ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 485, № 2, с. 142–144

МАТЕМАТИКА

УДК 517.91

НАИМЕНЬШЕЕ РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ЭКСТРЕМУМАМИ И МИНИМАЛЬНЫЙ ПЕРИОД РЕШЕНИЙ АВТОНОМНЫХ ВЕКТОРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. А. Зевин

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 05.10.2018 г.

Поступило 22.10.2018 г.

Рассматриваются решения $x(t)$ уравнения $\dot{x} = f(x)$, где $x \in \mathbb{R}^n$, функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица с произвольной векторной нормой. Доказано, что нижняя граница расстояний между последовательными экстремумами $x_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, равна $\frac{\pi}{L}$, где L — константа Липшица. Для непостоянных периодических решений нижняя граница периодов равна $\frac{2\pi}{L}$. Эти оценки являются точными для норм, инвариантных относительно перестановки индексов.

Ключевые слова: автономное уравнение, экстремумы решений, оценка расстояний, минимальный период.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524852142-144

1. Введение. Рассматривается уравнение

$$\dot{x} = f(x), \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица

$$\|f(x') - f(x'')\| \le L\|x' - x''\| \tag{2}$$

с произвольной векторной нормой.

Пусть $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ — решение уравнения (1), t_k^i, $i = 1, 2, \ldots,$ — последовательные экстремумы компоненты $x_k(t)$, $\delta_k^i = t_k^{i+1} - t_k^i$, $k = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n$, — расстояния между ними. Теорема 1 данной работы даёт точную нижнюю границу $\delta_* = \frac{\pi}{L}$ величин δ_k^i.

Заметим, что начиная с классических результатов Штурма имеется обширная литература, посвящённая нулям решений дифференциальных уравнений. При этом обычно рассматриваются уравнения с особой точкой $x = 0$ (так что нули решений характеризуют колебания системы относительно положения равновесия).

Для автономного уравнения (1) при отсутствии особой точки нули решений зависят от произвольного выбора начала координат и поэтому не представляют интереса. Напротив, точки экстремумов t_k^i инвариантны относительно сдвига координат. Нижняя граница величин δ_k^i указывает наименьшее расстояние между соседними минимумами и максимумами и, таким образом, характеризует колебания решений относительно их средних значений. Тем не менее такая задача, по-видимому, ранее не рассматривалась в литературе.

Институт транспортных систем и технологий Национальной академии наук Украины, Днепр, Украина
E-mail: *alexandr.zevin@gmail.com*

Во второй части сообщения с помощью указанной выше оценки найден минимальный период решений $x(t) = x(t + T) \ne \text{const}$ системы (1), (2). В отличие от предыдущей такая задача рассматривалась достаточно детально. Первая точная оценка [1]

$$T \ge \frac{2\pi}{L} \tag{3}$$

получена для системы (1), (2) с евклидовой нормой. Для уравнения

$$x^{(r)} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

с той же нормой оценка (3) принимает вид [2]

$$T \ge \frac{2\pi}{L^{1/r}}. \tag{5}$$

Для уравнения (1) в общем банаховом пространстве точная граница периодов равна [3]

$$T \ge \frac{6}{L}. \tag{6}$$

В связи с различием оценок (3) и (6) в [4] поставлена задача о минимальном периоде в пространстве $\mathbb{R}^n$ для норм, отличных от евклидовой. Для уравнения

(4) с чётным r общее решение такой задачи получено в [5], где доказано, что неравенство (5) является точным для любой векторной нормы (там же утверждается, что такой же вывод справедлив и при $r = 1$, однако приведённое доказательство содержит ошибку). Строгое доказательство справедливости оценки (3) для любой нормы в $\mathbb{R}^n$ найдено в [6]; ниже оно получено (теорема 2) как прямое следствие теоремы 1.

2. Основные результаты. Следующая теорема даёт нижнюю оценку расстояний между экстремумами решения $x(t)$.

