ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 485, № 2, с. 135–138

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

КЛАССИФИКАЦИЯ ОДНОМЕРНЫХ АТТРАКТОРОВ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПОСРЕДСТВОМ ПСЕВДОАНОСОВСКИХ ГОМЕОМОРФИЗМОВ

В. З. Гринес[1,*], Е. Д. Куренков[**]

Представлено академиком РАН Д.В. Трещевым 16.08.2018 г.

Поступило 16.08.2018 г.

Рассматриваются диффеоморфизмы замкнутых двумерных многообразий рода $p \geq 2$, удовлетворяющие аксиоме A, чьё неблуждающее множество содержит совершенный просторно расположенный одномерный аттрактор. Устанавливается, что такой диффеоморфизм полусопряжён с псевдоаносовским гомеоморфизмом, имеющим такое же действие в фундаментальной группе. Основным результатом работы является следующий результат. Два диффеоморфизма из рассматриваемого класса топологически сопряжены на совершенных просторно расположенных аттракторах тогда и только тогда, когда сопряжены гомотопные им псевдоаносовские гомеоморфизмы с помощью гомеоморфизма, переводящего некоторое выделенное подмножество точек одного псевдоаносовского гомеоморфизма в выделенное подмножество другого.

Ключевые слова: аксиома A, базисное множество, псевдоаносовский гомеоморфизм.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524852135-138

В настоящей работе рассматриваются диффеоморфизмы, заданные на замкнутом ориентируемом двумерном многообразии M^2 рода $p \geq 2$, удовлетворяющие аксиоме A С. Смейла [10] (A-диффеоморфизмы). Согласно спектральной теореме С. Смейла неблуждающее множество $NW(f)$ A-диффеоморфизма f представляется в виде конечного объединения попарно непересекающихся замкнутых инвариантных базисных множеств, каждое из которых содержит всюду плотную траекторию.

Примерами нетривиальных (отличных от периодических орбит) базисных множеств диффеоморфизмов двумерных многообразий являются двумерное базисное множество диффеоморфизма f на M^2 (в этом случае базисное множество совпадает с многообразием M^2, которое есть двумерный тор, а f — диффеоморфизм Аносова), одномерное базисное множество DA-диффеоморфизма двумерного тора, полученного из диффеоморфизма Аносова применением "хирургической операции" [10]. В работе [5] хирургическая операция С. Смейла была обобщена на случай псевдоаносовских гомеоморфизмов поверхностей таким образом, что посредством хирургической операции, применённой к любому псевдоаносовскому гомеоморфизму, заданному на ориентируемой поверхности рода $p \geq 2$, строится структурно устойчивый диффеоморфизм этой же поверхности, неблуждающее множество которого состоит в точности из одного одномерного аттрактора и конечного числа источниковых периодических точек.

В проблеме топологической классификации A-диффеоморфизмов с нетривиальными базисными множествами прежде всего возникает задача нахождения эффективных топологических инвариантов, описывающих сложную структуру ограничения диффеоморфизмов на базисное множество и вложения базисных множеств в объемлющее многообразие.

Следуя [8], одномерное базисное множество Λ называется просторно расположенным на M^2, если для различных точек $x, y \in \Lambda$ любая замкнутая кривая, составленная из дуг $[x, y]^s \subset W_x^s$ и $[x, y]^u \subset W_x^u$, не гомотопна нулю на M^2. Проблема топологической сопряжённости A-диффеоморфизмов двумерного многообразия на одномерных просторно расположенных базисных множествах была исчерпывающим образом изучена в работах В.З. Гринеса и Р.В. Плыкина, а в работах В.З. Гринеса и Х.Х. Калая был получен полный топологический инвариант для ограничений диффеоморфизмов на произвольные одномерные базисные множества посредством сведения этой проблемы к алгебраической классификации автоморфизмов фундаментальных групп

Нижегородский филиал
Национального исследовательского университета
"Высшая школа экономики"
**E-mail*: *vgrines@yandex.ru*
***E-mail*: *eugene2402@mail.ru*

носителей базисных множеств. Кроме того, в работах А.Ю. Жирова было получено полное комбинаторное описание динамики ограничений диффеоморфизмов на одномерные базисные множества (см. [1, 2] для информации и ссылок).

