$\times (\mathbf{I} - \mathbf{S}^{\mathrm{T}}) \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{E})^{-1}, \tag{6}$$
$$(\mathbf{I} - \mathbf{E})^2 = \mathbf{I} - 2\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{I} - \mathbf{S}) \cdot (\mathbf{I} - 2\boldsymbol{\varepsilon}^0) \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{S}^{\mathrm{T}}).$$

Таким образом, ортогональность возможна, если общая упругая деформация $\boldsymbol{\varepsilon}$ зависит только от своего начального значения $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ и градиента $\mathbf{S}$, $\mathbf{S}^{\mathrm{T}}$ упругих перемещений и, как многократно экспериментально показано, не зависит от накопленных значений $\mathbf{P}^0$. Эти же выводы можно получить из обратной цепочки рассуждений. Если в (3), (4) для $\mathbf{A}$ записать развёрнутое представление с учетом $\mathbf{S}$, $\mathbf{S}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{E}^0$, $\mathbf{P}^0$ и предположить, что $\boldsymbol{\varepsilon}$ не зависит от $\mathbf{P}^0$, то для $\boldsymbol{\varepsilon}$ получим (6). Далее, допуская для $\mathbf{P}^0$ только вращение, из (4) и (6) опять приходим к формуле (5) для $\mathbf{C}$. Из (5) следует важный частный случай: $\mathbf{C} = \mathbf{I}$ тогда и только тогда, когда

$$(\mathbf{I} - \mathbf{S}) \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{E}^0) = (\mathbf{I} - \mathbf{E}^0) \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{S})^{\mathrm{T}}. \tag{7}$$

При выполнении (7) из (4) получим $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{P}^0(\mathbf{r} - \mathbf{s}(\mathbf{r}, t))$. В частности, тензор $\mathbf{P}$ перемещается без вращений в задачах, где $\mathbf{E}^0$ и $\mathbf{S}$ имеют диагональный вид (все одномерные радиальные движения среды). Если (7) не выполняется хотя бы на уровне малых величин, то возникающие вращения $\mathbf{P}^0$ необходимо учитывать ввиду наличия в (3) слагаемых вида $\mathbf{E} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}$.

2. На основе (1)–(6) приведём основные выводы для произвольных задач упругой ударной динамики. Пусть напряжения $\mathbf{T}$ для изотропной среды вычисляются через $\mathbf{E}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\mathbf{P}$ уравнением

$$\mathbf{T} = \rho\rho_0^{-1} U_{\boldsymbol{\varepsilon}} (\mathbf{I} - 2\boldsymbol{\varepsilon}) = \rho\rho_0^{-1} U_{\mathbf{E}} (\mathbf{I} - \mathbf{E}), \tag{8}$$

где упругий потенциал U определяется только инвариантами тензора $\boldsymbol{\varepsilon}$ (или $\mathbf{E}$), $U_{\boldsymbol{\varepsilon}}$, $U_{\mathbf{E}}$ — его производные по соответствующим тензорным аргументам $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\mathbf{E}$, $\rho\rho_0^{-1} = \det(\mathbf{I} - \mathbf{E})\sqrt{\det(\mathbf{I} - 2\mathbf{P})}$, $\det(\mathbf{I} - 2\mathbf{P}) = \det(\mathbf{I} - 2\mathbf{P}^0)$. Тензор $\mathbf{T}$ полностью не зависит от $\mathbf{P}$ для пластически несжимаемого материала и может зависеть от $\mathbf{P}$, если среда пластически сжимаема. Для определения скоростей и типов упругих ударных волн имеем динамические условия совместности [7]

$$[\rho(v_n - G)] = 0, \quad \mathbf{v}\cdot[\mathbf{T}] = [\rho\mathbf{v}(v_n - G)], \\ v_n = \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}, \quad [\mathbf{T}] = \mathbf{T}^+ - \mathbf{T}^-, \tag{9}$$