Теорема 1. *В системе* (1), (2) *величины* $\delta_k^i = t_k^{i+1} - t_k^i$ *удовлетворяют неравенству*

$$\delta_k^i \geq \delta_* = \frac{\pi}{L}. \tag{7}$$

Доказательство. Как известно, функция $y(t) = \dot{x}(t)$ является решением уравнения в вариациях

$$\dot{y} = A(t)y, \tag{8}$$

где $A(t) = f_x(x(t))$. При этом подчинённая норма матрицы $A(t)$

$$\|A(t)\| = \sup_{\|y\|=1}\|A(t)y\| \leq L. \tag{9}$$

Без ограничения общности полагаем в (7) $k = 1$ и $t_1^1 = 0$, тогда

$$y_1(0) = y_1(\delta_1^1) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_1(\delta_1^1) = 0. \tag{10}$$

При фиксированном t представим (8) в виде

$$\dot{y} = Sy,\ S = \operatorname{diag}[s_k],\ s_k = \frac{\dot{y}_k}{y_k},\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{11}$$

Так как подчинённая норма матрицы является согласованной, то для любого y

$$\|Sy\| = \|Ay\| \leq \|A\|\|y\| \leq L\|y\|. \tag{12}$$

В силу диагональности матрицы S

$$\|Sy\| \leq s_*\|y\|,\ s_* = \max_k|s_k|. \tag{13}$$

Пусть $|s_i| = s_*$, тогда равенство в (13) достигается, если $y_k = 0$ при $k \neq i$. При этом $|y_i| = \|y\|$, поэтому из (12) и (11) имеем $s_* \leq L$ и $|s_1(t)| = |\dot{y}_1(t)/y_1(t)| \leq L$. Следовательно,

$$F(y_1) = \frac{\int_0^{\delta_1^1}\dot{y}_1^2(t)dt}{\int_0^{\delta_1^1}y_1^2(t)dt} \leq L^2. \tag{14}$$

Как известно, при условии (10) и $\delta_1^1 = \pi$ минимум функционала $F(y_1)$ равен единице. Поэтому неравенство (7) следует из (14). Теорема доказана.

Равенство в (14) имеет место при $y_1(t) = \sin Lt$. Поэтому оценка (7) достигается на уравнении $\dot{x} = Ax$ с постоянной матрицей A, $\|A\| = L$ и собственным значением $\lambda_1 = iL$. Соответствующий блок в её жордановой форме

$$J = \begin{bmatrix} 0 & L \\ -L & 0 \end{bmatrix}.$$

Ему отвечает уравнение

$$\dot{x} = Jx. \tag{15}$$

Из определения (13) подчинённой нормы следует, что равенство $\|J\| = L$ имеет место, если

$$\left\|\begin{matrix} x_2 \\ -x_1 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\|. \tag{16}$$

При этом оценка (7) достигается на решении $x_1 = \cos Lt$ уравнения (15). Условие (16) выполняется, если норма инвариантна относительно перестановки индексов, что является типичным для общепринятых норм.

Пусть теперь $x(t) \neq \text{const}$ — T-периодическое решение системы (1), (2).

Теорема 2. *Период T удовлетворяет неравенству*

$$T \geq \frac{2\pi}{L}. \tag{17}$$

Доказательство. Без ограничения общности полагаем

$$x_1(0) = x_1(T) = \min x(t),$$
$$x_1(\delta_1^1) = \max x(t), \quad \delta_1^1 \in (0,\ T).$$

В силу теоремы 1

$$\delta_1^1 \geq \frac{\pi}{L}, \quad T - \delta_1^1 \geq \frac{\pi}{L},$$

откуда следует неравенство (17). Теорема доказана.

При условии (16) оценка (17) также достигается на решениях уравнения (15).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Yorke J.* // Proc. Amer. Math. Soc. 1969. V. 22. P. 509–512.
2. *Mawhin J.*, *Walter W.* // JMAA. 1994. V. 186. P. 778–798.
3. *Busenberg S.*, *Fisher D.*, *Martelli M.* // Amer. Math. Monthly. 1989. V. 96. P. 5–17.
4. *Busenberg S.*, *Fisher D.*, *Martelli M.* // Proc. Amer. Math. Soc. 1986. V. 86. P. 376–378.
5. *Зевин А.А.* // ДАН. 2012. Т. 444. № 6. С. 602–604.
6. *Zevin A.A.* // arXiv.14124539 [math.DS]. 2014.

THE LEAST DISTANCE BETWEEN EXTREMUMS AND MINIMAL PERIOD OF SOLUTIONS TO AUTONOMOUS VECTOR DIFFERENTIAL EQUATIONS

A. A. Zevin

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov October 5, 2018

Received October 22, 2018

Solutions $x(t)$ of the Lipschitz equation $x = f(x)$ with an arbitrary vector norm are considered. It is proved that the sharp lower bound for the distances between successive extremums of $x_k(t)$ equals π/L where L is the Lipschitz constant. For non-constant periodic solutions, the lower bound for the periods is $2\pi/L$. These estimates are achieved for norms that are invariant with respect to permutation of the indices.

Keywords: autonomous equation, extremums of solutions, bound for distances, minimal period.