В настоящей работе рассматриваются A-диффеоморфизмы замкнутого ориентируемого двумерного многообразия M^2 рода $p \geq 2$, неблуждающее множество которых содержит одномерное просторно расположенное базисное множество Λ такое, что множество $M^2 \setminus \Lambda$ состоит из конечного числа областей гомеоморфных двумерному диску (такое базисное множество является совершенным (см. определение 2)). Мы покажем, что проблема топологической классификации таких диффеоморфизмов тесно взаимосвязана с топологической классификацией псевдоаносовских гомеоморфизмов поверхностей.

Введём на M^2 аналитическую структуру, превращающую M^2 в риманову поверхность. Рассмотрим конформное отображение π универсальной накрывающей $\bar{M}^2$ на M^2, где $\bar{M}^2$ — плоскость Лобачевского в реализации Пуанкаре на внутренности круга $|z| < 1$ комплексной z-плоскости. Известно, что M^2 соответствует однозначно определённая дискретная группа Γ неевклидовых переносов таких, что M^2 конформно эквивалентно $\bar{M}^2/\Gamma$ и Γ изоморфна фундаментальной группе $\pi_1(M^2)$ многообразия M^2.

Для диффеоморфизма $f\colon M^2 \to M^2$ обозначим через $\bar{f}\colon \bar{M}^2 \to \bar{M}^2$ диффеоморфизм, накрывающий f, т.е. диффеоморфизм, для которого $\pi\bar{f} = f\pi$. Преобразование $\bar{f}_*\colon \Gamma \to \Gamma$, действующее по правилу $\bar{f}_*(\gamma) = \bar{f}\gamma\bar{f}^{-1}$, есть автоморфизм группы Γ.

Определение 1. Автоморфизм $\bar{f}_*$ группы Γ называется *гиперболическим*, если для любых $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ ($\gamma_1 \neq \mathrm{id}$) и любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место соотношение $\bar{f}_*^n(\gamma_1) \neq \gamma_2\gamma_1\gamma_2^{-1}$.

Базисное множество A-диффеоморфизма, отличное от периодической орбиты, будем называть нетривиальным. Согласно спектральной теореме С. Смейла [10] неблуждающее множество $NW(f)$ диффеоморфизма f представляется в виде конечного объединения попарно непересекающихся замкнутых инвариантных множеств, называемых базисными множествами, каждое из которых содержит всюду плотную траекторию. При этом согласно Д.В. Аносову и Р. Боуэну каждое базисное множество Λ представляется в виде конечного объединения $\Lambda_1 \cup \ldots \cup \Lambda_k$ замкнутых подмножеств ($k \geq 1$), таких, что $f^k(\Lambda_i) = \Lambda_i$, $f(\Lambda_i) = \Lambda_{i+1}$ ($\Lambda_{k+1} = \Lambda_1$). Множества $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_k$ называются периодическими компонентами множества Λ, а число k — их периодом.

Определение 2. Нетривиальное базисное множество Λ A-диффеоморфизма $f\colon M^2 \to M^2$ назовём *совершенным*, если его дополнение $M^2 \setminus \Lambda$ состоит из конечного числа областей Δ, гомеоморфных диску.

Лемма 1. *Совершенное базисное множество Λ A-диффеоморфизма $f\colon M^2 \to M^2$ замкнутой поверхности M^2 является связным одномерным множеством и, следовательно, состоит в точности из одной периодической компоненты.*

Из работы [8, теорема 3] следует, что одномерное базисное множество A-диффеоморфизма двумерной поверхности является либо аттрактором, либо репеллером и в силу [8, теорема 1] содержит в первом случае неустойчивые, а во втором случае — устойчивые многообразия своих точек[1]. Следуя [8], дадим следующее

Определение 3. Базисное множество Λ A-диффеоморфизма $f\colon M^2 \to M^2$ называется *просторно расположенным*, если для различных точек $x, y \in \Lambda$ любая замкнутая кривая, составленная из дуг $[x, y]^s \subset W_x^s$ и $[x, y]^u \subset W_x^u$, не гомотопна нулю[2].