где $\mathbf{v}$ — скорость частиц среды, $\mathbf{n}$ — единичная внешняя нормаль к ударной волне, G — скорость ударной волны в направлении $\mathbf{n}$. Так как согласно (8) $[\det(\mathbf{I} - 2\mathbf{P})] = 0$, то для любых пластических механизмов из (9) получаем, что скорости и типы ударных волн в среде напрямую зависят от $\boldsymbol{\varepsilon}^{\pm}$, $\mathbf{v}^{\pm}$ (причём $\mathbf{v}$ вычисляется исключительно через поле $\mathbf{s}(\mathbf{r}, t)$), но не зависят от уровня $\mathbf{P^0}$. Влияние $\mathbf{P^0}$ на краевые условия (9) и интегрирование уравнений движения относительно $\mathbf{s}(\mathbf{r}, t)$ проявляется в том, что поле $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{0}}$ не образует совместную деформацию, поэтому решение для $\mathbf{s}(\mathbf{r}, t)$ в общем случае нельзя найти среди решений чисто упругих задач. Для пластически несжимаемой среды уравнения движения, как и (9), не зависят от $\mathbf{P^0}$ и могут решаться отдельно. Вращение тензора $\mathbf{P^0}$ вычисляется впоследствии по уже найденному полю $\mathbf{s}(\mathbf{r}, t)$, т.е. задача разделяется на две части. Ещё один важный вывод связан с необходимостью учитывать на каждой из ударных волн возможный разрыв тензора $\mathbf{P}$, обусловленный только его скачкообразным поворотом:

$$[\mathbf{P}] = [\mathbf{C}]\cdot\mathbf{P^0}\cdot(\mathbf{C}^{\mathrm{T}})^+ + \mathbf{C}^+\cdot\mathbf{P^0}\cdot[\mathbf{C}^{\mathrm{T}}] - [\mathbf{C}]\cdot\mathbf{P^0}\cdot[\mathbf{C}^{\mathrm{T}}].$$

Применение представления (2)–(6) не ограничено рассмотренным выше динамическим упругим процессом с передними фронтами — ударными волнами. Формулы (2)–(6) справедливы и при решении квазистатических задач в стадиях разгрузки и упругого нагружения.

Таким образом, для модели больших упругопластических деформаций [4] получены общие формулы перераспределения пластического поля и показана независимость скоростей упругих ударных волн от необратимых деформаций. Комплексное применение полученных результатов может быть исключительно эффективным при экспериментально-численном анализе краевых задач, инициированных лазерной обработкой поверхности конструкций с целью выхода на заданную геометрию.

Источник финансирования. Работа выполнена в рамках госбюджетной темы № AAA-A-A17-117040450015-0 и при частичной финансовой поддержке Минобрнауки России (постановление П218, договор № 02.G25.31.0116 от 14.08.2014 между ОАО «Центр судоремонта “Дальзавод”» и Минобрнауки России).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lee E.H., McMeeking R.M.* // Int. J. Solids Struct. 1980. V. 16. Iss. 8. P. 715–721.
2. *Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И.* Большие упруго-пластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. М.: Наука, 1986. 232 с.
3. *Левитас В.И.* Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. Киев: Наук. думка, 1987. 232 с.
4. *Быковцев Г.И., Шитиков А.В.* // ДАН. 1990. Т. 311. № 1. С. 59–62.
5. *Буренин А.А., Ковтанюк Л.В.* Упругие эффекты при интенсивном необратимом деформировании. Владивосток: Изд-во ДВГТУ, 2011. 280 с.
6. *Димитриенко Ю.И.* Нелинейная механика сплошной среды. М.: Физматлит, 2009. 624 с.
7. *Бленд Д.Р.* Нелинейная динамическая теория упругости. М.: Мир, 1972. 183 с.

THE PROPAGATION OF ELASTIC DISTURBANCES IN A MEDIUM WITH LARGE IRREVERSIBLE PRELIMINARY STRAINS

Academician of the RAS Yu. N. Kulchin, V. E. Ragozina, O. V. Dudko

Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Vladivostok, Russian Federation

Received August 8, 2018

General theoretical relations for calculating the redistribution of the preliminary irreversible strain field during unloading or elastic loading of a medium are obtained for the nonlinear multiplicative gradient model of large elastic-plastic deformations. It is shown that the dynamics of elastic shock waves does not depend directly on the previously accumulated plastic strains. A formula for the plastic-strain rotation tensor is obtained. It is shown that rigid rotation of plastic strains under elastic shock waves can be jump-like. All results are obtained for the general case of model relations of isotropic media and are valid for both compressible and incompressible materials.

Keywords: large elastic-plastic deformations, gradient model, elastic unloading, elastic reloading, redistribution of plastic deformations, rotation tensor, elastic shock waves.