Теорема 1. *Пусть $f\colon M^2 \to M^2$ диффеоморфизм, обладающий совершенным просторно расположенным аттрактором или репеллером, и $\bar{f}\colon \bar{M}^2 \to \bar{M}^2$ — диффеоморфизм, накрывающий f. Тогда автоморфизм $\bar{f}_*$ является гиперболическим.*

Определение 4. Гомеоморфизм $P\colon M^2 \to M^2$ называется *псевдоаносовским*, если на M^2 существует пара P-инвариантных трансверсальных слоений $\mathcal{F}^s$, $\mathcal{F}^u$ с множеством седловых особенностей $\mathcal{S}$ и трансверсальными мерами μ^s, μ^u, таких, что:

1) каждая седловая особенность из $\mathcal{S}$ имеет не менее трёх сепаратрис;

2) существует число $\lambda > 1$ такое, что $\mu^s(P(\alpha)) = \lambda\mu^s(\alpha)$ ($\mu^u(P(\alpha)) = \lambda^{-1}\mu^u(\alpha)$) для любой дуги α, трансверсальной $\mathcal{F}^s$ ($\mathcal{F}^u$).

---

[1] Базисное множество Λ A-диффеоморфизма f называется аттрактором, если существует замкнутая окрестность U множества Λ такая, что $f(U) \subset \mathrm{int}U$, $\bigcap\limits_{j \geq 0} f^j(U) = \Lambda$. Аттрактор для диффеоморфизма f^{-1} называется репеллером диффеоморфизма f.

[2] $[x, y]^s$, $[x, y]^s$, $(x, y)^u$, $(x, y)^u$ обозначают отрезки и интервалы, ограниченные точками x, y, содержащиеся в одномерных устойчивом W_x^s и неустойчивом W_x^u многообразиях соответственно.

Из теории Нильсена—Терстена (см., например, [3, 4]) следует, что если для диффеоморфизма $\bar{f}$, накрывающего f, автоморфизм $\bar{f}_*$ является гиперболическим, то существует псевдоаносовский гомеоморфизм P_f, гомотопный диффеоморфизму f.

Для определённости далее (если не оговорено противное) мы будем предполагать, что рассматриваемое одномерное базисное множество Λ является аттрактором (в случае репеллера достаточно рассмотреть диффеоморфизм f^{-1}).

Следуя [6] и [9] назовём периодическую точку $p \in \Lambda$ граничной периодической точкой базисного, если одна из компонент линейной связности множества $W^s(p) \setminus p$ не пересекается с Λ. Согласно [6] граничные периодические точки в одномерном аттракторе существуют и их конечное число, а достижимая изнутри граница[3] каждой области Δ, принадлежащей $M^2 \setminus \Lambda$, состоит из конечного числа одномерных неустойчивых многообразий $W^u_{p_1}, \ldots, W^u_{p_{r_C}}$ ($r_C \geq 1$) граничных периодических точек $p_1, \ldots, p_{r_C}$ множества Λ и называется связкой степени r_C.

Теорема 2. *Пусть $f: M^2 \to M^2$ — диффеоморфизм, обладающий совершенным просторно расположенным аттрактором Λ. Тогда существует гомотопное тождественному непрерывное отображение $h: M^2 \to M^2$ такое, что*:

1) $hf = P_f h$;

2) *ограничение отображения h на множество Λ является взаимно однозначным за исключением множества $\Gamma^u = \{W^u(q_1), \ldots, W^u(q_k)\}$ $(k \geq 6)$, состоящего из неустойчивых многообразий всех граничных периодических точек $Q = \{q_1, \ldots, q_k\}$ из множества Λ*;

3) *множество $h(Q)$ содержит множество S*;

4) *для точек $q_{i_1}, q_{i_2} \in Q$ выполняется условие $h(q_{i_1}) = h(q_{i_2})$ тогда и только тогда, когда q_{i_1}, q_{i_2} принадлежат одной и той же связке множества Λ.*

Положим $B = h(Q)$. Основным результатом данной работы является следующая

Теорема 3. *Для того чтобы существовал гомеоморфизм $\varphi: M^2 \to M^2$, такой что $f'|_{\Lambda'} = \varphi f \varphi^{-1}|_{\Lambda'}$, необходимо и достаточно, чтобы существовал гомеоморфизм $\psi: M^2 \to M^2$, такой что $\psi(B) = B'$ и $P_{f'} = \psi P_f \psi^{-1}$.*

Замечание 1. Если несущее многообразие M^2 для A-диффеоморфизма есть двумерный тор, то в силу [7] теорема 3 остаётся справедливой, только роль псевдоаносовских гомеоморфизмов P_f, $P_{f'}$ играют соответствующие алгебраические автоморфизмы Аносова, заданные на торе и индуцированные гиперболическими унимодулярными матрицами второго порядка, т.е. целочисленными матрицами, определитель которых равен +1 или −1, а собственные значения которых не равны по модулю единице.

Замечание 2. Из теоремы 3 следует, что задача топологической классификации диффеоморфизмов поверхностей рода $p \geq 2$ с совершенными просторно расположенными базисными множествами сводится к задаче классификации псевдоаносовских гомеоморфизмов с отмеченными точками. Как сообщил авторам настоящей статьи А.Ю. Жиров, алгоритм для решения данной задачи можно извлечь из книги [11].

Источник финансирования. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ (проект 17—11—01041).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Grines V.Z.* // J. Math. Sci. V. 95. № 5. 1999. P. 2523–2545.
2. *Grines V.Z.* // J. Dyn. and Control Syst. 2000. V. 6. № 1. P. 97–126.
3. *Fathi A.*, *Laudenbach F.*, *Poenaru V.* Thurston's Work on Surfaces. Princeton: Princeton Univ. Press, 2012. V. 48. 345 p.
4. *Кэссон Э.*, *Блейлер С.* Теория автоморфизмов поверхностей по Нильсену и Терстону. М.: Фазис, 1998. 111 с.
5. *Жиров А.Ю.*, *Плыкин Р.В.* // Мат. заметки. 1995. V. 58. № 1. P. 149–152.
6. *Гринес В.З.* // Тр. ММО. 1975. Т. 32. С. 35–59.
7. *Гринес В.З.* // Тр. ММО. 1977. Т. 34. С. 243–252.
8. *Плыкин Р.В.* // Мат. сб. 1971. Т. 84. № 2. С. 301–312.
9. *Плыкин Р.В.* // Мат. сб. 1974. Т. 23. С. 223–253.
10. *Smale S.* // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. V. 73. № 6. P. 747–817.
11. *Жиров А.Ю.* Топологическая сопряженность псевдоаносовских гомеоморфизмов. М.: МЦНМО, 2014. 366 с.

[3] Достижимой изнутри границей области $\Delta \subset M^2 \setminus \Lambda$ называется подмножество $C \subset \Lambda$ такое, что для любой точки $y \in C$ найдётся путь $\psi_y: I \to \Delta \cup C$, такой что $\psi_y(1) = y$, и $\psi_y(t) \in \Delta$ для любого $t \in [0, 1)$.

CLASSIFICATION OF ONE-DIMENSIONAL ATTRACTORS OF DIFFEOMORPHISMS OF SURFACES BY MEANS OF PSEUDO-ANOSOV HOMEOMORPHISMS.

V. Z. Grines, E. D. Kurenkov

Presented by Academician of the RAS D.V. Treshchev August 16, 2018

Received August 16, 2018

In the present paper axiom diffeomorphisms of closed 2-manifolds of genus whose nonwandering set contains perfect spaciously situated one-dimensional attractor are considered. It is shown that such diffeomorphisms are topologically semiconjugate to pseudo-Anosov homeomorphism with the same induced automorphism of fundamental group. The main result of the paper is the following. Two diffeomorphisms from the given class are topologically conjugate on attractors if and only if corresponding pseudo-Anosov homeomorphisms are topologically conjugate by means of homeomorphism that maps a certain subset of one pseudo-Anosov map onto the certain subset of the other pseudo-Anosov map.

Keywords: axiom A, diffeomorphism, basic set, pseudo-Anosov map.